

Kapitel 1

Einführung in die komplexen Zahlen

Reelle Zahlen (engl: real numbers) sind messbar. Imaginäre und damit komplexe Zahlen nicht. Wir behandeln in diesem ersten Teil der Vorlesung also ein Gebiet, welches per Definition nicht in unseren Messgeräten erscheinen, oder in der realen makroskopischen Welt gebaut werden kann. Worin liegt also der Nutzen dieses Gebietes für den Ingenieur?

Historisch wurden die komplexen Zahlen im 16. und 17. Jahrhundert eingeführt, damit quadratische Gleichungen mit negativen Diskriminanten eine Lösung haben. Es hat sich aber herausgestellt, dass die dabei entdeckten Konzepte in den Natur- und Ingenieurwissenschaften auf eine sehr nützliche Weise angewandt werden können. Der Grund dazu ist, dass sich Schwingungen mithilfe komplexer Zahlen auf eine sehr elegante und effiziente Weise schreiben lassen. Damit können viele Ingenieurs-Rechnungen, welche auch in den reellen Zahlen ausgeführt werden könnten, erheblich verkürzt und vereinfacht werden. Dies wird in der in der Elektrotechnik und der technischen Mechanik angewandt. Weiter spielen komplexe Zahlen bei der Signalanalyse (z.Bsp Fouriertransformation), beim Design von Filtern und in der Regelungstechnik eine tragende Rolle. Schlussendlich wäre die Quantenmechanik ohne komplexe Zahlen nie entstanden. Die Quantenmechanik ist aber bereits in ihren Ausgangsgleichungen rein komplex (d.h. die komplexen Zahlen sind nicht nur eine Hilfsgrösse), weshalb man darüber spekulieren kann, ob komplexe Zahlen doch in der Natur vorkommen oder nicht.

Leibniz¹ nannte die komplexen Zahlen eine "feine und wunderbare Zuflucht des menschlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein."

¹Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716

1.1 Reelle, imaginäre und komplexe Zahlen

In der Zahlenmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} können keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen gezogen werden.

Aufgabe 1.1

$$x^2 = 1$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm 1, \quad x \in \mathbb{R}}}$$

Aufgabe 1.2

$$x^2 = -1$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}, \quad x \in \mathbb{R}}}$$

Damit diese Aufgabe eine Lösung hat, wurde die imaginäre Zahl j eingeführt.

Definition 1.1 (Imaginäre Einheit)

$$j, \quad \text{mit } j^2 = (-j)^2 = -1$$

Die Zahl j heisst imaginäre Einheit.

Bemerkungen:

1. Die Eigenschaft von j , dass $j^2 = -1$ ist, ist das einzige, was man über die Zahl j weiss.
2. Die imaginäre Einheit wird in der Mathematik und Physik als i geschrieben. Nur in den Ingenieursdisziplinen wird sie mit j notiert, da i bereits für die Stromstärke reserviert ist.

Mit dieser Definition gilt also:

Aufgabe 1.3

$$x^2 = -1$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm j}}$$

Aufgabe 1.4

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}$$

$$x = \underline{\underline{\pm 2j}}$$

Definition 1.2 (Imaginäre Zahlen) Alle Zahlen der Form

$$a \cdot j,$$

mit einer reellen Zahl $a \neq 0$, heissen imaginäre Zahlen. (Die Zahl 0 ist eine reelle Zahl.)

Aufgabe 1.5

$$(x - 3)^2 = -4$$

$$\begin{aligned}x - 3 &= \pm\sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \pm 2j \\x_{1,2} &= \underline{\underline{3 \pm 2j}}\end{aligned}$$

Aufgabe 1.6

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4} = \underline{\underline{1 \pm j}}$$

Die Lösungen der beiden letzten Aufgaben bestehen aus einer reellen und einer imaginären Zahl. Dies führt auf die Definition von komplexen Zahlen.

Definition 1.3 (Komplexe Zahlen) Alle Zahlen der Form

$$z = x + jy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

heissen **komplexe Zahlen**.

