

**ETH**

**EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH**

**Berichte über Mathematik und Unterricht  
Herausgeber: U. Kirchgraber**

**Bericht No. 89-01  
November 1989**

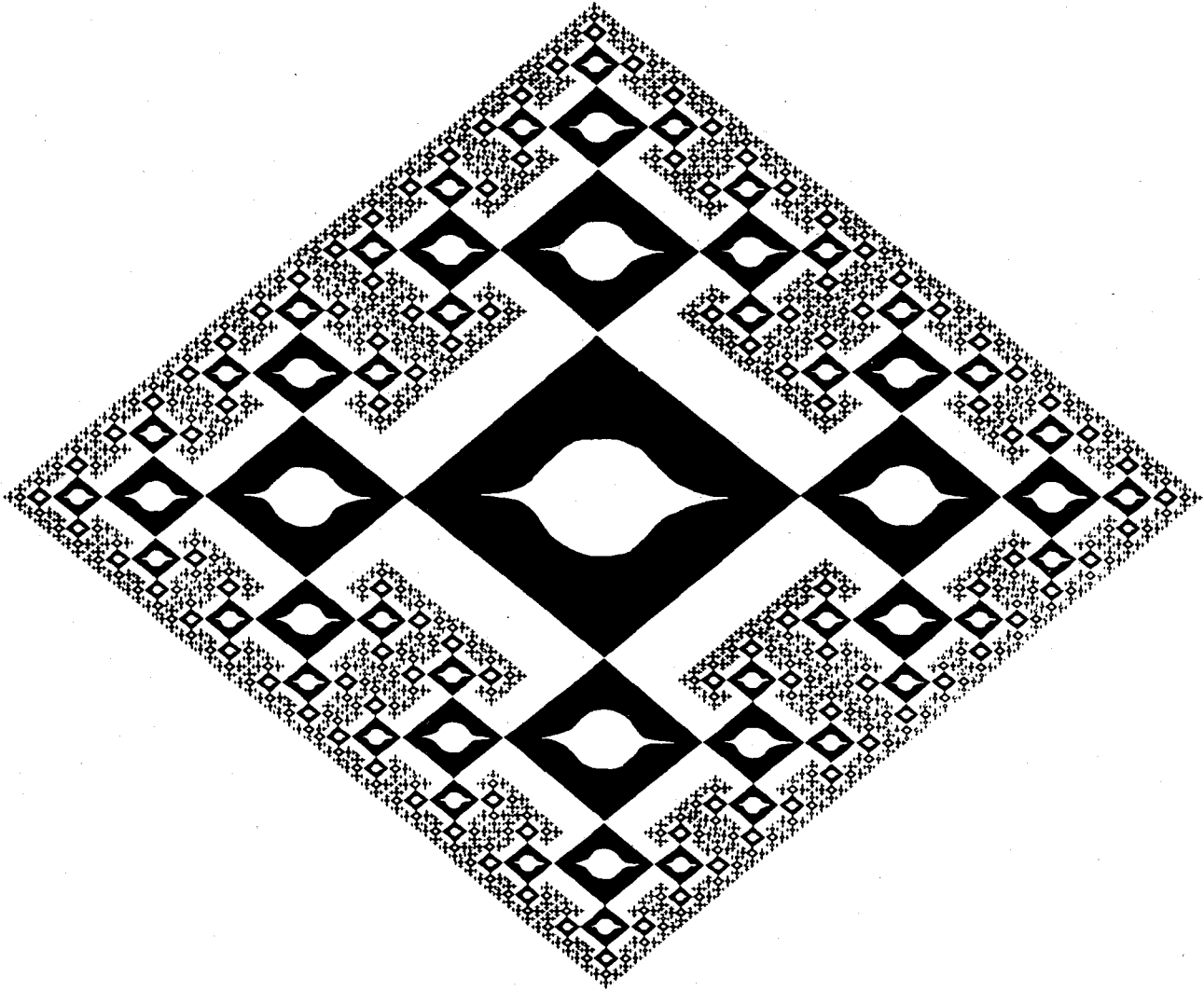
# **Fraktale**

**von Hans Walser, Frauenfeld**

**Eidgenössische Technische Hochschule  
CH - 8092 Zürich**

Hans Walser

Fraktale



ETH Zürich

Seminar über Mathematik und Unterricht

Wintersemester 1989/90

## 1. Einleitung

Der von MANDELBROT [5] geprägte Begriff des *Fraktals* hat in den vergangenen zehn Jahren eine grosse Verbreitung gefunden; jedem Hobby-Programmierer ist mittlerweile das Beispiel der *Mandelbrotmenge* bekannt. Ich möchte im folgenden der Frage nachgehen, wie weit dieser Begriff in den Schulunterricht - auch ausserhalb des Informatikunterrichtes - eingebunden werden kann.

Die meisten fraktalen Illustrationen in diesem Text sind Schülerarbeiten aus der Projektwoche *Fraktale* vom 19.-24.6.1989 der Kantonsschule Frauenfeld.

## 2. Fragen

Ich möchte mit einigen zum Teil bereits "klassisch" gewordenen Fragen zum Nachdenken anregen.

### 2.1. Wieviele Kurven hat die Gotthardstrasse ?

Diese Frage wurde vom bekannten Kartographen Eduard IMHOF für die alte Tremola-Strasse aufgeworfen. Auf der Strecke "Passo del S'Gottardo - Airolo" findet man

Karte	Anzahl Kurven
1:100 000, Blatt 42, Oberwallis	50
1:50 000, Blatt 265, Nufenenpass	81
1:25 000, Foglio 1251, Val Bedretto	104
1:1, Realität	?

Kommen bei jeder Vergrösserung neue Kurven zum Vorschein?

### 2.2. Hat es in der Schweiz mehr Berge oder mehr Seen ?

Diese Frage verlangt eine Definition von "Berg" und "See". Welches relative Höhenmaximum soll noch als "Berg", welches relative Höhenminimum noch als "See" erfasst werden? Ein Quadratmeter gepflügter Ackerboden ist - bei entsprechender Vergrösserung - eine wilde Gebirgslandschaft mit einem eigenen hydrographischen System und kann durchaus der Alpenregion ähnlich sein. Diese Ähnlichkeit eines Teils mit dem Ganzen - die sogenannte *Selbstähnlichkeit* - ist ein wesentliches Merkmal eines Fraktals.

### 2.3. Wie lang ist die Küste Britanniens ?

Dies ist eine "klassische" Frage in der Geschichte der Fraktale. Auf einer groben Karte mit grossem Massstab sind nur die wichtigsten Ein- und Ausbuchtungen eingezeichnet. Die auf Grund einer solchen Karte gemessene und mit dem Massstabs-Faktor umgerechnete Küstenlänge ist daher kleiner als die Küstenlänge, die sich auf Grund einer feineren Karte mit mehr eingezeichneten Ein- und Ausbuchtungen ergibt. Auch die "natürliche" Küstenlinie ist nicht klar definierbar, selbst bei stillstehendem Wasser. Jede Felsnase verlängert die Küstenlinie, jeder halb im Wasser liegende Stein am Fusse dieser Felsnase fügt einen weiteren Bogen hinzu, der Moosfetzen auf diesem Stein kann die Küstenlinie nochmals verlängern.

### 2.4. Die Schneeflocke von Helge VON KOCH

Dieses Beispiel ist eine geometrische Modellierung des durch die Frage nach der Länge der Küstenlinie aufgeworfenen Problems. Die Kernidee besteht darin, jedes gerade Küstenstück mit einer dreiecksförmigen Ausbuchtung in der Mitte zu versehen (Fig. 2.4.1.).



Fig. 2.4.1.: Ausbuchtung in der Mitte

Startet man mit einem gleichseitigen Dreieck, erhält man durch die Ausbuchtungen der ersten Generation einen Sechszack-Stern, durch die Ausbuchtungen der zweiten Generation eine bereits kompliziertere Kurve usw. (Fig. 2.4.2.).

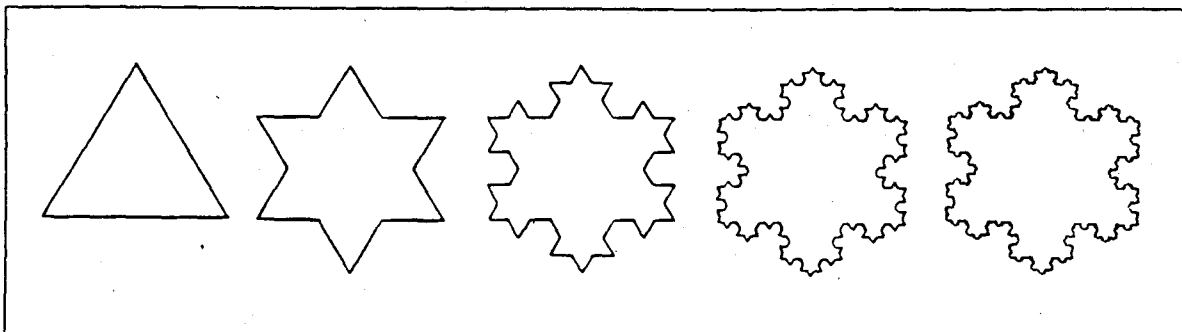


Fig. 2.4.2.: Genesis der KOCHschen Schneeflocke

Durch Iteration dieses Ausbuchtungsprozesses erhält man schliesslich die KOCHsche Schneeflocke (Fig. 2.4.3.).

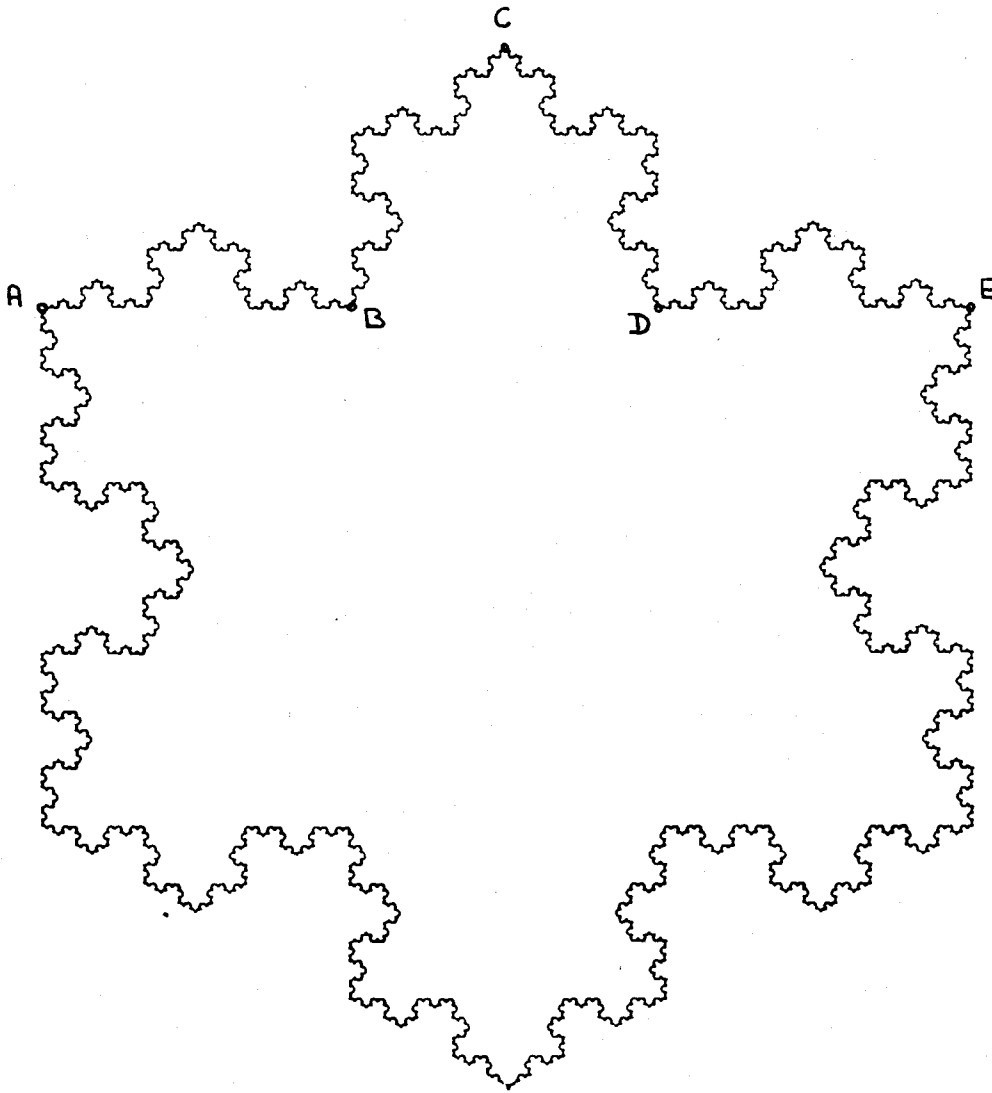


Fig. 2.4.3.: Die KOCHSche Schneeflocke

Wie gross ist nun der Umfang dieser Figur? Bei jedem Ausbuchtungsschritt wird der Umfang um einen Drittel vergrössert; er muss also mit jedem Ausbuchtungsschritt mit dem Faktor  $4/3$  multipliziert werden. Daher ist der Umfang der KOCHSchen Schneeflocke unendlich. Hingegen lässt sich leicht ausrechnen, dass der Flächeninhalt endlich ist.

