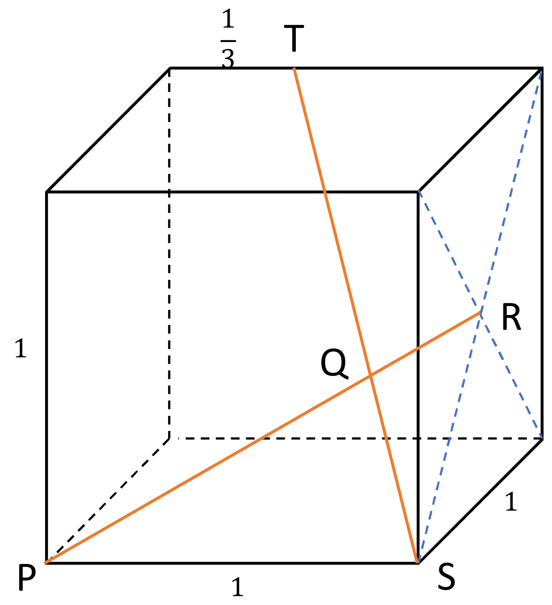
Aufgabe 1: Linearkombination von Vektoren

(a) Im Würfel mit der Kantenlänge 1 soll das Verhältnis $\overline{PQ} : \overline{QR}$ berechnet werden.
(b) Warum schneiden sich die Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{ST}$?



Zu (a) Orientieren Sie sich an folgendem Schema:

1.) Führe ein Koordinatensystem ein
2.) Beschreibe den Ortsvektor $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \alpha \cdot \overrightarrow{PR}$, mit $0 < \alpha < 1$
3.) Beschreibe den Ortsvektor $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \beta \cdot \overrightarrow{ST}$, mit $0 < \beta < 1$
4.) Setze diese zwei Ortsvektoren einander gleich. Daraus entsteht eine Vektorgleichung.
Merke: Bei einer Vektorgleichung bedeutet Gleichheit, dass Gleichheit in alle Komponenten herrscht.
5.) Aus der Vektorgleichung entsteht ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten α und β.
6.) Bestimme α.
7.) α steht für den Anteil der Strecke $\overline{PR}$, der gerade die Strecke $\overline{PQ}$ bildet. Entsprechend gilt für die Strecke $\overline{QR}$ die Zahl $1 - \alpha$.
8.) Damit kann das Verhältnis $\overline{PQ} : \overline{QR}$ gebildet werden.

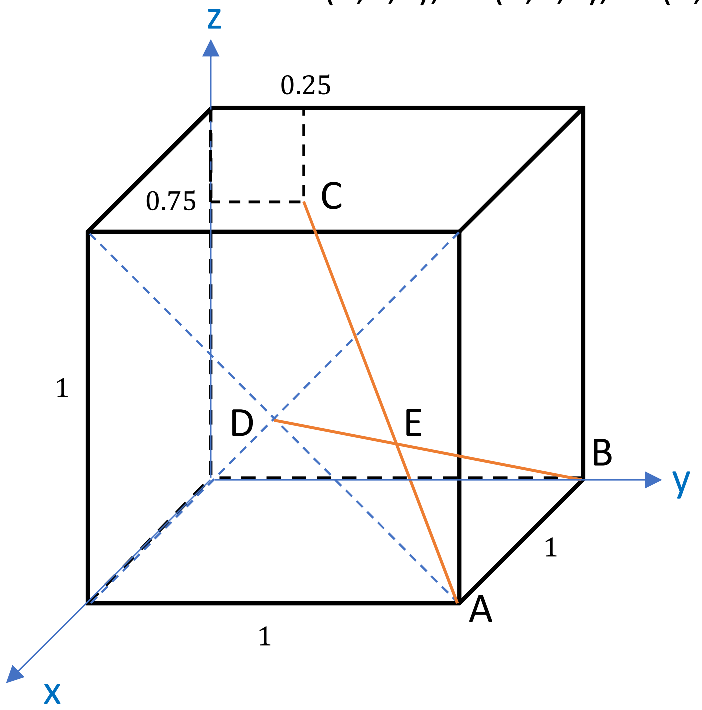
Lösung: $\overline{PQ} : \overline{QR} = 3 : 1$

Aufgabe 2: Linearkombination von Vektoren

(a) Im Würfel mit der Kantenlänge 1 soll das Verhältnis $\overline{AE} : \overline{EC}$ berechnet werden.

