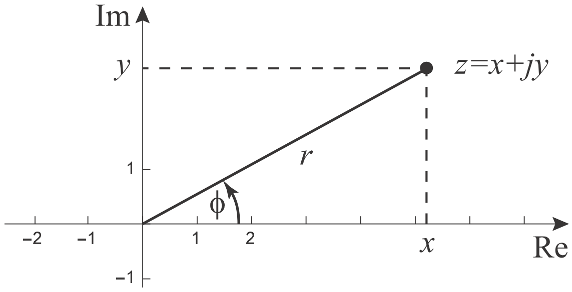
Kapitel 2

Exponentialform komplexer Zahlen

2.1 Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

In einer zweidimensionalen Ebene kann man Punkte mithilfe von verschiedenen Koordinatensystemen anschreiben. Wir sind uns gewohnt, in einem kartesischen Koordinatensystem[1] zu rechnen. Andere Koordinaten, welche in der Technik häufig benutzt werden, beziehen sich auf die Charakteristik eines Kreises, und heissen deswegen Polarkoordinaten oder Kreiskoordinaten. Zur eindeutigen Lokalisation eines Punktes werden dabei anstatt x- und y-Koordinaten die beiden Grössen **Radius** r und **Winkel** φ zwischen Punkt und positiver x- Achse in der Gauss'schen Zahlenebene angegeben:



Radius r: Ist immer positiv: $r \geq 0$.

Winkel φ: Ist nur bestimmt bis auf ein Vielfaches von 2π.

Beispiel: Der Punkt mit $r = 2$ und $\varphi = \pi$ ist derselbe Punkt wie der Punkt mit $r = 2$ und $\varphi = 3\pi$.

[1] Nach Rene Descartes, 1596-1650

Satz 2.1 (Umrechnen von Polar- zu kartesischen Koordinaten)

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Satz 2.2 (Umrechnen von kartesischen zu Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \textit{falls } x > 0; \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \textit{falls } x < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \textit{falls } x = 0 \textit{ und } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \textit{falls } x = 0 \textit{ und } y < 0; \\ \textit{n.def.}, & \textit{falls } x = 0 \textit{ und } y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Setzt man nun $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ in die kartesische Form einer komplexen Zahl ein, erhält man:

$$z = x + jy = r\cos(\varphi) + jr\sin(\varphi) = r\left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right)$$

Definition 2.1 (Trigonometrische Form einer komplexen Zahl)

$$z = r\left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right)$$

*heisst die **trigonometrische Form** einer komplexen Zahl.*

Dabei ist:

$r = |z|$*: ist reell und positiv oder Null.*

$\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$*: eine komplexe Zahl mit Radius 1 und Winkel* φ*.*

Die trigonometrische Form wird meist nur als Übergang von der kartesischen zur Exponentialform benutzt.

Aufgabe 2.1 *Berechne Radius und Winkel der folgenden komplexen Zahlen.*

a) Von Hand.

b) Mit Taschenrechner / Matlab.

a)

$z_1 = 2j$	$r_1 = 2$	$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$
$z_2 = 2 + 2j$	$r_2 = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$	$\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$
$z_3 = -2 + 2j$	$r_3 =$	$\varphi_3 =$
$z_4 = -3$	$r_4 =$	$\varphi_4 =$

b)

$z_1 = 2 + 4j$	$r_1 = \sqrt{16+4} \simeq 4.47$	$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) \simeq 1.11 = 63.44°$
$z_2 = -5 + 2j$	$r_2 =$	$\varphi_2 =$

2.2 Formel von Euler und die Definition der Exponentialform

Die Taylor-Reihen von exp, sin und cos lauten (siehe Mathematik 1):

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \end{aligned}$$

Setzt man in e^x an Stelle der reellen Zahl die imaginäre Zahl $j\varphi$ ein, erhält man

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \frac{(j\varphi)^7}{7!} + ... \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + ...\right) + j\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + ...\right) \\ &= \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Diese berühmte und sehr wichtige Beziehung heisst Formel von Euler.[2]

Satz 2.3 (Formel von Euler)

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

[2]Leonhard Euler, 1707-1783

Als Spezialfall erhält man für $\varphi = \pi$:

Satz 2.4 (Euler'sche Beziehung)

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

Diese Formel ist zu ihrer Zeit sehr berühmt geworden, da sie alle elementaren Zahlen $0, 1, e, \pi$ und j in eine direkte Beziehung setzt.