$x = \operatorname{Re}(z)$ heisst der Realteil von z .

$y = \operatorname{Im}(z)$ heisst der Imaginärteil von z .

Sowohl der Real- wie auch der Imaginärteil von z sind also **reelle Zahlen**.

Die Menge \mathbb{C} , mit

$$\mathbb{C} = \{x + jy | x, y \in \mathbb{R}\}$$

heisst **Menge der komplexen Zahlen**.

Die Darstellungsform $z = x + jy$ heisst **kartesische Form** der komplexen Zahlen, wir werden noch andere Formen kennenlernen.

Aufgabe 1.7 Bestimme Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen.

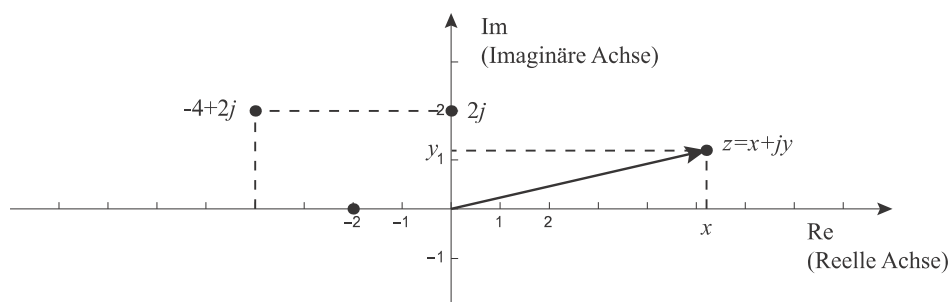
z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-2 + 7j$	-2	7
$3 - 2j$		
j		
π		
$R - j\omega$		

Alle reellen Zahlen sind also auch komplexe Zahlen, die Menge \mathbb{R} ist in der Menge \mathbb{C} enthalten.

1.2 Darstellung komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene

Eine komplexe Zahl $z = x + jy$ besteht aus einem Paar (x, y) aus Zahlen. Deshalb kann man jede komplexe Zahl auch als einen Ortsvektor $\vec{z} = (x, y)$ darstellen. So kann man die komplexen Zahlen als Punkte in einer komplexen Zahlenebene einzeichnen. Diese Ebene besteht aus einer reellen Achse und einer imaginären Achse. Man nennt diese Ebene die Gauss'sche Zahlenebene.²

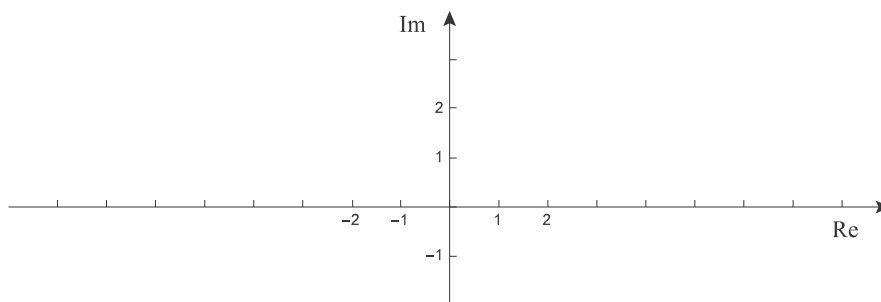
Darstellung der reellen Zahlen: Punkte der reellen Achse
 Darstellung der imaginären Zahlen: Punkte der imaginären Achse
 Darstellung beliebiger komplexer Zahlen: Punkte der komplexen Zahlenebene



²Nach Carl Friedrich Gauss, 1777-1855.

Aufgabe 1.8 Zeichne die folgenden komplexen Zahlen in die Gauss'sche Zahlenebene ein.

$$0; \quad -2 - 2j; \quad -6 + 2j; \quad 5 + j; \quad 5 - j; \quad -j$$



1.3 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen gelten dieselben Rechenregeln wie beim Rechnen mit reellen Zahlen, dazu kommen im Prinzip nur die neuen Regeln

$$j^2 = -1 \quad (-j)^2 = -1 \quad j \cdot (-j) = 1.$$

Am Schluss muss das Resultat häufig nur noch umgruppiert werden, damit wieder eine komplexe Zahl in der kartesischen Form $z = x + jy$ entsteht.