Die Selbstähnlichkeit findet sich bei Teilstücken des Randes der KOCHSchen Schneeflocke. So ist etwa das Teilstück BC der Fig. 2.4.3. eine auf längenmässig einen Drittel verkleinerte Kopie des Teilstückes AE.

### 3. Verallgemeinerung der Selbstähnlichkeit

Bei der KOCHSchen Schneeflocke trafen wir eine Selbstähnlichkeit an, die durch eine *Drehstreckung* mit Streckfaktor  $< 1$  geleistet wird. Oft wird man aber allgemeinere Abbildungen zulassen müssen. Der hervorgehobenen Ausschnitt der Fig. 3.1. geht aus der

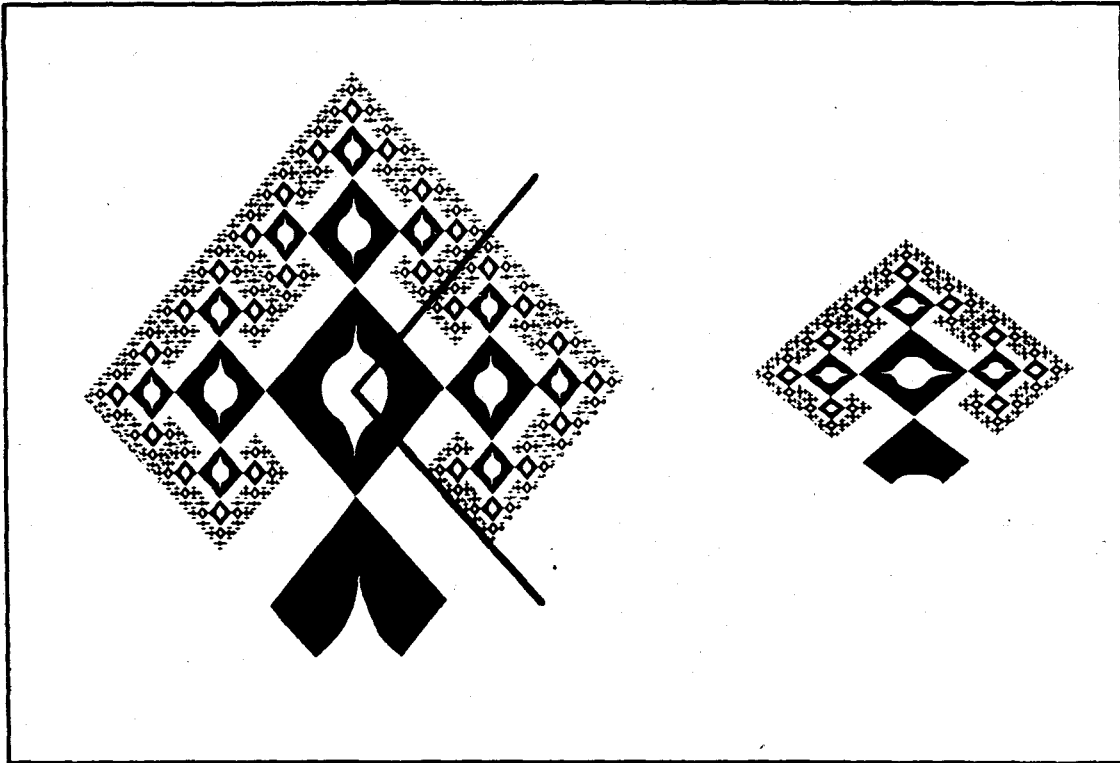


Fig. 3.1.: Selbstähnlichkeit mit einer allgemeineren Abbildung

Gesamtfigur durch eine *affine Transformation* hervor - aber auch dies nur, wenn man die Binnenzeichnung der Rhomben vernachlässigt. Wird diese mitberücksichtigt, kann man lediglich noch von einer *topologischen Abbildung* sprechen. Wir werden im folgenden sogar Beispiele antreffen, in denen die Selbstähnlichkeit nur noch darin besteht, dass ein Teilstück *dieselbe "Struktur" oder dieselbe "Funktion"* wie die Gesamtfigur hat.

## 4. Fraktale im Alltag

Die bisher vorgestellten Fraktal-Beispiele scheinen entweder recht gesucht oder dann rein mathematisch konstruiert zu sein. Die Frage ist, ob der Fraktal-Begriff auch ausserhalb der Mathematik relevant ist.

### 4.1. Fraktale in Natur und Technik

In Natur und Technik erscheinen Fraktale als "Austauschprofile". Man denke etwa an die komplizierten Aussenformen von Heizungskörpern oder Benzinmotoren: in beiden Fällen geht es darum, einen Wärmeaustausch durch eine möglichst grosse Oberfläche zu optimieren. Diese Austauschprofile sind Ansätze fraktaler Figuren. Ein weiteres Beispiel eines Austauschprofiles ist ein Entwässerungssystem (Fig. 4.1.1.).

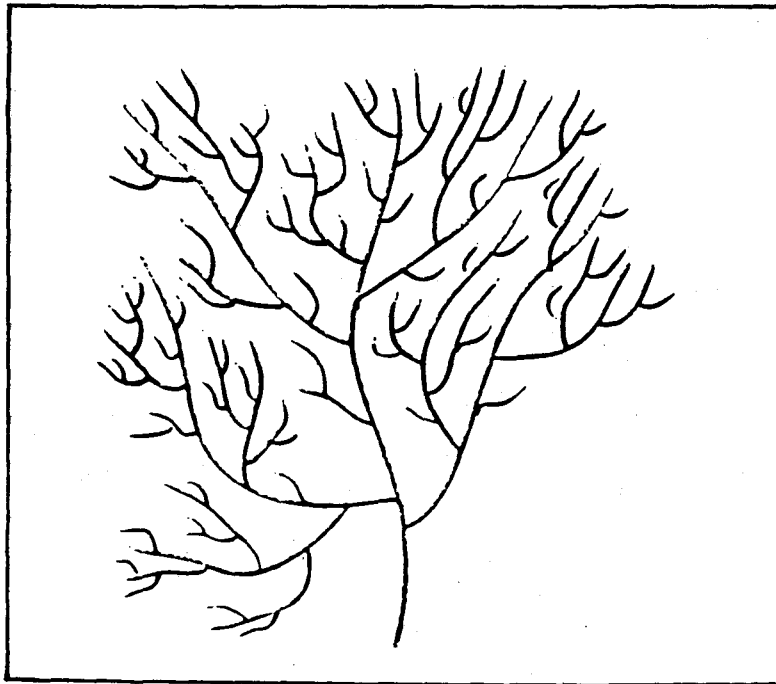


Fig. 4.1.1.: Entwässerungssystem

Ein Entwässerungssystem besteht in der Regel aus einem Hauptfluss, welcher Seitenflüsse aufnimmt. Jeder dieser Seitenflüsse ist seinerseits ein Entwässerungssystem mit eigenen Seitenzuflüssen und stellt als Ganzes eine verkleinerte "funktionelle" Kopie des ursprünglichen Entwässerungssystems dar. Verfolgt man ein solches Entwässerungssystem bis in die kleinsten Wässerchen und Rinnsale, muss man feststellen, dass es eine eigentliche Trennung zwischen Erde und Wasser gar nicht gibt. Der Schöpfungsbericht der Genesis:

"Und Gott sprach: Das Wasser unter dem Himmel sammle sich an einem Ort, dass das Trockene sichtbar werde! Und es geschah also." (1.Mos., 9)

muss also heute so interpretiert werden, dass an diesem dritten Schöpfungstag das Fraktal geschaffen wurde.

Als weitere Beispiele aus der Natur drängen sich auf:

Bäume mit ihren Verästelungen: Das Austauschprofil dient der Assimilation, dem Kohlendioxid-Sauerstoff-Austausch.

Die menschliche Lunge mit ihren Lungenbläschen: Das Austauschprofil dient der Dissimilation, dem Sauerstoff-Kohlendioxid-Austausch.

Aus der Technik stammt das Beispiel des Erschliessungsstrassen-Systems einer Wohnsiedlung: Das "Austauschprofil" dient dem Austausch zwischen Zivilisation und Natur.

Die Figur 4.1.2. zeigt ein Beispiel einer elektrischen Entladung; das Beispiel wurde mir vom Forschungslabor der ABB in Baden zur Verfügung gestellt.

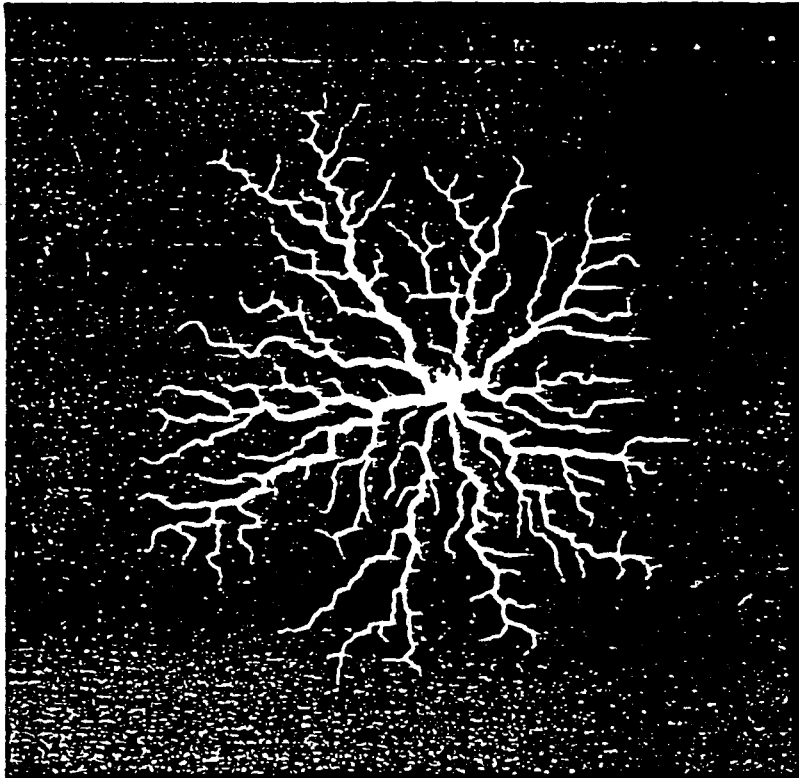


Fig. 4.1.2.: Elektrische Entladung



#### 4.2. Ein Beispiel aus der Kunst

Das wohl schönste Beispiel aus der Kunst sind die Masswerk-Fenster einiger gotischer Kathedralen; in der deutschen Gotik etwa die hochgotischen Fenster des sogenannten "Strassburger-Meisters" (in Strassburg, aber auch in Freiburg i. Br.). Das ursprüngliche Fenster wird in zwei Teilfenster unterteilt, jedes dieser Teilfenster wieder in zwei Teilfenster. Natürlich kann dieser Teilungsprozess in der Praxis nicht ad infinitum weitergeführt werden; ein nächster Unterteilungsschritt kann allenfalls noch in der Glasmalerei wahrgenommen werden. Die Figur 4.2.1. zeigt eine theoretische Weiterführung der Unterteilung bis ins Unendliche.

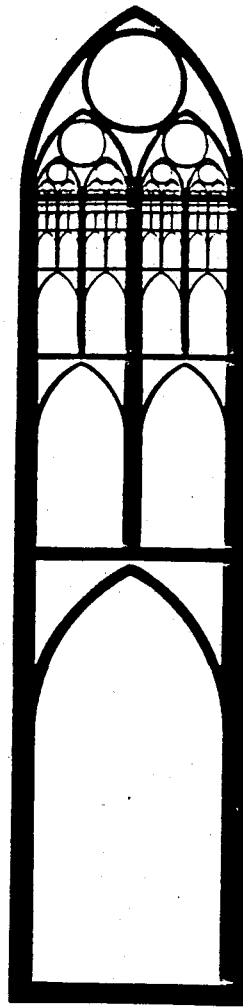


Fig. 4.2.1.: Fraktale Gotik

Die Figuren 4.2.2. und 4.2.3. zeigen West- und Ostfenster des Münsters von York; das Westfenster (1338) mit einer fortgesetzten Zweier-Unterteilung, das Ostfenster (1405-1408) gar mit einer fortgesetzten Dreier-Unterteilung.