Mit der Formel von Euler kann die trigonometrische Form direkt in die Exponentialform umgewandelt werden:

Definition 2.2 (Exponentialform einer komplexen Zahl)

$$\begin{aligned} z &= x + jy && \textbf{Kartesische Form von } z \\ &= r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) && \textbf{Trigonometrische Form von } z \\ &= r \cdot e^{j\varphi} && \textbf{Exponentialform von } z \end{aligned}$$

Beachte:

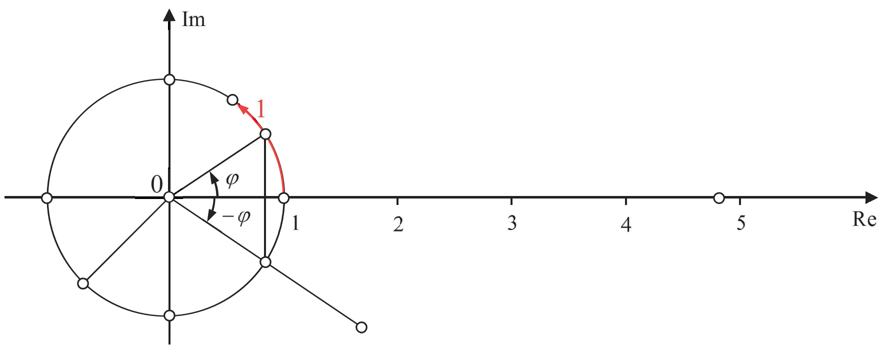
$$\left|e^{j\varphi}\right| = |\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

Wichtig: $e^{j\varphi}$ ist die komplexe Zahl mit Betrag 1 und Winkel φ.

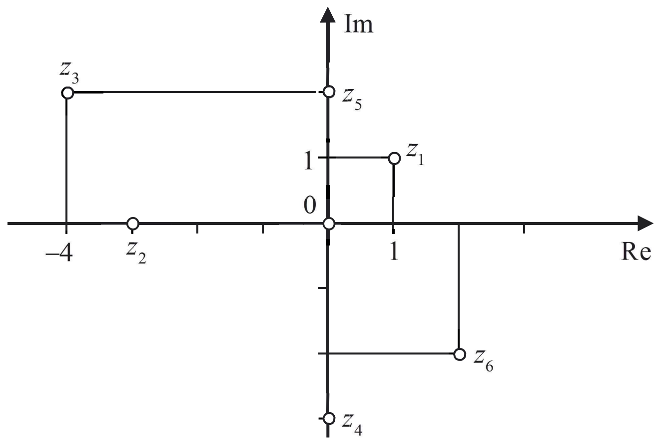
Aufgabe 2.2 *Schreibe jede der Zahlen*

$$e^{j\varphi}, e^{-j\varphi}, 2e^{-j\varphi}, e^{j\frac{\pi}{2}}, e^{-j\frac{\pi}{2}}, e^{-j\frac{3\pi}{4}}, e^{j\pi}, e^{-j\pi}, e^{\frac{\pi}{2}}, e^{j}, e^{j\cdot 0}$$

neben den zugehörigen Punkt in der folgenden komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 2.3 *Schreibe die folgenden Zahlen sowohl in der kartesischen Form $x + jy$ als auch in der Exponentialform $r \cdot e^{j\varphi}$.*