(b) Warum schneiden sich die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$?

Die Punkte sind A bis D sind wie folgt gegeben.
A=(1;1;0), B=(0;1;0), C=(0;0.25;0.75) und D=(1;0.5;0.5)



Orientieren Sie sich am Schema der Aufgabe 1.

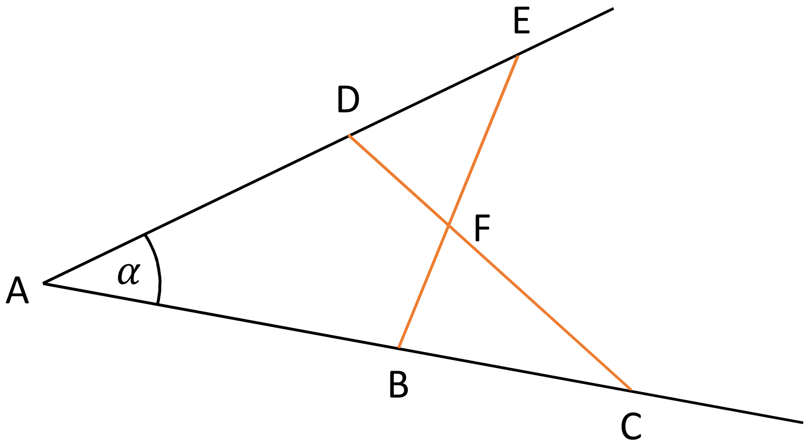
Lösung: $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3$

Aufgabe 3: Linearkombination von Vektoren

(a) Bestimmen Sie das Verhältnis $\overline{DF} : \overline{DC}$ mit Hilfe von Vektoren bei folgenden Angaben:

$$\overline{AD} : \overline{DE} = 2 : 1 \text{ und } \overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 2$$

(b) Welchen Einfluss hat der Winkel α ?



Zu (a) Orientieren Sie sich an folgendem Schema:

1.) Führe ein Koordinatensystem mit zwei Richtungen ein

2.) Beschreibe den Ortsvektor $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \alpha \cdot \overrightarrow{DC}$, mit $0 < \alpha < 1$

3.) Beschreibe den Ortsvektor $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{BE}$, mit $0 < \beta < 1$

4.) Setze diese zwei Ortsvektoren einander gleich. Daraus entsteht eine Vektorgleichung.
Merke: Bei einer Vektorgleichung bedeutet Gleichheit, dass Gleichheit in alle Komponenten / Richtungen herrscht.

5.) Aus der Vektorgleichung entsteht ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten α und β.

6.) Bestimme α.

7.) α steht für den Anteil der Strecke $\overline{DC}$, der gerade die Strecke $\overline{DF}$ bildet.

8.) Damit kann das Verhältnis $\overline{DF} : \overline{DC}$ gebildet werden.

Lösung: $\overline{DF} : \overline{DC} = 1 : 3$

Aufgabe 4 und 5: Vektoren und Datensätze

3.36 Ein Quartierladen macht einen Halbjahresabschluss. Aufgeschlüsselt auf die einzelnen Monate ergibt sich folgendes Bild (Angaben in Fr.):

	Warenverkauf	Wareneinkauf	Aufwand
Januar	52 011.30	39 601.00	17 349.90
Februar	57 398.95	42 875.30	16 855.20
März	62 844.05	46 977.75	18 891.65
April	70 945.20	50 021.80	19 402.15
Mai	82 136.60	58 932.45	19 597.25
Juni	81 057.40	59 601.05	20 365.00

a) Drücke die Liste des monatlichen Verkaufs, Einkaufs und Aufwands durch einen Vektor mit 6 Komponenten aus.

b) Drücke mit den Vektoren aus Teilaufgabe a) die Liste der monatlichen Gewinne aus. (Ein negativer Gewinn entspricht einem Verlust.)

c) Drücke mit den eingeführten Vektoren die Liste der monatlichen Gewinne aus, wenn der Aufwand monatlich 2% geringer gewesen wäre.