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen werden addiert (subtrahiert), in dem ihre Real- und Imaginärteile je addiert (subtrahiert) werden.

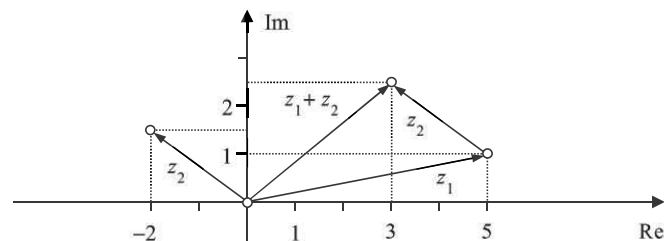
Beispiele:

$$(2 + 3j) + (6 - 2j) = (2 + 6) + (3 - 2)j = \underline{\underline{8 + j}}$$

$$(6 - 2j) - (-2 + 2j) = \underline{\underline{8 - 4j}}$$

$$(1 + 3j) - (2j) + (-4 - j) = \underline{\underline{-3}}$$

Graphisch entspricht die Addition komplexer Zahlen der Vektoraddition:



Aufgabe 1.9

$$z_1 = 2 - 3j, \quad z_2 = -5 + j$$

Berechne $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$.

Multiplikation komplexer Zahlen**Einfache Beispiele:**

$$4 \cdot (2 + 3j) = \underline{\underline{8 + 12j}}$$

Multiplikation mit einer reellen Zahl k bedeutet graphisch eine Streckung des zugehörigen Ortsvektors um den Faktor k .

$$j \cdot (2 + 3j) = 2j + 3j^2 = 2j - 3 = \underline{\underline{-3 + 2j}}$$

Multiplikation zweier komplexer Zahlen:**Aufgabe 1.10**

$$(1 - 2j) \cdot (2 + 3j)$$

$$\begin{aligned} (1 - 2j) \cdot (2 + 3j) &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3j + (-2j) \cdot 2 + (-2j) \cdot (3j) \\ &= 2 + 3j - 4j - 6j^2 = (2 + 6) + (3 - 4)j = \underline{\underline{8 - j}} \end{aligned}$$

Einfacher:

$$(1 - 2j) \cdot (2 + 3j) = (1 \cdot 2 - (-2) \cdot 3) + (1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2)j = \underline{\underline{8 - j}}$$

Aufgabe 1.11

$$(4 + 5j) \cdot (a + jb)$$

$$(4 + 5j) \cdot (a + jb) = \underline{\underline{(4a - 5b) + (5a + 4b)j}}$$

Aufgabe 1.12

$$(-4 + j) \cdot (2 - 3j)$$

$$(-4 + j) \cdot (2 - 3j) = -8 + 3 + (12 + 2)j = \underline{\underline{-5 + 14j}}$$

Aufgabe 1.13

$$(2 - 6j) \cdot \left(\frac{1}{2} + 2j\right)$$

Aufgabe 1.14 Berechne j^3 , j^4 und j^9 .

$$j^3 = j \cdot j^2 = j \cdot (-1) = \underline{\underline{-j}}$$

$$j^4 = (j^2)^2 = (-1)^2 = \underline{\underline{1}}$$

$$j^9 = j \cdot j^8 = j \cdot (j^4)^2 = j \cdot 1 = \underline{\underline{j}}$$

Division durch eine komplexe Zahl

Die folgenden komplexen Zahlen sollen in die kartesische Form gebracht werden:

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = \underline{\underline{-j}}$$

Hier hilft der Trick, den Bruch mit der Zahl j zu erweitern.