$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \\
z_2 &= -3 = 3 \cdot e^{j\pi} \\
z_3 &= -4 + 2j = \sqrt{2} \cdot \exp\left[j\left(\arctan\left(\frac{2}{-4}\right) + \pi\right)\right] \simeq 1.41 \cdot e^{j \cdot 2.68} \\
z_4 &= \\
z_5 &= \\
z_6 &=
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.4 *Berechne*

$$z = 3 \cdot e^{j\pi} + 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

In der Exponentialform können komplexe Zahlen nicht addiert werden. Dazu muss man sie erst in die kartesische Form umrechnen. Mit

$$3 \cdot e^{j\pi} = -3, \qquad 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j, \qquad \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = 1 - j$$

erhält man

$$z = -3 + 2j + 1 - j = \underline{\underline{-2 + j}}$$

Der grosse Vorteil der Exponentialform zeigt sich erst bei der Multiplikation und dem Potenzieren von komplexen Zahlen.

2.3 Rechenoperationen in der Exponentialform

Die Rechenoperationen Multiplikation, Division und Potenz sind in der Exponentialform viel einfacher auszuführen: Man muss nur die drei Potenzregeln kennen:

1. $$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

2. $$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

3. $$(e^a)^n = e^{n \cdot a}$$

   Hier: Gilt nur für $n \in \mathbb{Z}$

Multiplikation in der Exponentialform

Satz 2.5

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

Aufgabe 2.5 *Berechne*

a)

$$3e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot 7e^{j\frac{\pi}{3}}$$

b)

$$2.3e^{0.86j} \cdot 2e^{1.04j}$$

a)

$$3e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot 7e^{j\frac{\pi}{3}} = 3 \cdot 7 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 21 \cdot e^{j\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = 21e^{j\frac{9\pi+4\pi}{12}} = \underline{\underline{21e^{j\frac{13\pi}{12}}}}$$

b)

$$2.3e^{0.86j} \cdot 2e^{1.04j} = \underline{\underline{4.6e^{1.9j}}}$$

Man kann sich nun fragen, was eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl bedeutet:

Aufgabe 2.6 *Berechne das Produkt*

$$j \cdot (1 + j)$$

einmal in der kartesischen Form und einmal in der Exponentialform.

Was ist die geometrische Bedeutung einer Multiplikation mit j?

Kartesische Form:

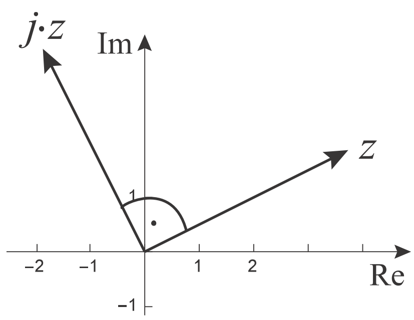
$$j \cdot (1 + j) = j - 1 = \underline{\underline{-1 + j}}$$

Exponentialform:

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}, \qquad 1 + j = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$j \cdot (1 + j) = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2} e^{j\frac{3\pi}{4}}}}$$

Bedeutung der Multiplikation einer komplexen Zahl z mit j: Drehung der Zahl z um $\frac{\pi}{2} = 90°$ in der Gauss'schen Zahlenebene.



Aufgabe 2.7

$$a = k e^{j\alpha}, \qquad z = 2 e^{j2.1}$$

Berechne $a \cdot z$. Was ist die geometrischen Bedeutung der Multiplikation mit einer komplexen Zahl a?

$$a \cdot z = k e^{j\alpha} \cdot 2 e^{j2.1} = \underline{\underline{2k \cdot e^{j(2.1+\alpha)}}}$$

Eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl a bedeutet eine **Drehstreckung**. Der Radius wird um einen Faktor $k = |a|$ gestreckt, und der Winkel um α gedreht.

Division in Exponentialform

Satz 2.6

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Winkel subtrahiert.