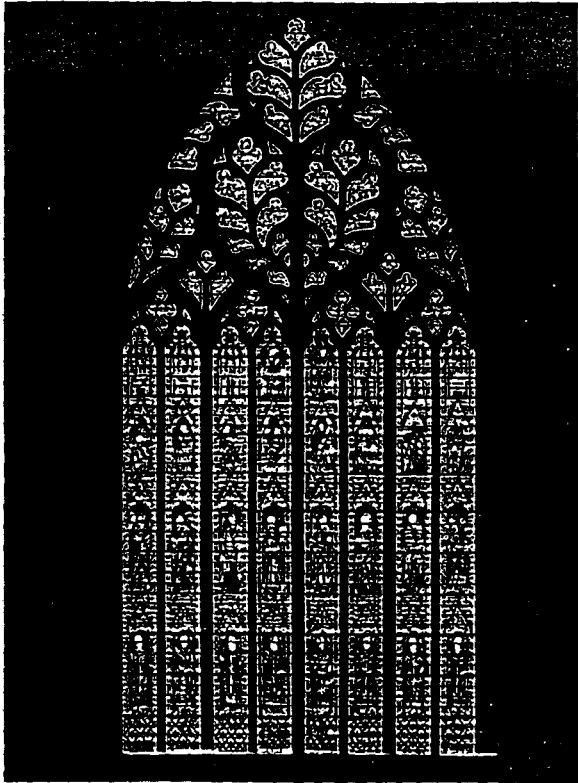


Fig. 4.2.2.: York: West-Fenster

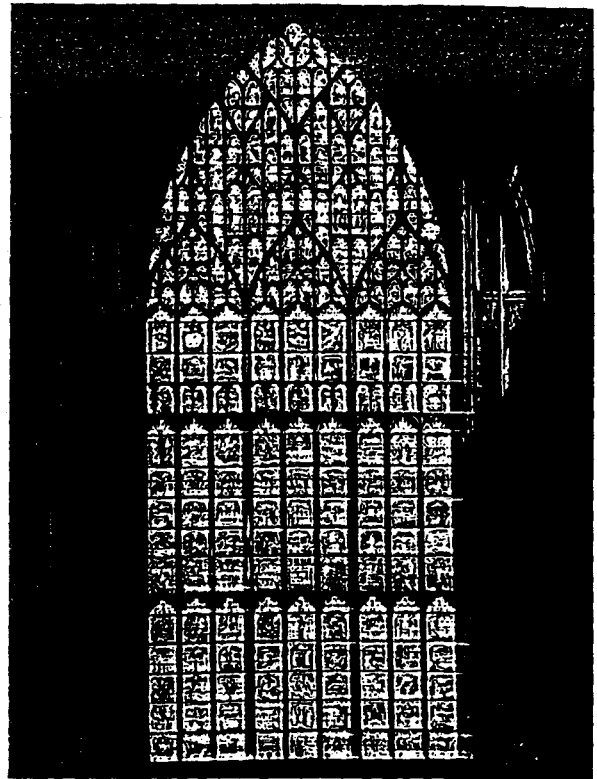


Fig. 4.2.3.: York: Ost-Fenster

#### 4.3. Bilder mit Zufalls-Charakter

In den Bildern der Fig. 4.3.1. und Fig. 4.3.2. sind die Teile nicht im geometrischen Sinne ähnlich oder affin zur Gesamtfigur; in der Fig. 4.3.1. zum Beispiel sind die Blätter zwar alle ähnlich, aber die Ansatzpunkte und -winkel der Teilfiguren variieren.

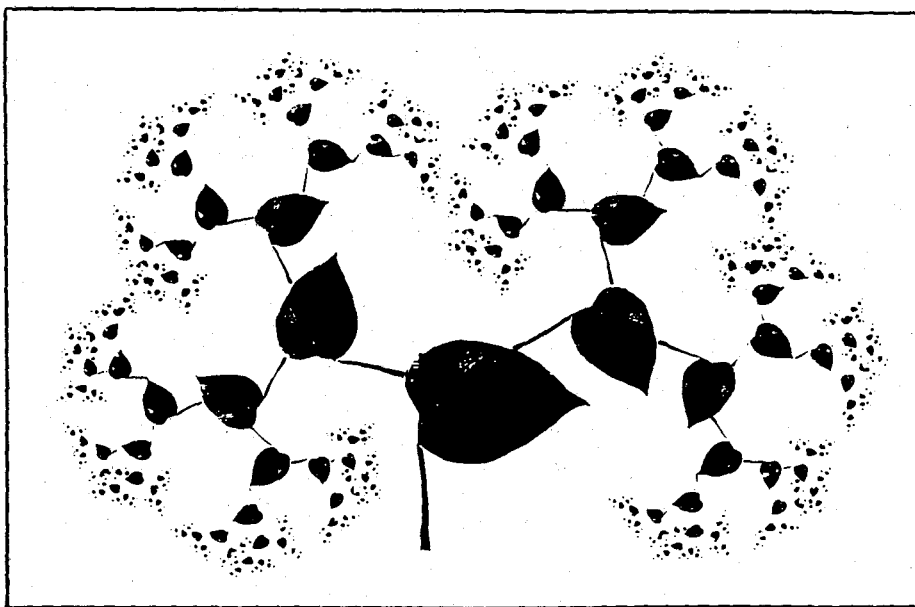


Fig. 4.3.1.: Blätter

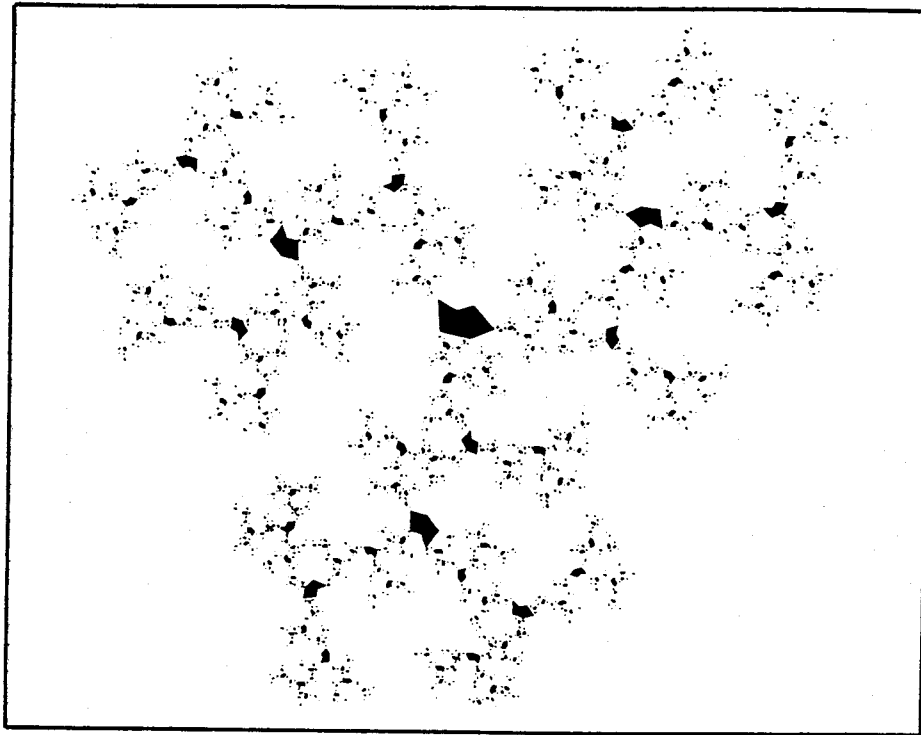


Fig. 4.3.2.: Dunst

#### 4.4. Auswirkungen auf Ausbildung und Unterricht ?

Im Schulunterricht wird immer noch eine Geometrie unterrichtet, welche im Wesentlichen auf Euklid zurückgeht. Entsprechend waren die naturwissenschaftlichen Erklärungsmodelle, zum Beispiel die Physik Newtons, an der euklidischen Geometrie orientiert.

Die Frage ist nun die, ob die Anwendung des Fraktalbegriffes zur geometrischen Beschreibung von Naturphänomenen auch Auswirkungen auf den Geometrie-Unterricht an Schule und Universität haben wird.

## 5. Beispiele aus dem Schulunterricht

### 5.1. Verschiedene Wege ins Unendliche

#### a) Geometrische Reihen

Der vom Schulunterricht her bekannte Einstieg ins "Unendliche" ist die Theorie der geometrischen Reihen und Folgen, die ich an einem einfachen Beispiel illustrieren möchte: Wir unterteilen ein gleichseitiges Dreieck in vier deckungsgleiche Teildreiecke und

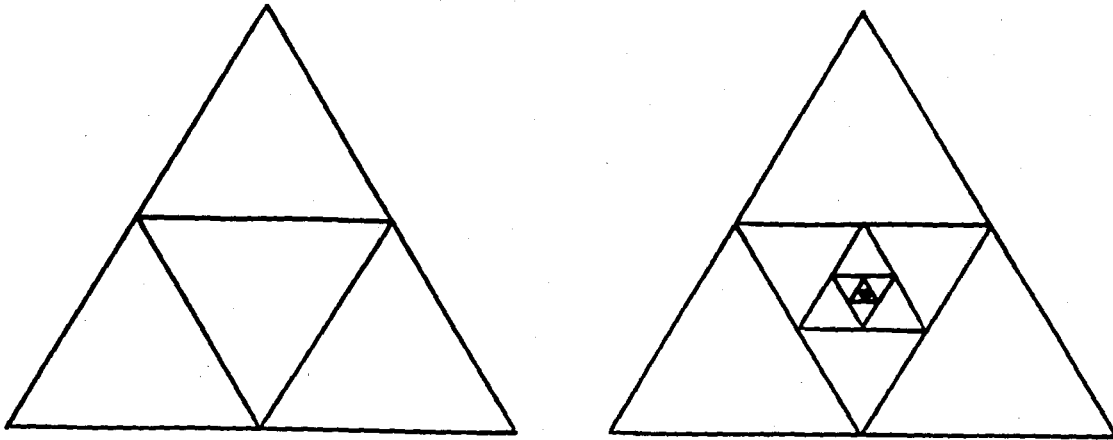


Fig. 5.1.1.: Unterteilung eines Dreieckes

unterteilen dann das mittlere Dreieck wieder in vier deckungsgleiche Teildreiecke usw. (Fig. 5.1.1.). Dadurch entsteht optisch der Eindruck eines Weges ins Unendliche.

In diesem Beispiel gibt es nur einen "Unendlichkeitspunkt", nämlich den Mittelpunkt des ursprünglichen Dreieckes. Dieser Punkt ist gleichzeitig ein Ähnlichkeitszentrum: Schrumpft man die Ausgangsfigur ABC längenmässig auf die Hälfte zusammen (Fig. 5.1.2.), so erhält man eine Figur, die als Ganzes mit einem Teil der Ausgangsfigur deckungsgleich ist; der Mittelpunkt ist der einzige Punkt, der bei dieser Operation festbleibt.

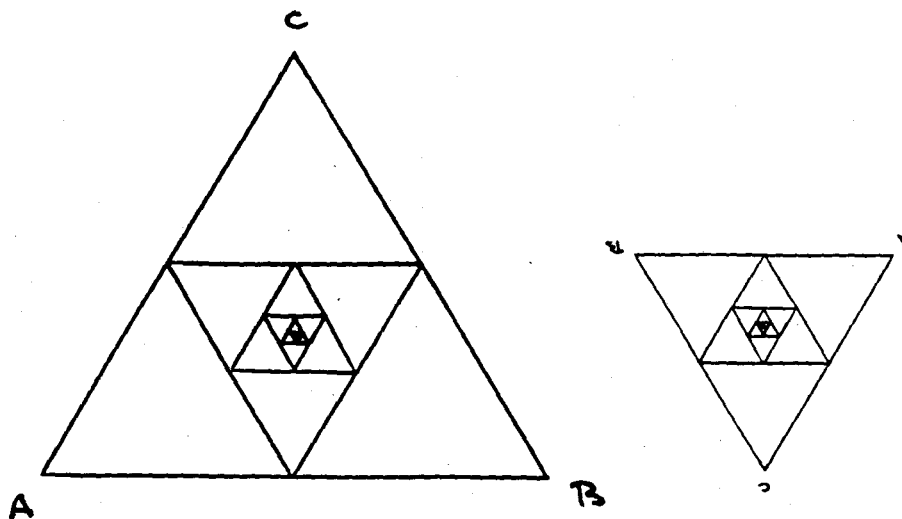


Fig. 5.1.2.: Der Mittelpunkt ist Ähnlichkeitszentrum

## b) Figuren mit mehreren Wegen ins Unendliche

Die optische Faszination, welche von solchen Figuren mit einem "Unendlichkeitsspunkt" ausgeht, hat immer auch zur Frage geführt, ob es Figuren mit mehreren Unendlichkeitsspunkten gibt.

