1 Graphentheorie

Graphen sind diskrete mathematische Objekte, mit denen Netzwerke verschiedenster Art modelliert werden können. Es existieren viele praktische Anwendungen und entsprechende Algorithmen und Datenstrukturen dazu.

1.1 Definitionen und Begriffe

Knotenmenge V (Vertexset). Oft $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Anzahl Knoten $n = |V|$.

Kantenmenge E (Edgeset). Menge aus Paaren (gerichtet) oder Mengen der Grösse 2 (ungerichtet) von Knoten. Anzahl Kanten $m = |E|$.

Graph $G = (V, E)$. Ein Paar von Knoten- und Kantenmenge.

Beispiel 1
$V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$E = \big\{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\big\}$

Beispiel 2
$V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$E = \big\{(0, 1), (0, 2), (3, 0), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (2, 4), (4, 3)\big\}$

Nachbarschaft eines Knotens:
$N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$
$N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$
$N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ (bzw. $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in V\}$).

Grad eines Knotens $d^+(v) = |N^+(v)|$, $\quad d^-(v) = |N^-(v)|$, $\quad dd(v) = |N(v)|$

Weg Folge von Knoten $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E \;\; \forall i = 1, \dots, k-1$.

Zyklus Weg mit $v_1 = v_k$.

Zusammenhängender Graph Für alle Knotenpaare gibt es einen Weg von einen zum anderen.

Baum Zusammenhängender Graph ohne Zyklus.

Kompletter Graph Alle möglichen Kanten existieren.

Planarer Graph Kann in der Ebene ohne Kantenüberschneidungen gezeichnet werden.

Aufgabe 1 Für die Beispiele 1 und 2,
a) bestimmen Sie für die Knoten 0 und 4 die verschiedenen Nachbarschaften und Grade der Knoten.
b) finden Sie zwei Wege vom Knoten 0 zum Knoten 4.
c) finden Sie einen Zyklus mit 4 Knoten.
d) bestimmen Sie eine Untermenge $E' \subset E$, so dass $G' = (V, E')$ ein Baum ist.
e) bestimmen Sie, ob die Graphen zusammenhängend sind.

Aufgabe 2 In Beispiel 2 wurde die Orientierung einer Kante geändert und der Graph ist immer noch zusammenhängend. Welche Kanten kommen dafür in Frage?

Aufgabe 3 Ist Beispiel 1 planar?

Aufgabe 4 Ist a) K_4 und b) K_5, der komplette Graph mit 4, bzw. 5 Knoten planar?

Aufgabe 5 a) Finden Sie für Beispiel 1 einen Weg, der jede Kante genau einmal benutzt.
b) Gleiche Aufgabe für Beispiel 2.

Aufgabe 6 Wie gross ist die Anzahl Kanten in einem kompletten Graphen mit n Knoten, wenn er a) ungerichtet und b) gerichtet ist?

Aufgabe 7 Wie gross ist die Anzahl Kanten eines Baumes mit n Knoten mindestens und höchstens?

Aufgabe 8 Finden Sie einen Weg, der die Kanten eines Würfels alle genau einmal beschreitet. Wie sieht es mit einem Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder aus?

Aufgabe 9 Die Koordinaten der Eckpunkte des Einheitsquadrates sind $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ und $(1,0)$. Überlegen Sie sich, wie die Koordinaten des Einheitswürfels sind und welche Eckpunkte miteinander verbunden werden. Verallgemeinern Sie auf 4 Dimensionen und schreiben Sie ein Programm, das die Knotenmenge und die Kantenmenge eines 4D-Würfels generiert.

Finden Sie einen Weg, der die Kanten eines 4D-Würfels alle genau einmal beschreitet.

Aufgabe 10 Gegeben ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Zyklus $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ der sämtliche Kanten genau einmal benutzt.

Was lässt sich über $d(v)$ für $v \in V$ aussagen?

Was lässt sich über $d(v)$ aussagen, wenn der Zyklus ein Weg ist (d.h. nicht geschlossen), insbesondere für $d(v_1)$ und $d(v_{m+1})$?

Definition 1 Eulerzyklus/weg

Ein **Eulerweg** ist ein Weg, der jede Kante genau einmal benutzt.

Aufgabe 11 Entwickeln Sie einen Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen einen Eulerweg bestimmt.

Aufgabe 12 Schätzen Sie die Anzahl Rechenschritte ihres Algorithmus' zur Bestimmung eines Eulerweges als Funktion des Graphen ab (typischerweise n, evtl. m oder sogar $d(v)$).

Aufgabe 13 Entwickeln Sie einen Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen *alle* Eulerwege bestimmen kann. Schätzen Sie ab, wie viele solche Wege es gibt, als Funktion von n, evtl. m und $d(v)$.

Aufgabe 14 Entwickeln Sie einen Algorithmus der überprüft, ob ein Graph zusammenhängend ist oder nicht. Schätzen Sie dessen Komplexität ab.

Definition 2 Hamiltonzyklus

Ein **Hamiltonzyklus** ist Weg, der jeden Knoten genau einmal besucht.

Aufgabe 15 Entwickeln Sie einen Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen einen Hamiltonzyklus bestimmt.

Aufgabe 16 Schätzen Sie die Anzahl Rechenschritte ihres Algorithmus' zur Bestimmung eines Hamiltonzyklus als Funktion des Graphen ab (typischerweise n, evtl. m oder sogar $d(v)$).