Aufgabe 2.8 *Berechne*

a)

$$\frac{8e^{j\frac{\pi}{4}}}{4e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

b)

$$\frac{4.8e^{1.74j}}{2e^{1.12j}}$$

a)

$$\frac{8e^{j\frac{\pi}{4}}}{4e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{8}{4} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = \underline{\underline{2e^{-j\frac{\pi}{4}}}}$$

b)

$$\frac{4.8e^{1.74j}}{2e^{1.12j}} = \underline{\underline{2.4e^{0.62j}}}$$

Potenzen komplexer Zahlen

Satz 2.7 *Sei $n \in \mathbb{Z}$:*

$$z^n = \left(re^{j\varphi}\right)^n = r^n e^{jn\varphi}$$

Aufgabe 2.9 *Berechne*

a)

$$\left(2e^{j\frac{\pi}{6}}\right)^3$$

b)

$$\left(1.2e^{0.2j}\right)^2$$

a)

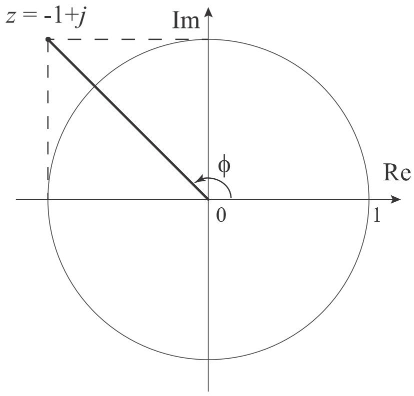
$$\left(2e^{j\frac{\pi}{6}}\right)^3 = 2^3 \cdot e^{j3\cdot\frac{\pi}{6}} = \underline{\underline{8e^{j\frac{\pi}{2}}}}$$

b)

$$\left(1.2e^{0.2j}\right)^2 = \underline{\underline{1.44e^{0.4j}}}$$

Aufgabe 2.10 *Es sei $z = -1 + j$. Berechne z^6.*

Schreibe zu diesem Zweck z in Exponentialform.



$$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \varphi = \frac{3\pi}{4}, \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$z^6 = \sqrt{2}^6 e^{j6\cdot\frac{3\pi}{4}} = 2^3 e^{j\frac{9\pi}{2}} = 8e^{j\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{8j}}$$

Aufgabe 2.11 *Bestimme die kartesische Form der Zahl*

$$z = \frac{(2j)^5}{(2-2j)^2}.$$

Schreibe dazu $2j$ und $2-2j$ in Exponentialform.

2.4 Lösungen der Gleichung $z^n = c$

Wenn eine Gleichung in Exponentialform vorliegt, kann man daraus wie im Kapitel 1.6 zwei Gleichungen machen, indem man auf beiden Seietn der Gleichung die Beträge und die Winkel vergleicht.

Wichtig: Dabei muss man berücksichtigen, dass die Winkel nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt sind.

Aufgabe 2.12 *Berechne alle Lösungen der Gleichung*

$$z^3 = -8j.$$

Vorgehen: Schreibe z und $-8j$ in der Exponentialform.

Mit

$$z = re^{j\varphi}, \qquad \text{und} \qquad -8j = 8e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

erhalten wir die Gleichung

$$r^3 e^{j3\varphi} = 8e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

Vergleichen der Beträge und Winkel links und rechts der Gleichung.

Beträge:

$$r^3 = 8$$

Winkel: Achtung, auf der rechten Seite muss $+k2\pi$ addiert werden!

$$3\varphi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$r = \sqrt[3]{8} = 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$$

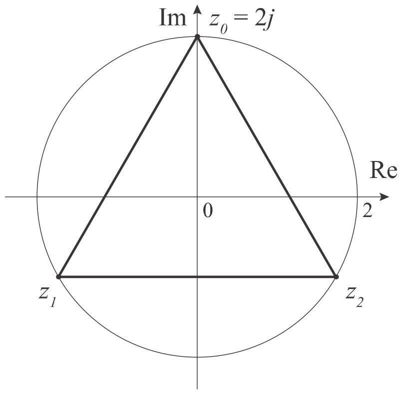
Die Lösungen für z sind also

$$\underline{\underline{z_k = 2e^{j\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\right)}}}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Wie viele dieser Lösungen sind nun verschieden? Wir erhalten