3.37 Notenliste In einer Mathematikprüfung werden fünf Aufgaben gestellt. Dabei erreichen die 24 Schülerinnen und Schüler einer Klasse folgende Resultate:

Name	A1	A2	A3	A4	A5	Punktsumme
1	4	3	1	3	2	13
2	2	5	2	1	5	15
3	0	4	3	1	0	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	4	4	2	5	5	20
Maximalpunktzahl	4	5	3	5	5	22

Für jeden Teilnehmenden i an der Prüfung werden die Punkte pro Aufgabe in einem Vektor $\vec{s_i}$ zusammengefasst und für jede Aufgabe j werden die Punktzahlen aller Teilnehmenden in einem Vektor $\vec{a_j}$ zusammengefasst.

Beispielsweise: $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Interpretiere die Komponenten des Vektors $\frac{1}{24}\left(\vec{s}_1 + \ldots + \vec{s}_{24}\right)$.

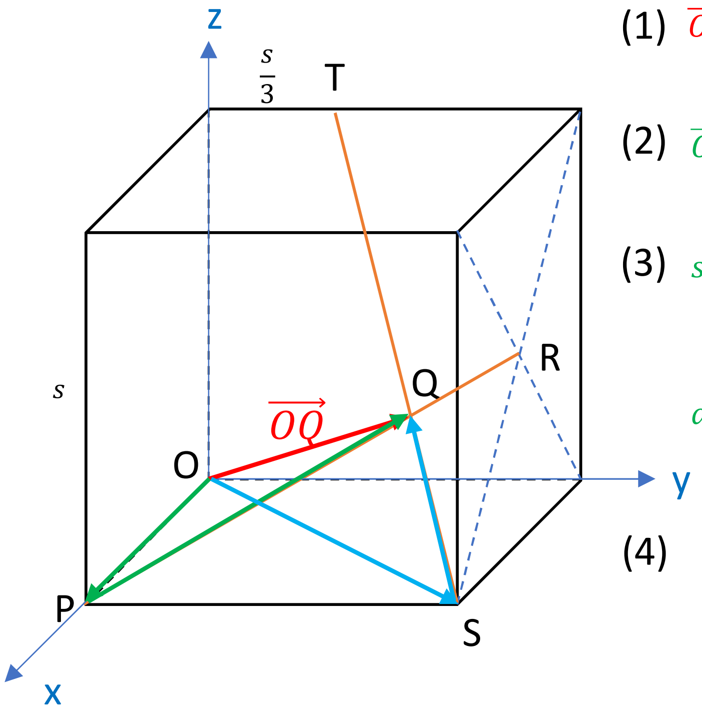
b) Wie kann der Punktsummenvektor mithilfe der Aufgabenvektoren berechnet werden?

c) Die Note wird durch die Formel «Note $= \frac{5}{20}$ Punktsumme + 1» berechnet. Drücke den Notenvektor durch eine Gleichung mit dem Punktsummenvektor aus.

d) Der Lehrer beschliesst, die Punktzahl von Aufgabe 1 zu verdoppeln und neu für 25 Punkte die Note 6 zu geben. Wie heissen nun die Lösungen der Aufgaben b) und c)?

Lösung Aufgabe 1

(a) Im Würfel mit der Kantenlänge s soll das Verhältnis $\overline{PQ}\ :\ \overline{QR}$ berechnet werden.



(1) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \alpha \cdot \overrightarrow{PR} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha \cdot s \cdot \begin{pmatrix}-0.5\\1\\0.5\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \beta \cdot \overrightarrow{ST} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \cdot s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2/3\\1\end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{OP} + \alpha \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OS} + \beta \cdot \overrightarrow{ST}$

(3) $s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha \cdot s \cdot \begin{pmatrix}-0.5\\1\\0.5\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \cdot s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2/3\\1\end{pmatrix}$

$\alpha \cdot \begin{pmatrix}-0.5\\1\\0.5\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}1\\2/3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

(4) $\left|\begin{array}{cccc} -0.5\alpha & + & \beta & = 0 \\ \alpha & + & {}^2/_3\,\beta & = 1 \end{array}\right|$