Der holländische Graphiker Maurits Cornelis ESCHER (1898 - 1972) hat sich um solche Figuren bemüht und als Lösung das sogenannte "Kreislimit" (Fig. 5.1.3.) gefunden.

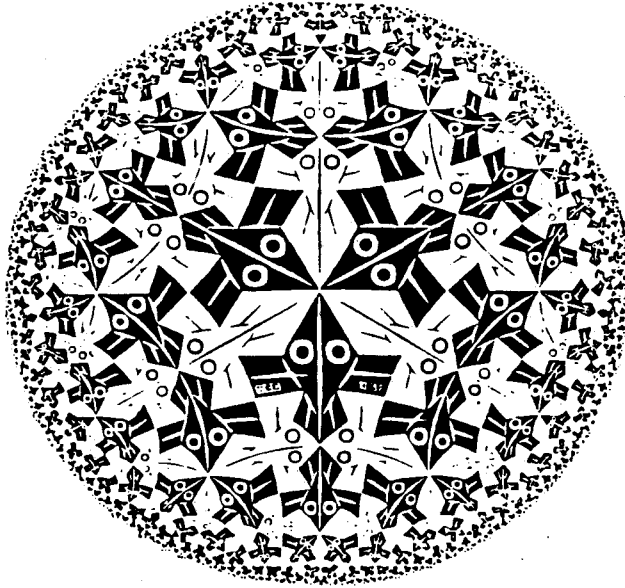


Fig. 5.1.3.: M.C.ESCHER: Kreislimit

Figuren dieser Art gehören zur sogenannten *hyperbolischen Geometrie*.

Eine viel einfachere Figur mit ebenfalls unendlich vielen Unendlichkeitsspunkten ergibt sich, wenn man in einem gleichseitigen Dreieck jeweils alle vier Teildreiecke weiter unterteilt (Fig. 5.1.4.).

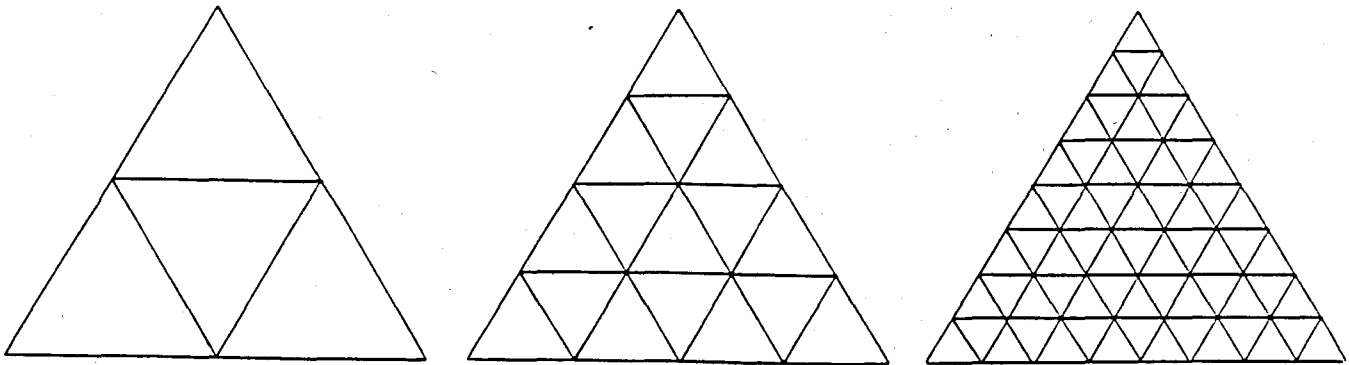


Fig. 5.1.4.: Unterteilung eines Dreieckes

Diese Figur ist allerdings nicht besonders interessant, sie ist etwa von der gleichen ästhetischen Qualität wie kariertes Papier und führt im Unendlichen zu einem grau ausgefüllten Dreieck. Eine schönere Figur erhält man jedoch, wenn man beim Unterteilen das jeweils mittlere Dreieck freilässt und nur die drei äusseren Dreiecke weiter unterteilt (Fig. 5.1.5.)

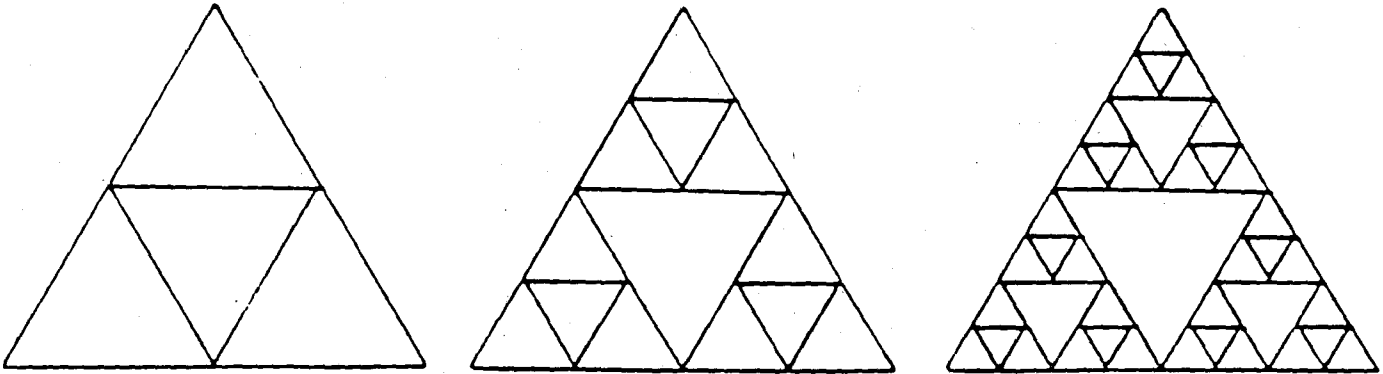


Fig. 5.1.5.: Das jeweils mittlere Dreieck wird freigelassen

Die Endfigur ist dann ein Fraktal, das sogenannte *SIERPINSKI-Dreieck* (Fig. 5.1.6.)

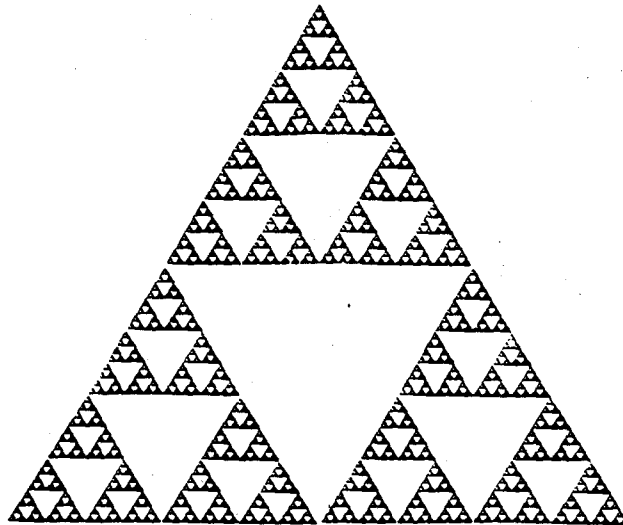


Fig. 5.1.6.: SIERPINSKI-Dreieck

Das SIERPINSKI-Dreieck enthält ebenfalls unendlich viele Unendlichkeitspunkte. Die auf halbe Länge verkleinerte Figur kann bereits an drei verschiedenen Orten der Ausgangsfigur eingepasst werden, die auf Viertellänge verkleinerte Figur gar an neun verschiedenen Orten.

## 5.2. Das PASCAL-Dreieck

Rechnet man die Binomialkoeffizienten des PASCAL-Dreieckes modulo 2 und markiert die beiden Werte 0 und 1 in einer geeigneten Darstellung mit zwei verschiedenen Farben, erhält man eine Figur, die "von weitem" an das SIERPINSKI-Dreieck erinnert (Fig. 5.2.1.)

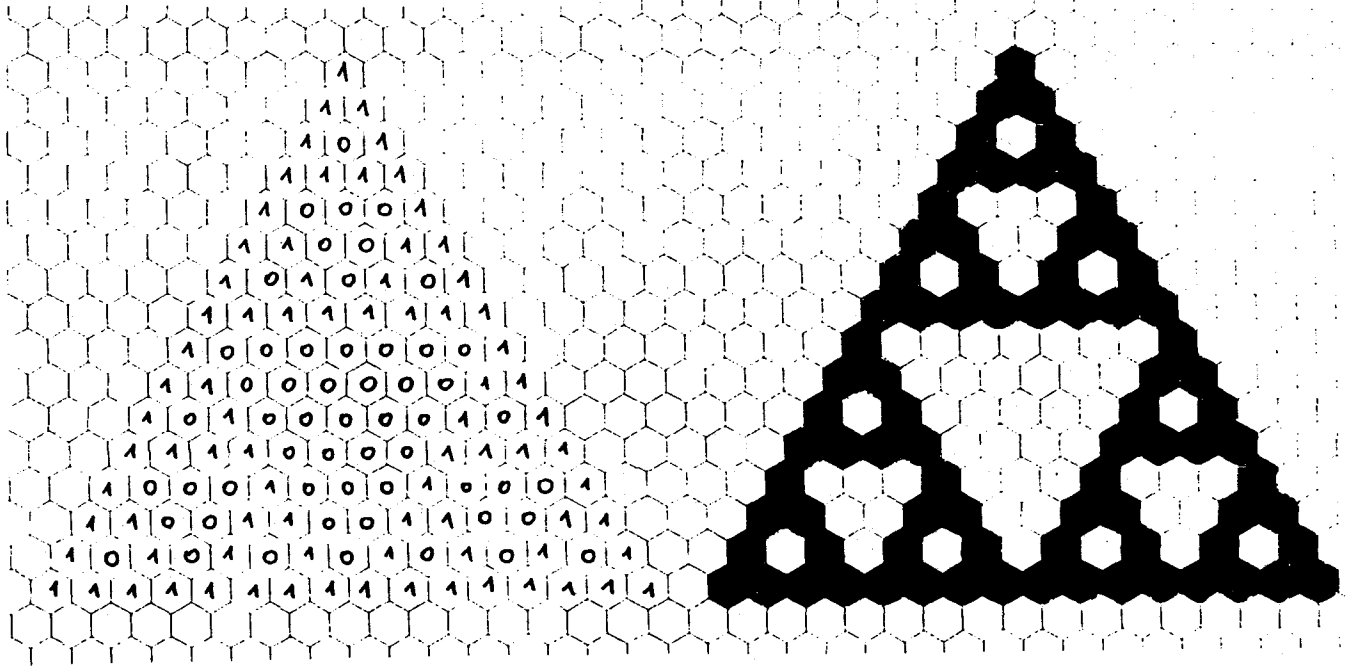


Fig. 5.2.1.: Binomialkoeffizienten modulo 2

Der Unterschied zum SIERPINSKI-Dreieck besteht darin, dass die Figur nicht ins Unendliche geht und auch keine Selbstähnlichkeit aufweist. Eine genügend weit vorangetriebene Figur ist aber optisch kaum vom SIERPINSKI-Dreieck zu unterscheiden.

Etwas allgemeiner kann man im PASCAL-Dreieck modulo  $m$  rechnen und dann mit  $m$  verschiedenen Farben arbeiten.

Als Variante kann schliesslich die Rekursionsberechnung verallgemeinert werden. So kann zum Beispiel statt mit der üblichen Regel der Fig. 5.2.2.

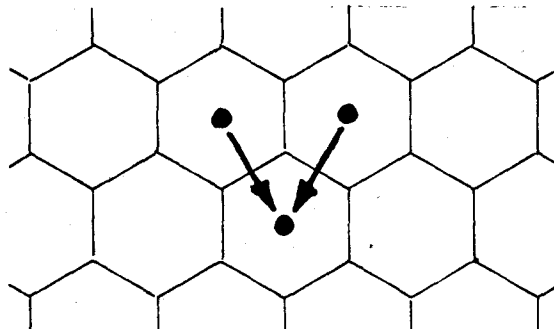


Fig. 5.2.2.: Rechenregel im PASCAL-Dreieck

mit der erweiterten Regel der Fig. 5.2.3.