Bei einer komplexen Zahl ist die Situation etwas komplizierter: Steht im Nenner die Zahl $a + jb$, dann muss der Bruch mit der sogenannten konjugiert-komplexen Zahl $a - jb$ erweitert werden:

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{1}{(a + jb)} \cdot \frac{(a - jb)}{(a - jb)} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + j \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Der Grund, dass dies immer funktioniert, ist, dass im Nenner das entstehende Produkt immer reell und positiv wird, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden. Ausser der Vorgehensweise soll man sich an dieser Stelle aber nichts merken!

Aufgabe 1.15

$$\frac{6 - 4j}{-1 + j}$$

$$\frac{6 - 4j}{-1 + j} \cdot \frac{-1 - j}{-1 - j} = \frac{-6 - 4 + (4 - 6)j}{1 + 1} = \frac{-10 - 2j}{2} = \underline{\underline{-5 - j}}$$

Aufgabe 1.16

$$\frac{2 + 3j}{2 - j}$$

$$\frac{2 + 3j}{2 - j} \cdot \frac{2 + j}{2 + j} = \frac{4 - 3 + 6j + 2j}{4 + 1} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}j$$

Aufgabe 1.17 *Berechne die kartesische Form von*

$$z = 2 \left(\frac{8 - j}{5 + j} \right)^2$$

$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\frac{8 - j}{5 + j} \cdot \frac{5 - j}{5 - j} \right)^2 = 2 \left(\frac{39 - 13j}{26} \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{3 - j}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (3 - j)^2 = \frac{1}{2} (8 - 6j) = \underline{\underline{4 - 3j}} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.18

$$\frac{5 + 5j}{4 + 3j}$$

1.4 Konjugiert-komplexe Zahlen

In den Anwendungen treten komplexe Zahlen meistens paarweise auf, als sogenannt konjugiert-komplexes Zahlenpaar.

Definition 1.4 (Konjugiert-komplexe Zahlen) Sei z eine komplexe Zahl der Form

$$z = x + jy$$

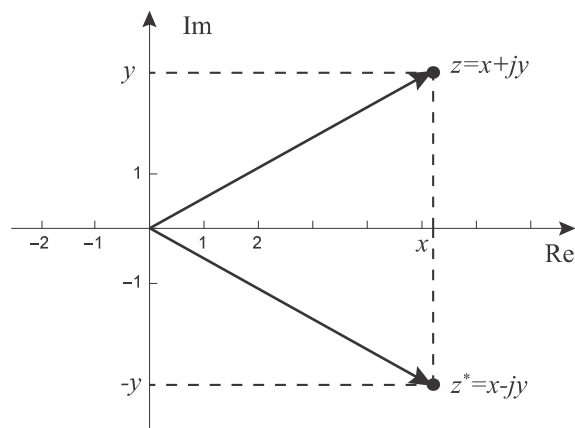
Dann heisst z^* mit

$$z^* = x - jy$$

die zu z konjugiert-komplexe Zahl.

Bemerkungen:

1. Die Zahl z^* hat also den gleichen Realteil wie z , aber den entgegengesetzten Imaginärteil.
2. Anstatt z^* wird oft auch \bar{z} geschrieben.
3. Geometrisch erhält man z^* aus z durch Spiegelung an der reellen Achse.



Aufgabe 1.19 Berechne in der folgenden Tabelle z^* .

z	z^*
$-2 + 7j$	$-2 - 7j$
$3 - 2j$	
$3 + 2j$	
j	
2	
$R - j\omega$	

Aufgabe 1.20 Für eine bestimmte Zahl z gelte

$$z = z^*.$$

Was ist z für eine Zahl?

z ist eine reelle Zahl. Aus

$$x + jy = x - jy$$

folgt, dass diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn $y = 0$ ist.

Aufgabe 1.21 Berechne alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16} = \underline{\underline{3 \pm 2j}}$$

Merke:

Falls eine Polynomgleichung mit reellen Koeffizienten eine komplexe Lösung z hat, dann ist z^* immer auch eine Lösung der Gleichung.

D.h. als Lösungen von reellen Polynomgleichungen treten die konjugiert-komplexen Zahlen z und z^* immer gemeinsam auf.

Der Grund dazu ist, dass das Produkt $z \cdot z^*$ immer eine reelle positive Zahl ist (das Betragsquadrat $|z|^2$, siehe nächstes Kapitel).