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j \\
z_1 &= 2e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{j\frac{7\pi}{6}} \\
z_2 &= 2e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{j\frac{11\pi}{6}} = 2e^{-j\frac{\pi}{6}} \\
z_3 &= 2e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{3}\right)} = 2e^{j\frac{\pi}{2}+2\pi} = z_0
\end{aligned}$$

Die Gleichung $z^3 = -8j$ hat also genau 3 verschieden Lösungen. Die Lösungen bilden in der Gauss'schen Zahlenebene ein regelmässiges Dreieck auf dem Kreis mit Radius $r = 2$:



Aufgabe 2.13

$$z^4 = -1$$

$$z = re^{j\varphi}, \qquad \text{und} \qquad -1 = e^{j\pi}$$

$$r^4 e^{j4\varphi} = e^{j\pi}$$

Vergleichen der Beträge und Winkel links und rechts der Gleichung.

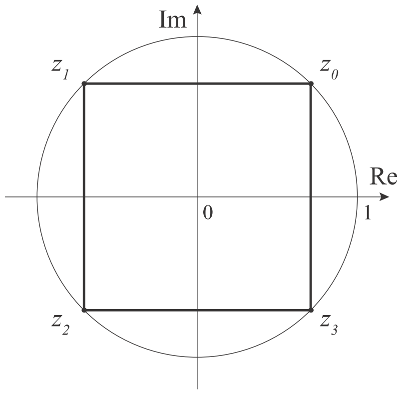
$$r^4 = 1 \qquad\qquad 4\varphi = \pi + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Lösungen:

$$\underline{\underline{r = 1}} \qquad\qquad \underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}}$$

$$\underline{\underline{z_k = e^{j\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}}}, \qquad\qquad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Die 4 verschiedenen Lösungen liegen auf einem regelmässigen Viereck mit Radius $r = 1$:



Man kann die Lösungen nun auch noch in kartesischer Form angeben:

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j \\
z_1 &= e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{j\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j \\
z_2 &= e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = 2e^{j\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j \\
z_3 &= e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = 2e^{j\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j
\end{aligned}$$

Satz 2.8 *Die Gleichung*

$$z^n = c, \qquad \text{mit} \quad z, c \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}$$

hat genau n verschiedene Lösungen. Mit

$$c = |c| \cdot e^{j\gamma}$$

sind die n Lösungen von der Form

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \cdot e^{j\left(\frac{\gamma}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}, \qquad \text{mit} \quad k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Hauptast der Lösung, Definition der n-ten Wurzel

Falls der Winkel γ der Zahl c auf der rechten Seite der Gleichung zwischen 0 und 2π liegt, nennt man die Lösung z_0 den **Hauptast** (engl: main root) der komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = c$.

Diesen Hauptast verwendet man zur Definition der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl. So gilt für die Aufgabe 2.12:

$$\sqrt[3]{-8j} = 2j$$

und für die Aufgabe 2.13:

$$\sqrt[4]{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

Diese Definition bringt oftmals etwas Verwirrung, wenn es um ungerade Wurzeln von negativen Zahlen geht. Die meisten Mathematikprogramme rechnen per default in der Menge der komplexen Zahlen, so auch Matlab. In Matlab erhält man

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = 0.5000 + 0.8660j.$$

Wie ist das zu erklären?

Es geht hier um die Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -1.$$

Die Zahl -1 ist in Exponentialform

$$-1 = 1 \cdot e^{j\pi}.$$

Nun nimmt man für den Hauptast die 3. Wurzel des Radius und teilt den Winkel durch 3, also

$$z_0 = 1e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \simeq 0.5 + 0.866j.$$

Die für uns gewohnte einzige Lösung in den reellen Zahlen ist in dieser Konstruktion z_1 und entspricht nicht dem Hauptast der Lösungen.