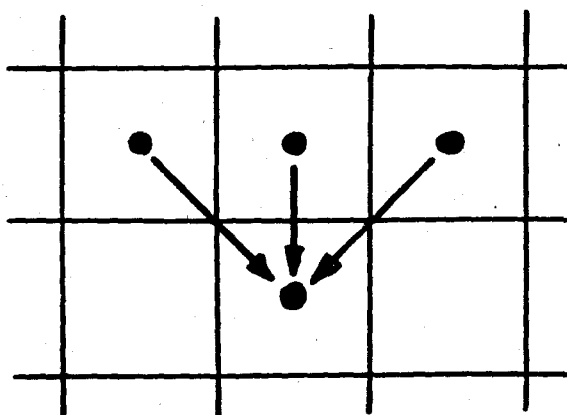


Fig. 5.2.3.: Verallgemeinerte Rechenregel

gearbeitet werden. Man erhält dann das Dreieck der Fig. 5.2.4., welches bei Färbung modulo  $m$  ebenfalls ein fraktalähnliches Bild ergibt.

						1						
					1	1	1					
				1	2	3	2	1				
			1	3	6	7	6	3	1			
		1	4	10	16	19	16	10	4	1		
	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	

Fig. 5.2.4.: Verallgemeinertes PASCAL-Dreieck



### 5.3. Das fraktale Fenster

Packt man vier Quadrate zu einem Metaquadrat zusammen (Fig. 5.3.1.), vier solche Metaquadrate in analoger Weise zu einem

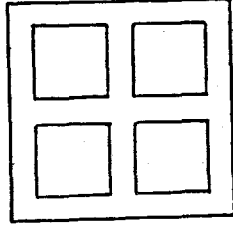


Fig. 5.3.1.: Metaquadrat aus vier Quadraten

Meta<sup>2</sup>-Quadrat, usw., ergibt sich ebenfalls eine fraktalähnliche Figur (Fig. 5.3.2.), welche allerdings wie das PASCAL-Dreieck

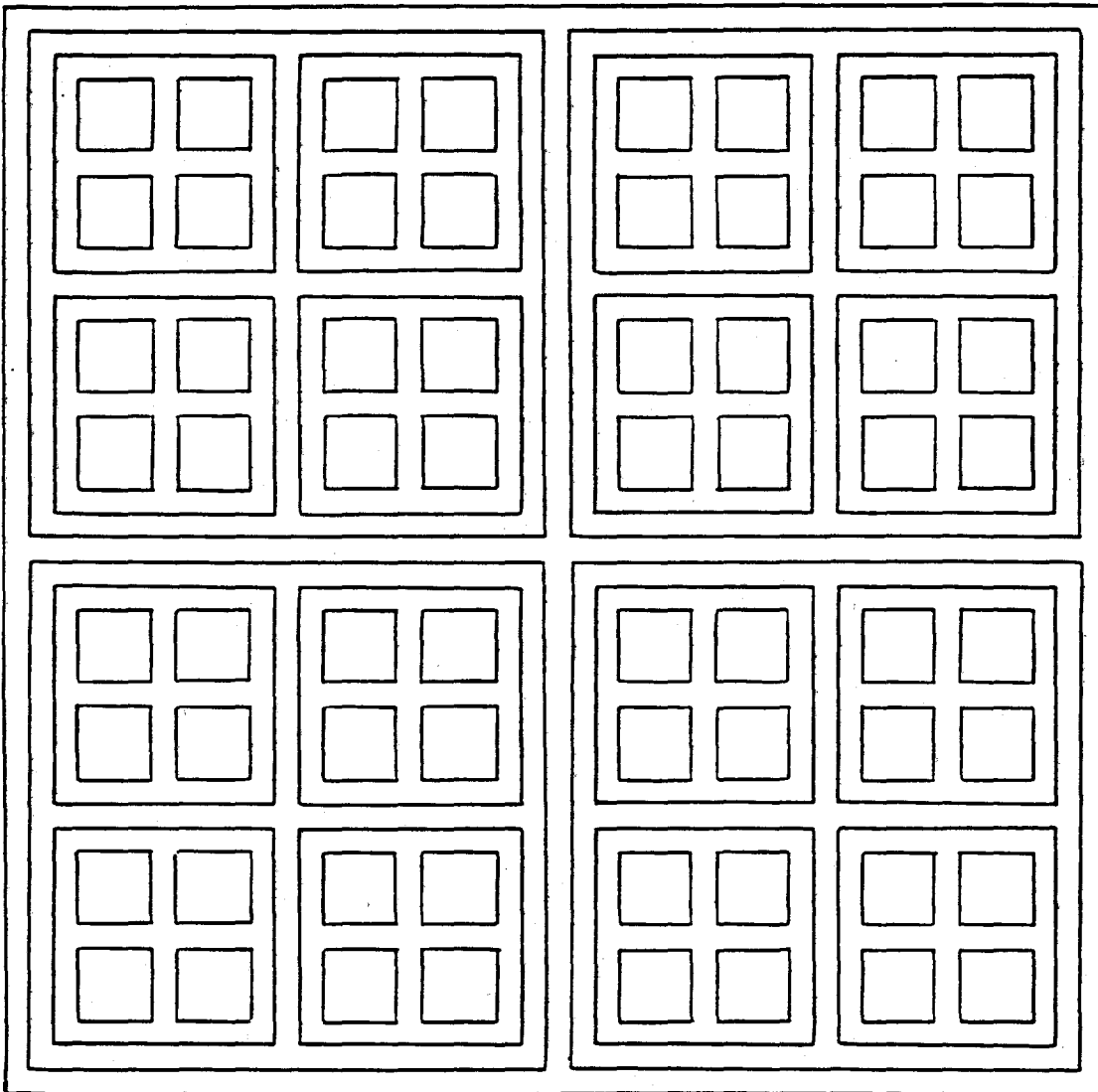


Fig. 5.3.2.: Das grosse Fenster

modulo  $m$  nicht ins Unendliche geht und auch keine Selbstähnlichkeit aufweist. Man kann hingegen den Konstruktionsweg so adaptieren, dass ein echtes Fraktal entsteht (Fig. 5.3.3.);

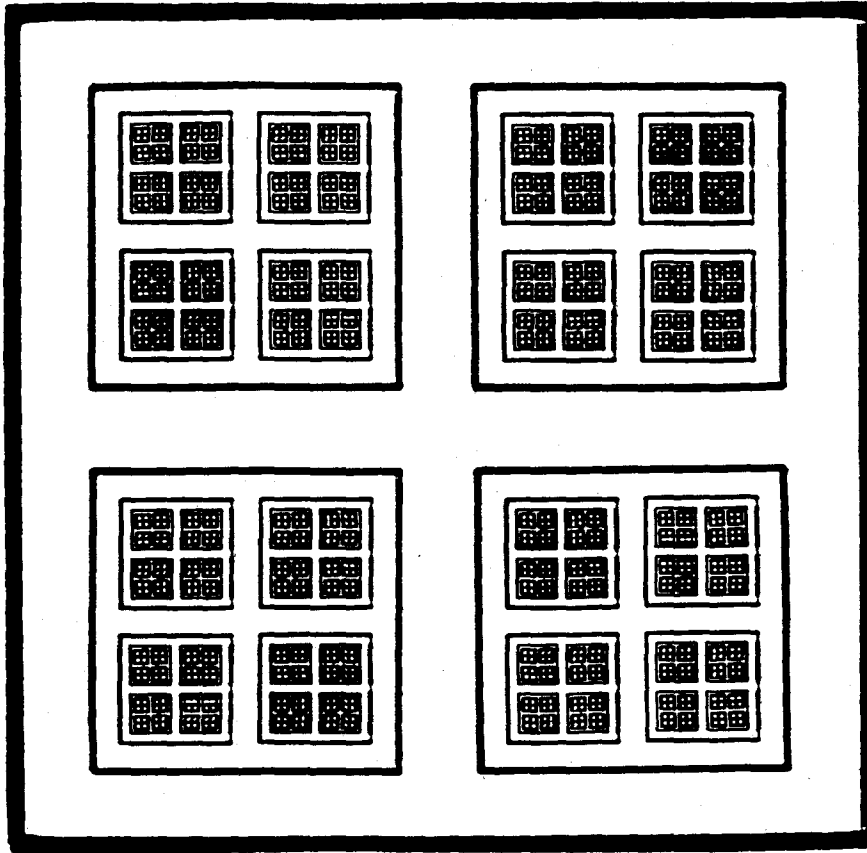


Fig. 5.3.3.: Fenster-Fraktal

im Unterschied zur Fig. 5.3.2. bilden hier die Fensterrahmen-Breiten eine abnehmende geometrische Folge.

#### 5.4. Variationen zur KOCHSchen Schneeflocke

a) Setzt man auf jeder Seitenfläche eines regelmässigen Tetraeders in der Mitte ein Tetraeder halber Kantenlänge auf, erhält man den KEPLER-Stern (Fig. 5.4.1.); setzt man nun auf jeder der

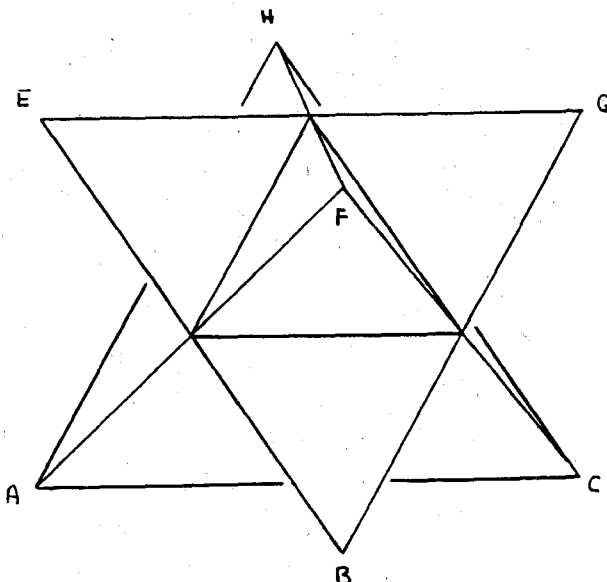


Fig. 5.4.1.: Der KEPLER-Stern

24 Dreiecksseiten des KEPLER-Sternes in der Mitte ein Tetraeder wiederum halber Kantenlänge auf, ergibt sich die Fig. 5.4.2., und bei Fortführung dieses Prozesses erhält man ein Fraktal, das den

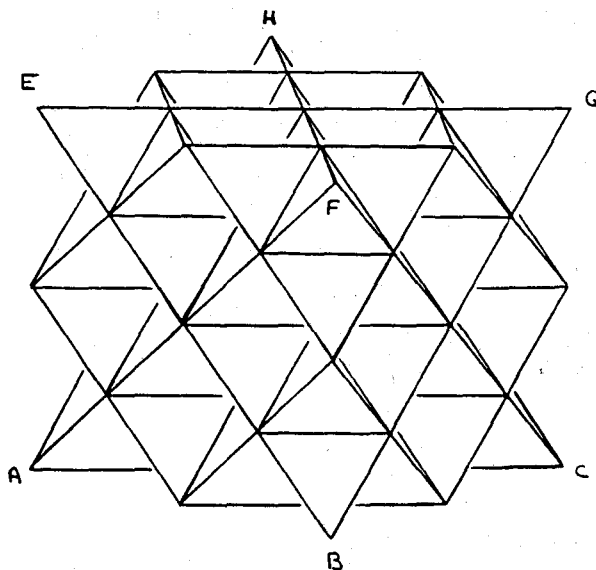


Fig. 5.4.2.: Zweite Generation

Würfel ABCDEFGH der Fig. 5.4.1. vollständig ausfüllt. Die Figuren der Generationen 3, 4, 5, ... umschliessen dabei von der Aussenwelt nicht zugängliche Enklaven, welche aber im weiteren Fraktalisierungsprozess sukzessive aufgefüllt werden.

b) In analoger Weise ergeben sich Enklaven im ebenen Beispiel eines Quadrates, auf dessen Seiten in der Mitte Quadrate mit Drittelslängen aufgesetzt werden (Fig. 5.4.3.).

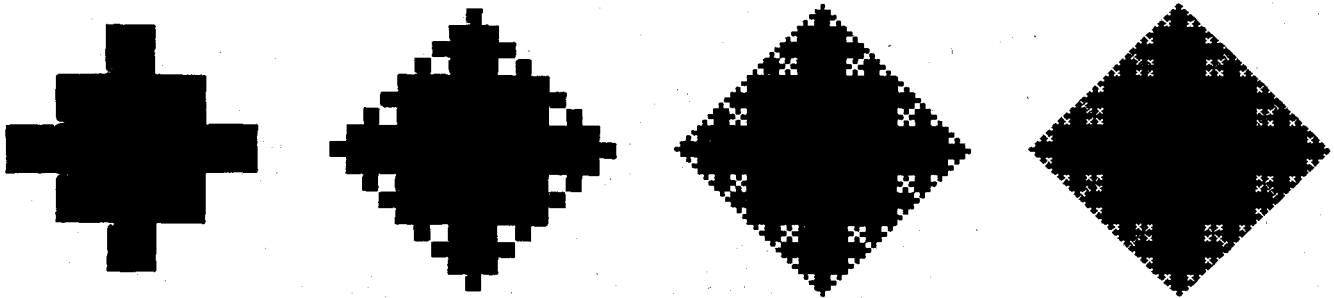


Fig. 5.4.3.: Variante zur KOCH-Kurve

Die Endfigur füllt ein Quadrat mit dem doppelten Flächeninhalt des Ausgangsquadrates lückenlos aus; der Umfang der Endfigur ist aber unendlich.

c) Ebenfalls ergibt sich ein ausgefülltes Quadrat beim durch die Fig. 5.4.4. angedeuteten Verfahren; die Endfigur hat aber einen endlichen Umfang.