Aufgabe 1.22 Berechne $z \cdot z^*$:

a)

$$z = 5 + 2j$$

b)

$$z = x + jy$$

a) $z = 5 + 2j$

$$z \cdot z^* = (5 + 2j)(5 - 2j) = 25 + 4 = \underline{\underline{29}}$$

b) $z = x + jy$

$$z \cdot z^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 + jxy - jxy + y^2 = \underline{\underline{x^2 + y^2}}$$

1.5 Der Betrag einer komplexen Zahl

Definition 1.5 Der Betrag der komplexen Zahl $z = x + jy$ ist

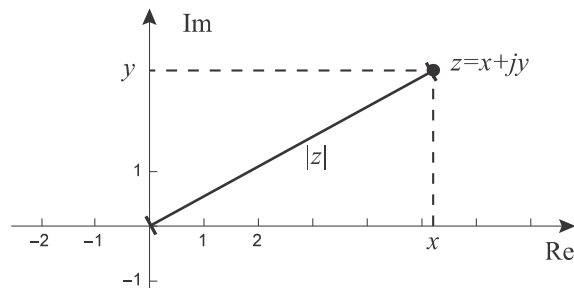
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Bemerkungen:

1. Der Betrag ist immer eine reelle Zahl und immer grösser oder gleich Null.

Achtung: Die Zahl j gehört nicht zum Imaginärteil und fliesst nicht in den Betrag ein!

2. Geometrisch ist der Betrag $|z|$ der Abstand des Punktes z zum Punkt 0 in der Gauss'schen Zahlenebene:



Aufgabe 1.23 Berechne die Beträge der folgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} z_1 &= -2 + 3j & z_2 &= 3 - 4j & z_3 &= 0.01(3 - 4j) \\ z_4 &= j & z_5 &= -2 & z_6 &= R - j\omega \end{aligned}$$

$$|z_1| = \sqrt{4 + 9} = \underline{\underline{\sqrt{13}}} \quad |z_2| = \sqrt{9 + 16} = \underline{\underline{5}} \quad |z_3| = 0.01 \cdot |3 - 4j| = \underline{\underline{0.05}}$$

$$|z_4| = \underline{\underline{1}} \quad |z_5| = \underline{\underline{2}} \quad |z_6| = \underline{\underline{\sqrt{R^2 + \omega^2}}}$$

Satz 1.1 Für alle komplexen Zahlen z, z_1, z_2 gilt:

(a) $z \cdot z^* = |z|^2$

(b) Falls $|z| = 0$, dann ist $z = 0$

(c) $|z| = |-z| = |z^*|$

(d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

1.6 Lösen von Gleichungen in der kartesischen Form

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl ihr Realteil, wie auch ihr Imaginärteil gleich sind. Deshalb stecken in einer Gleichung mit komplexen Zahlen eigentlich zwei Gleichungen: Eine für je den Real- und den Imaginärteil der Gleichung.

Aufgabe 1.24 *Berechne die Lösungen der Gleichung*

$$z + 2 = \frac{1}{j} - 2z^*.$$

Setze zu diesem Zweck $z = x + jy$ ein.

Für $z = x + jy$ erhält man:

$$x + jy + 2 = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} - 2(x - jy)$$

$$x + jy + 2 = -j - 2x + 2jy$$

$$(x + 2) + jy = -2x + j(-1 + 2y)$$

Vergleichen der Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung liefert:

$$Re : \quad (x + 2) = -2x$$

$$Im : \quad y = -1 + 2y$$

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich:

$$3x = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x = -\frac{2}{3}}}$$

$$-y = -1 \Rightarrow \underline{\underline{y = 1}}$$

und daraus die Lösung für z :

$$\underline{\underline{z = -\frac{2}{3} + j}}$$

Aufgabe 1.25 *Berechne die Lösungen der Gleichung*

$$z \cdot z^* + j \cdot \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(z^*) = 7 + 4j + 2\operatorname{Im}(z)$$