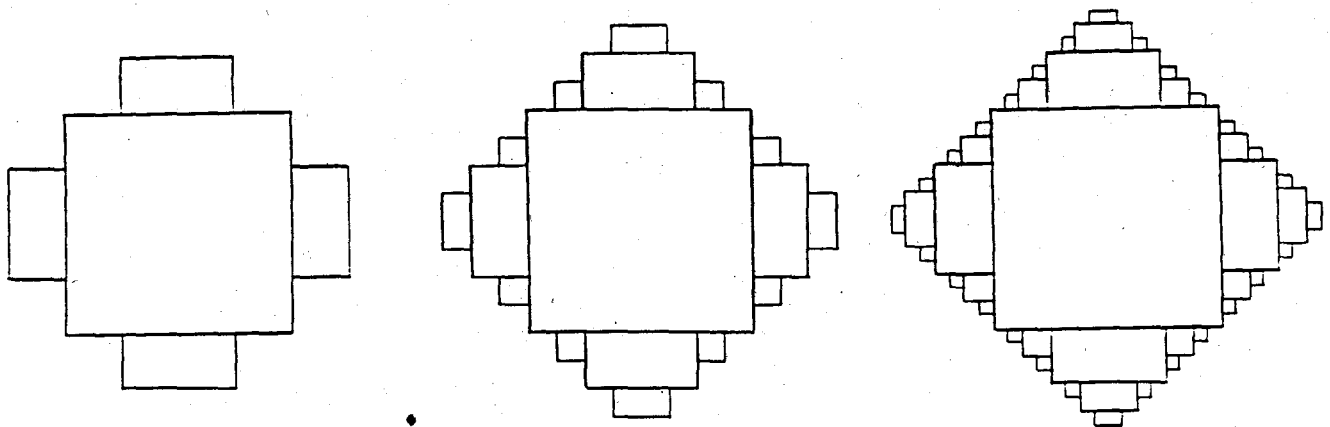


Fig. 5.4.4.: Wie lang ist der Umfang?

**Technische Bemerkung:** Da bei einem Fraktal mit Selbstähnlichkeit die Strichdicken entsprechend immer kleiner werden, empfiehlt es sich, statt mit Strich-Figuren mit flächigen Figuren zu arbeiten (Fig. 5.4.5.).

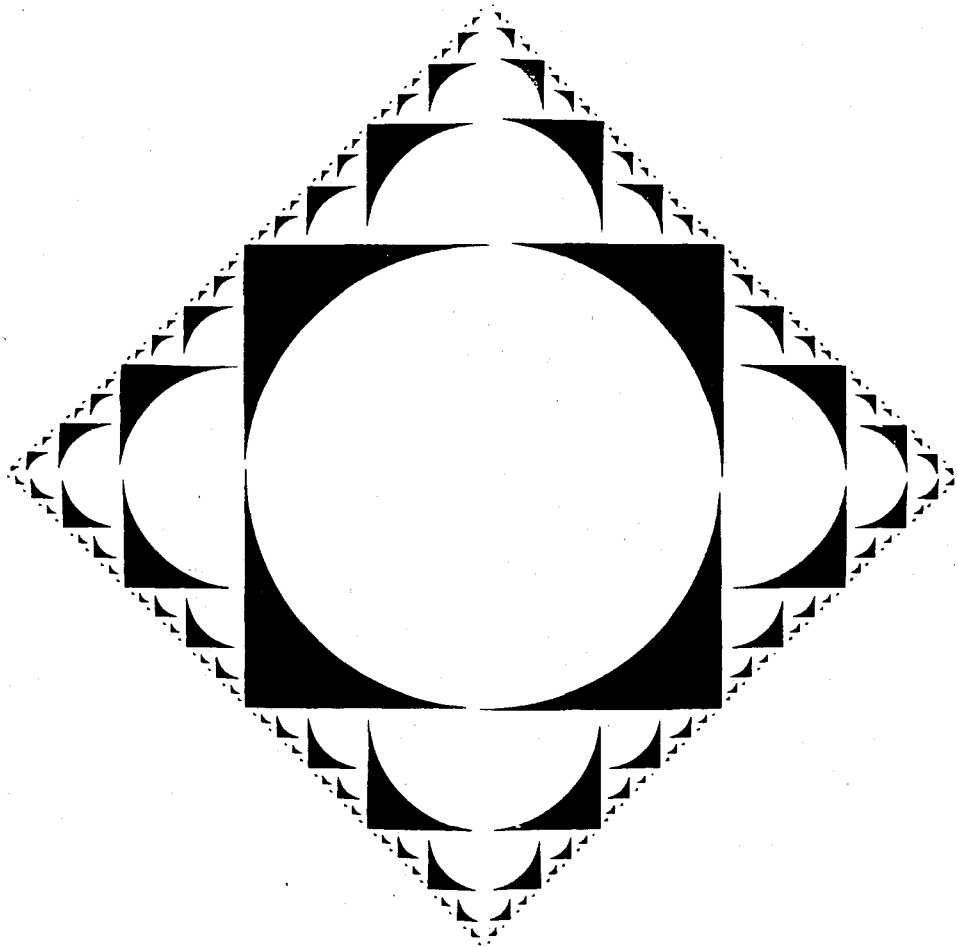


Fig. 5.4.5.: Andere Darstellungsart

d) Durch "Ausfüllen" der Fig. 5.4.4. und 5.4.5. erhält man die Fig. 5.4.6. resp. 5.4.7...

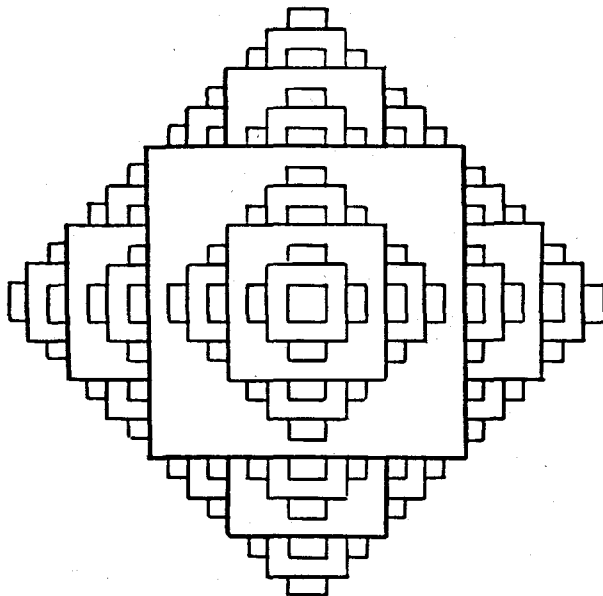


Fig. 5.4.6.: Ausgefülltes Fraktal

Eine schöne Übung zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist es, sich den Körper vorzustellen, welcher das Fraktal der Fig. 5.4.6. als Grund-, Auf- und Seitenriss hat.

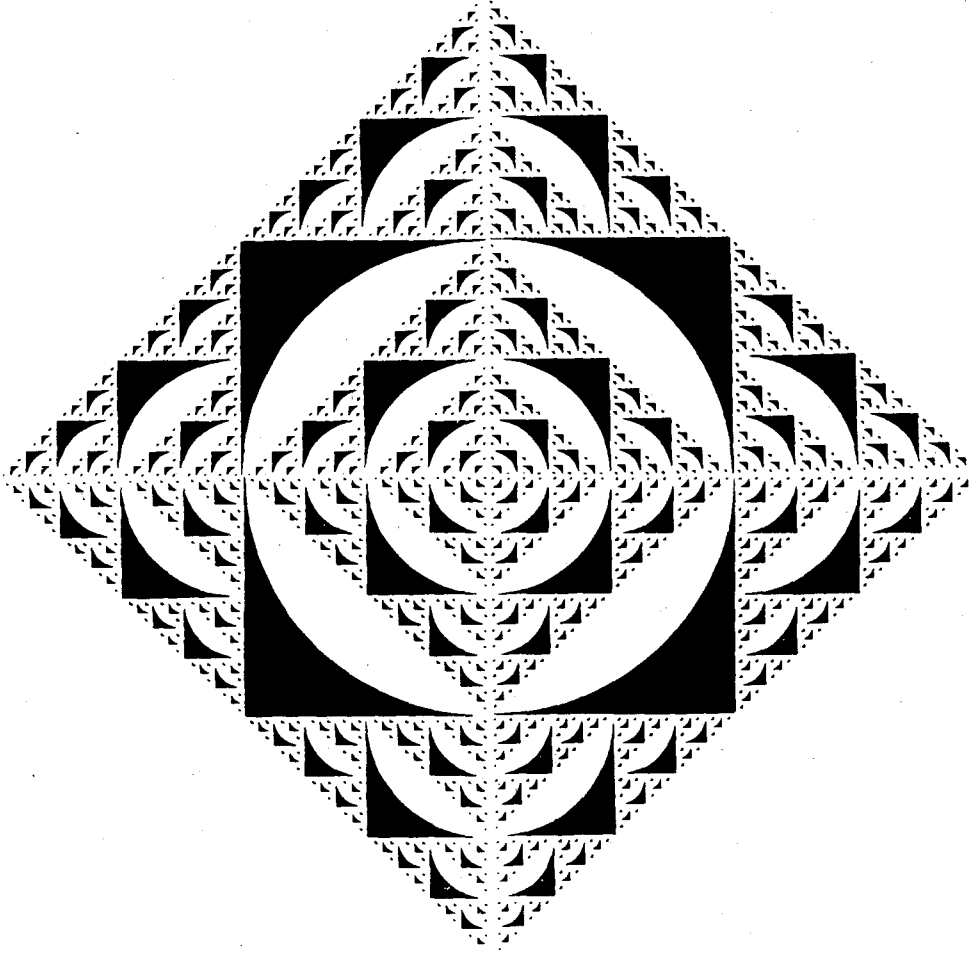


Fig. 5.4.7.: Ausgefülltes Fraktal

## 6. Fraktale Dimensionen

In diesem Kapitel möchte ich den Namen "*Fraktal*" erklären - er ist eng mit einem verallgemeinerten Dimensionsbegriff verknüpft, welchen Benoit MANDELBROT, der "Vater der Fraktale", entwickelt hat.

### 6.1. Dimension eines Küchenbodens

Ersetzt man bei einem mit quadratischen Fliesen belegten Küchenboden die Fliesen durch solche halber Seitenlänge, benötigt man viermal so viele Fliesen, da jede ursprüngliche Fliese durch deren vier mit halber Länge ersetzt wird (Fig. 6.1.1.).

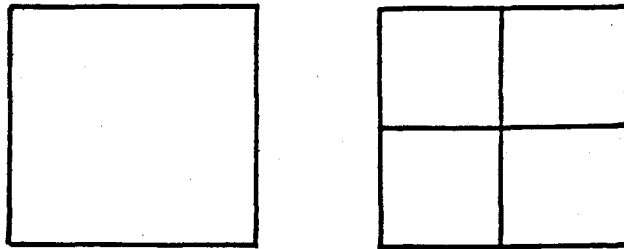


Fig. 6.1.1.: Vier halb so grosse Fliesen ersetzen die alte

Die gleiche Überlegung gilt auch für dreiecksförmige Fliesen (Fig. 6.1.2.).

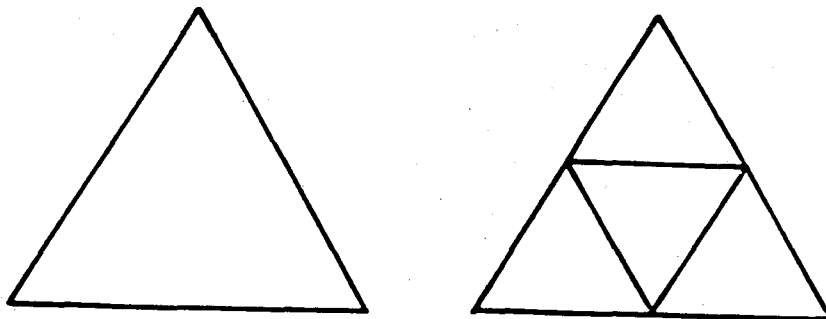


Fig. 6.1.2.: Vier halb so grosse Dreiecke ersetzen das alte

Wenn man aber bei einer in gleich lange Abschnitte unterteilten Strecke die Abschnitte auf halbe Länge reduziert, benötigt man nur doppelt so viele halb so lange Abschnitte; jeder ursprüngliche Abschnitt wird durch zwei halb so lange ersetzt (Fig. 6.1.3.).



Fig. 6.1.3.: Zwei halb so lange Abschnitte ersetzen den alten  
 Wiederum anders ist es bei einer aus Würfeln aufgebauten räumlichen Figur. Ersetzt man die ursprünglichen Würfel durch solche halber Seitenlänge, so braucht man acht mal so viele, weil jeder ursprüngliche Würfel durch deren acht mit halber Seitenlänge ersetzt werden muss (Fig. 6.1.4.).

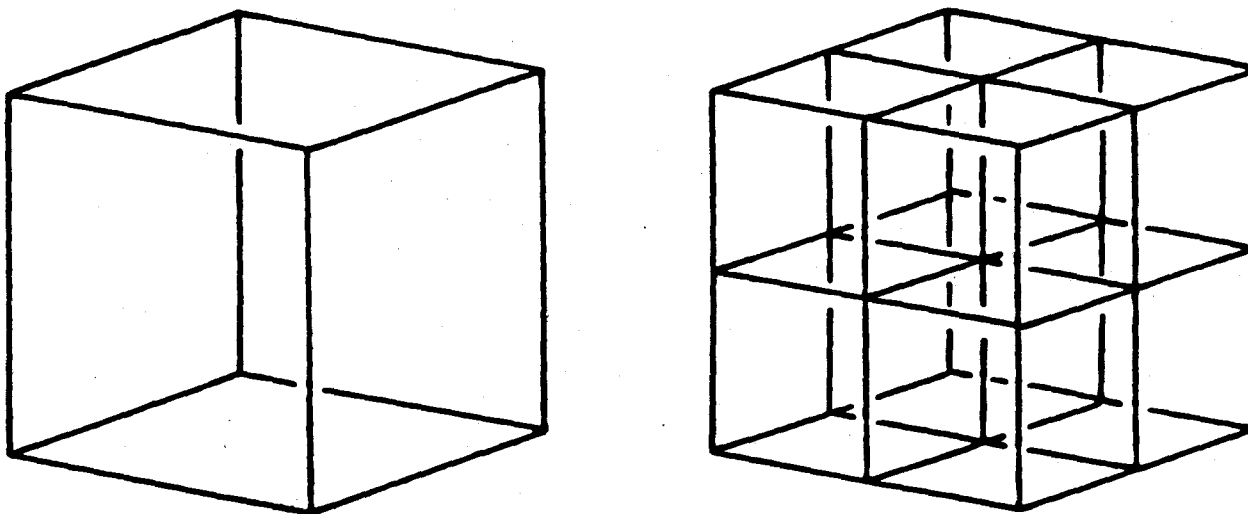


Fig. 6.1.4.: Acht halb so grosse Würfel ersetzen den alten

Die folgende Tabelle gibt einen systematischen Überblick über den Vermehrungsfaktor beim Übergang auf halbe Länge in unseren Beispielen:

Dimension	Begriff	Vermehrungsfaktor	Mathematik
1	Strecke	2	$2 = 2^1$
2	Fliesenboden	4	$4 = 2^2$
3	Raumfigur	8	$8 = 2^3$

Wir erkennen folgende Regel: Beim Übergang auf halbe Länge ergibt sich für die Anzahl der Bauelemente ein Vermehrungsfaktor von der Form  $2^D$ , wobei D die Dimension darstellt.



## 6.2. Dimension des SIERPINSKI-Dreieckes

Wir wollen nun diese Dimensions-Überlegungen auf das SIERPINSKI-Dreieck (Fig. 6.2.1.) anwenden.

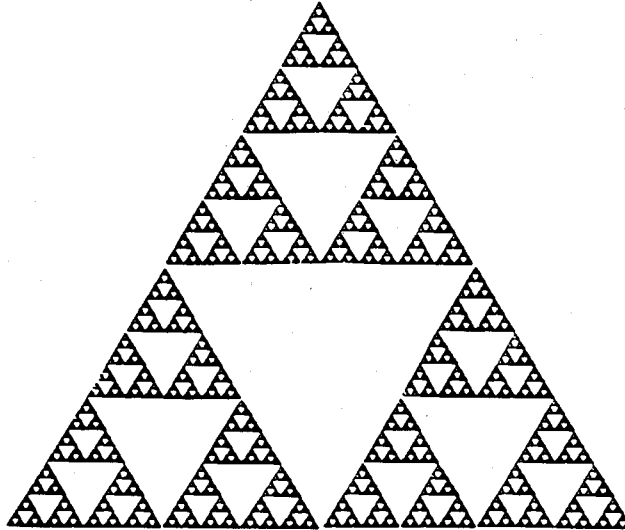


Fig. 6.2.1.: SIERPINSKI-Dreieck

Beim Übergang auf halbe Länge braucht es offensichtlich drei halb so grosse Bauelemente, um die ursprüngliche Figur zu rekonstruieren. Aus der Formel

$$\text{Vermehrungsfaktor} = 2^{\text{Dimension}}$$

ergibt sich also die Gleichung

$$3 = 2^D$$

Es gibt keine ganzzahlige Dimension  $D$ , welche diese Bedingung erfüllt. Vielmehr ist

$$D = \log_2 3 = (\ln 3) / (\ln 2) = 1.58\dots$$

Das SIERPINSKI-Dreieck hat also die fraktale ("gebrochene") Dimension  $D = 1.58\dots$

**Schulmeisterbemerkung:** Die Dimension  $D = \log_2 3$  ist keine "gebrochene" Zahl im Sinne einer rationalen Zahl. Die fraktale Dimension  $D$  ist in diesem Beispiel eine irrationale Zahl.

### 6.3. Dimension der KOCH-Kurve

Beim Übergang auf Drittels-Längen benötigt man vier Kopien (Fig. 6.3.1.).

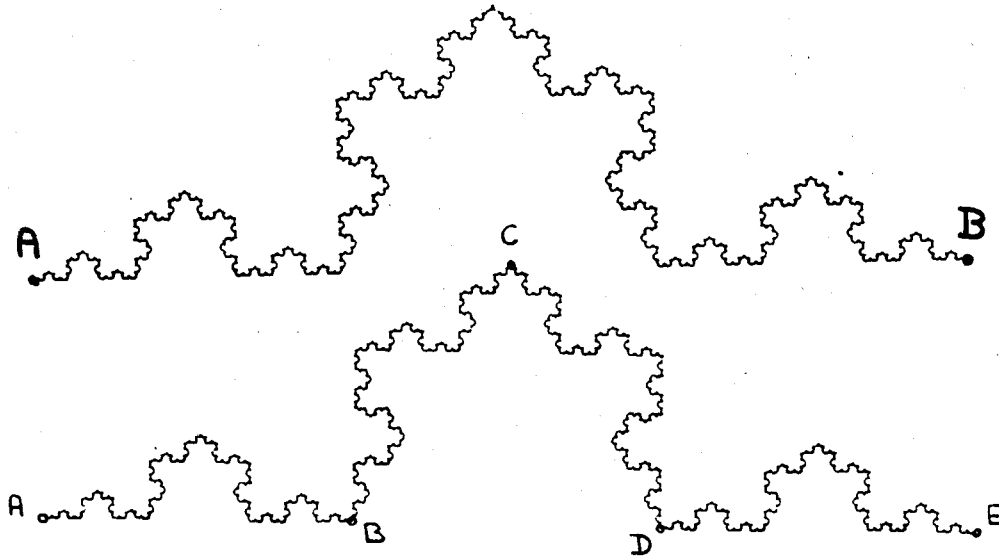


Fig. 6.3.1.: Dimension der KOCH-Kurve

Daraus ergibt sich für die Dimension D die Bedingung

$$4 = 3^D$$

also

$$D = \log_3 4 = 1.26\dots$$

### 6.4. Allgemeine Formel

Ist N die Anzahl der benötigten Kopien mit dem Längenverkleinerungsfaktor r, so gilt für die Dimension D die Beziehung

$$N = (1/r)^D$$

also

$$D = - \ln N / \ln r$$

## 7. Die Herstellung von Fraktalen

### 7.1. Unvollständige und angefangene Fraktale

Als Möglichkeiten bieten sich das Handzeichnen der ersten Generationen, das Herstellen von Raumfiguren mit verschiedenen Techniken oder das Färben von PASCAL-Dreiecken an. Erfahrungsgemäss haben Schüler Freude an diesen an sich monotonen Arbeiten. Der didaktische Sinn dieser Tätigkeiten liegt darin, im Angefangenen die Idee des Ganzen, den Sinn zu erkennen und geistig vorwegzunehmen. Beispiele dieser Art passen durchaus auch zu den Lehrzielen des Geometrie-Unterrichtes der Primarstufe.

### 7.2. Iterative Verfahren

Auch iterative Verfahren ergeben letztlich nur "angefangene" Fraktale, da der Iterationsprozess ja irgend einmal abgebrochen werden muss. Die Idee eines Fraktals kann in der Praxis sowenig realisiert werden wie etwa die Idee einer Geraden.

Ich werde zwei Verfahren am selben Beispiel illustrieren: Es soll ein fraktaler Baum mit Verzweigungen unter Winkeln von  $120^\circ$  und ohne Überlappungen gezeichnet werden (Fig. 7.2.1.).

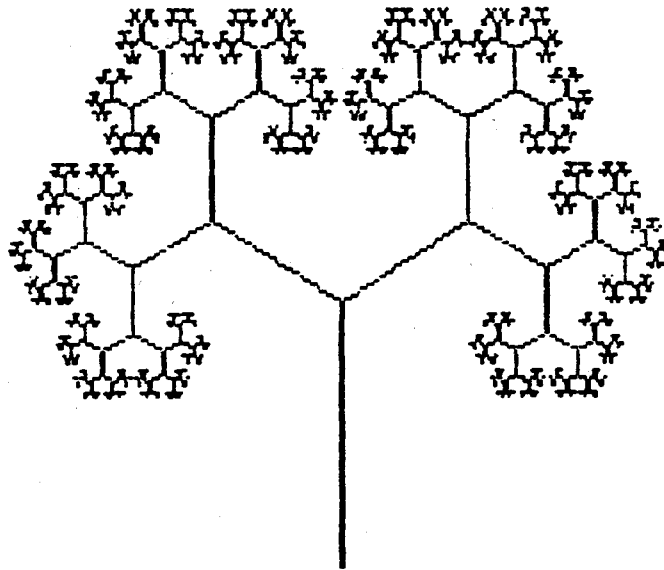


Fig. 7.2.1.: Baum-Fraktal

Bezeichnet  $r$  den linearen Verkleinerungsfaktor beim Übergang auf die nächste Generation, so ergibt die Bedingung des Nicht-Überlappens die Ungleichung

$$r > r^3 + r^4 + r^5 + \dots$$

und im Grenzfall der infinitesimalen Berührung die Gleichung

$$r = r^3 + r^4 + r^5 + \dots = r^3 / (1 - r)$$

Die daraus sich ergebende quadratische Gleichung  $1 - r = r^2$  hat die positive Lösung  $r = (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0.618\dots$

a) Rekursives Graphikprogramm mit Schildkrötentechnik (Programmiersprache LOGO):

```

LOGO EDITOR
TO BAUM :S :T
  GRAPHIKSTART FORWARD :S VERZWEIGUNG :S * 0.618 1
END
TO VERZWEIGUNG :S :G
  REPEAT 2 [RIGHT 60 FORWARD :S
    IF :G < :T [VERZWEIGUNG :S * 0.618 :G + 1]
    [ABSCHLUSS :S * 0.618]
  FORWARD :S]
  RIGHT 60
END
TO ABSCHLUSS :S
  RIGHT 60 FORWARD :S BACK :S
  RIGHT 60 BACK :S FORWARD :S RIGHT 60
END
TO GRAFIKSTART
  CLEARSCREEN HIDETURTLE
END

```

Fig. 7.2.2.: LOGO-Programm

Der Arbeitsaufwand und damit die Arbeitszeit verdoppelt sich mit jeder zusätzlichen Generation, wächst also exponentiell mit der Anzahl der Generationen.

### b) Kopiermethoden

Die fundamentale Eigenschaft der Selbstähnlichkeit legt den Gedanken nahe, auch bei der Konstruktion mit Ähnlichkeitsabbildungen zu arbeiten. Solche können zum Beispiel durch den Computer oder durch einen Kopierapparat, der Verkleinern kann, gegeben sein. In unserm Baum-Beispiel stellt sich dabei allerdings das Problem, dass Strich-Grafiken durch das Verkleinern auch entsprechend dünner werden und bald einmal vom Auge nicht mehr wahrgenommen werden können. Man muss sich daher mit geeigneten flächigen Figuren behelfen, zum Beispiel dem Zweieck der Startfigur (a) von Fig. 7.2.3..

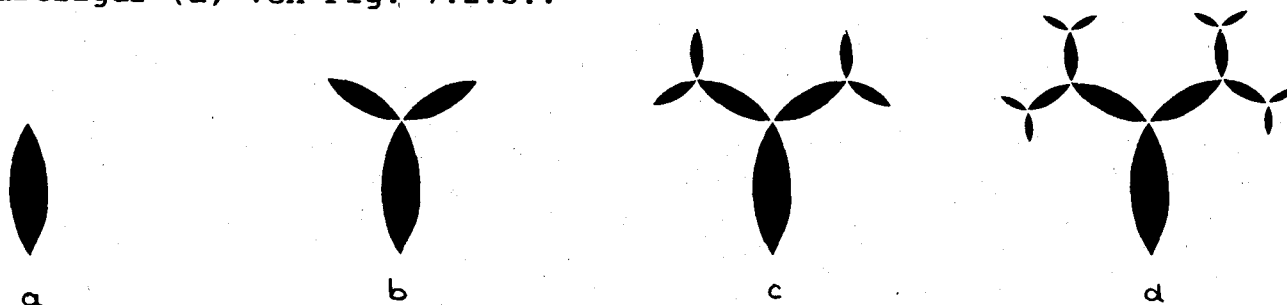


Fig. 7.2.3.: Genesis des Baum-Fraktals

Von dieser Startfigur erstellt man zwei um den Faktor  $r$  verkleinerte Kopien und setzt sie an die Startfigur an (b). Von dieser Figur werden nun wieder zwei um den Faktor  $r$  verkleinerte Kopien hergestellt und an die Startfigur angeheftet (c), usw.. Die Fig. 7.2.4. zeigt das fertige Fraktal.

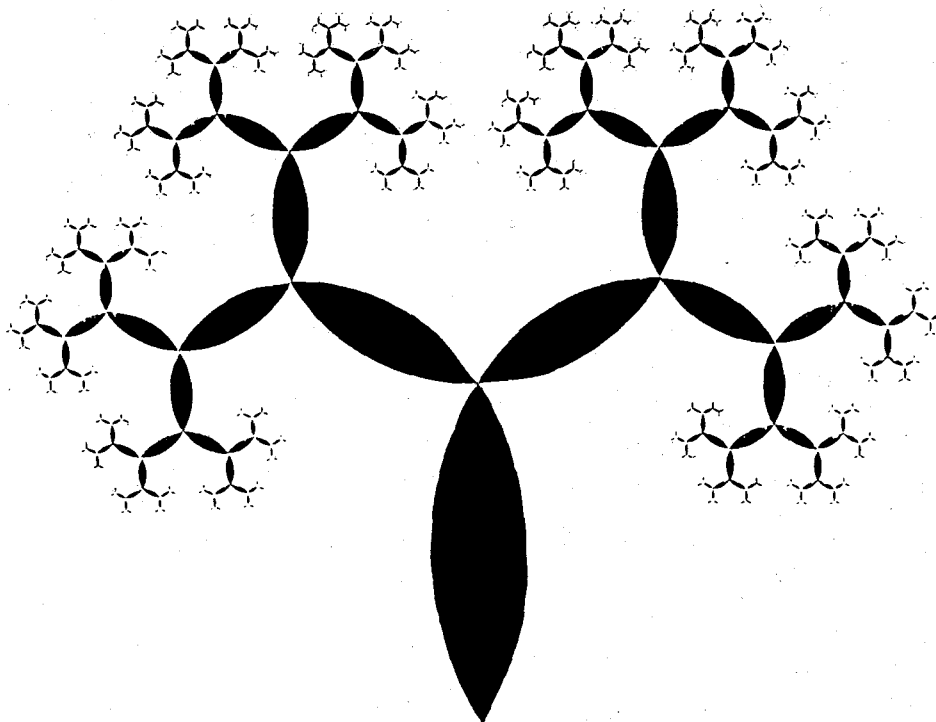


Fig. 7.2.4.: Baum-Fraktal

Der Arbeitsaufwand ist dabei für jede zusätzliche Generation gleich gross; der Gesamtarbeitsaufwand wächst daher linear mit der Anzahl der Generationen.

### 7.3. Die Video-Methode

Das Kopieren und Verkleinern kann auch elektro-optisch realisiert werden und sei an einem Beispiel erläutert: Vier Monitoren werden gemäss Fig. 7.3.1. aufgestellt.

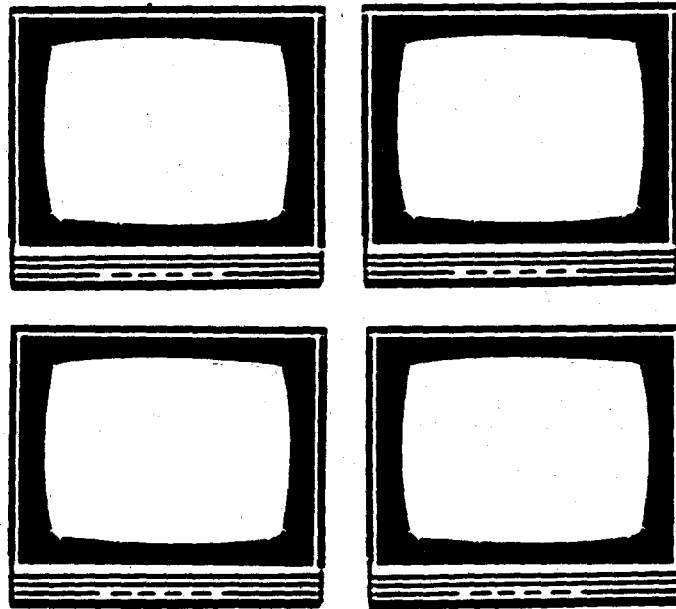


Fig. 7.3.1.: Monitoren-Packung

Vor diesen vier Monitoren stellt man eine Videokamera so auf, dass sie alle vier Monitoren im Visier hat, und schliesst als Rückkoppelung alle vier Monitoren parallel an die Videokamera an. Dann ergibt sich das Fenster-Fraktal der Fig. 5.3.3.. In der Praxis ist die Auflösung allerdings nicht besonders gut; man sieht nur etwa 4 Generationen. Frage: Was entsteht, wenn ein Monitor ausfällt?

#### 7.4. Der Zugang über komplexe Zahlen. Die MANDELBROT-Menge

Dieser Zugang ist bei Schülern derart verbreitet, dass zuweilen die MANDELBROT-Menge mit dem allgemeinen Fraktalbegriff identifiziert wird. Aus didaktischer Sicht liefert er eine dankbare Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen.

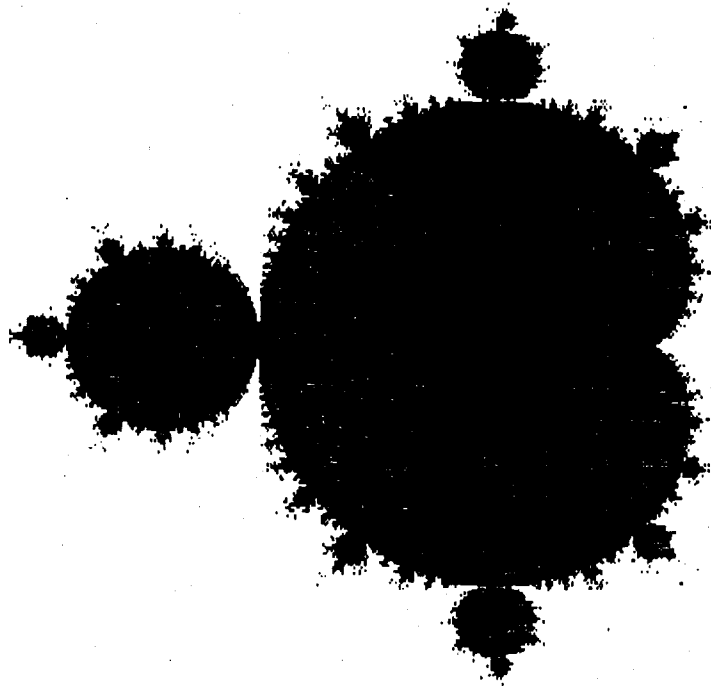


Fig. 7.4.1.: Die MANDELBROT-Menge

Zur MANDELBROT-Menge (Fig. 7.4.1.) kann man dann wie folgt gelangen: Man untersucht, für welche komplexen Zahlen  $c$  die komplexe Folge

$$z[0] = 0$$

$$z[n+1] = z^2[n] + c$$

nicht divergiert. Die Menge dieser  $c$ -Werte ist die MANDELBROT-Menge. Im Falle divergierender Folgen kann man noch die zugehörigen  $c$ -Werte je nach der Divergenzgeschwindigkeit farbig unterscheiden und erhält dann eine Art Niveaulinien, die man auch für eine 3D-Darstellung ausnützen kann. Die praktische Schwierigkeit beim Herstellen der MANDELBROT-Menge liegt im grossen Zeitaufwand; eine Schwierigkeit, die mit programmiertechnischen Methoden angegangen werden muss.

Eine Variationsmöglichkeit zur MANDELBROT-Menge besteht zum Beispiel darin, die rekursiv definierte Folge  $z[n]$  zu verändern. Die Fig. 7.4.2. zeigt das Bild, das sich durch die Rekursion

$$z[n+1] = z^3[n] + c$$

ergibt.

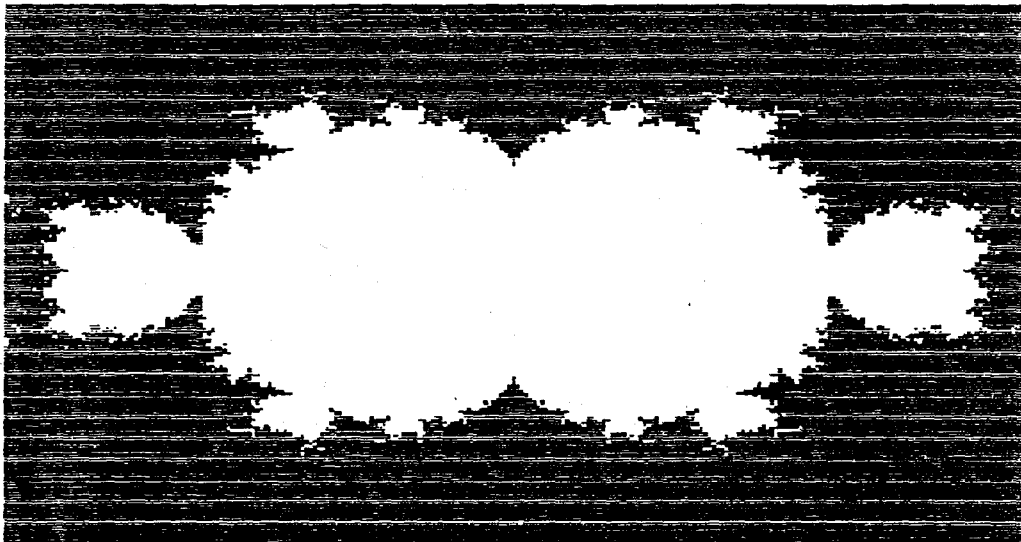


Fig. 7.4.2: Variante zur MANDELBROT-Menge



**Weiterführende Literatur**

- [1] Barnsley, Michael: Fractals everywhere.  
Boston, Academic Press, 1988
- [2] Beck, Uwe: Computer-Graphik. Bilder und Programme zu  
Fraktalen, Chaos und Selbstähnlichkeit.  
Basel: Birkhäuser 1988
- [3] Becker, Karl-Heinz und Dörfler, Michael: Dynamische Systeme  
und Fraktale. Braunschweig: Vieweg 1988
- [4] Escher, M.C.: Graphik und Zeichnungen.  
München: Moos 1984<sup>15</sup>
- [5] Mandelbrot, Benoit B.: The Fractal Geometry of Nature.  
New York: Freeman 1983
- [6] Mandelbrot, Benoit B.: Die fraktale Geometrie der Natur.  
Basel: Birkhäuser 1987
- [7] Peitgen, H.-O. und Richter, P.H.: The Beauty of Fractals.  
Berlin: Springer 1986

7.12.1989

Hans Walser  
Gerlikonerstr. 29  
8500 Frauenfeld

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeili	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90-03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91-01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91-02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91-03	M. Federer	Preistheorie