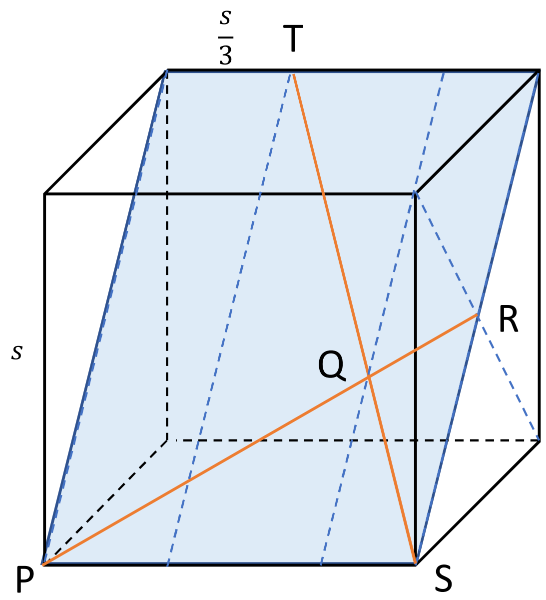
$\boxed{\rightarrow \alpha = \frac{3}{4}}$

(5) $\overline{PQ}\ :\ \overline{QR} = \frac{3}{4}s\ :\ \frac{1}{4}s$

$\boxed{\overline{PQ}\ :\ \overline{QR} = 3:1}$

Lösung Aufgabe 1

(b) Warum schneiden sich die Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{ST}$?



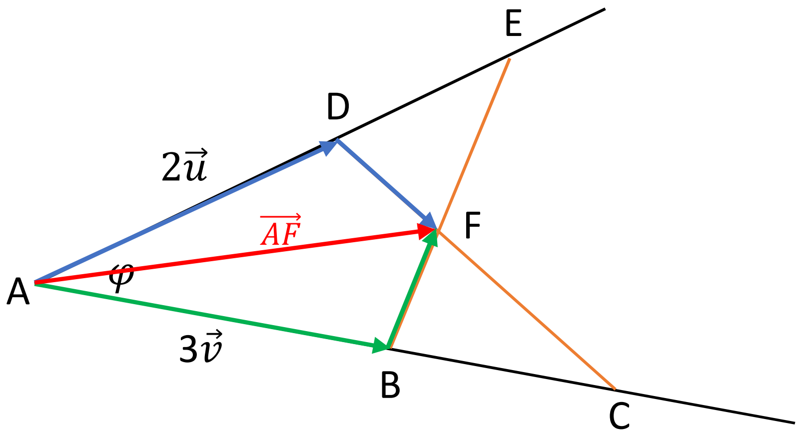
Die Punkte P, S, R und T liegen in einer Ebene, entsprechend liegen auch die Verbindungsstecken und der Schnittpunkt Q in derselben Ebene.

Lösung Aufgabe 3

(a) Bestimmen Sie das Verhältnis $\overline{DF} : \overline{DC}$ mit Hilfe von Vektoren bei folgenden Angaben:

$\overline{AD} : \overline{DE} = 2 : 1$ und $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 2$

(b) Welchen Einfluss hat der Winkel φ ?



(1) $\overrightarrow{AD} = 2\vec{u}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = 3\vec{v}$

(2) $\overrightarrow{DC} = 5\vec{v} - 2\vec{u}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BE} = 3\vec{u} - 3\vec{v}$

(3) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \alpha \cdot \overrightarrow{DC} = 2\vec{u} + \alpha \cdot (5\vec{v} - 2\vec{u})$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{BE} = 3\vec{v} + \beta \cdot (3\vec{u} - 3\vec{v})$

(4) $2\vec{u} + \alpha \cdot (5\vec{v} - 2\vec{u}) = 3\vec{v} + \beta \cdot (3\vec{u} - 3\vec{v})$

(5) $\vec{u}$: $2 - 2\alpha = 3\beta$ $\qquad$ $2 + 3\alpha = 3$
$\vec{v}$: $5\alpha = 3 - 3\beta$ $\qquad$ $\alpha = \frac{1}{3}$

(6) $\overline{DF} : \overline{DC} = \frac{1}{3}\overline{DC} : \overline{DC}$

$\boxed{\overline{DF} : \overline{DC} = 1:3}$

Zu (b): Der Winkel α hat **keinen** Einfluss.

Lösung Aufgabe 4 und 5: Vektoren und Datensätze

3.36 Seien $\vec{v}$, $\vec{e}$ und $\vec{a}$ die Vektoren aus a), deren Komponenten die entsprechenden Zahlen sind. Dann ist $\vec{v} - (\vec{e} + \vec{a})$ Antwort in b) und $\vec{v} - (\vec{e} + 0.98\vec{a})$ Antwort in c).

3.37

a) Jede Komponente gibt die durchschnittliche Punktzahl an, welche die SchülerInnen in der jeweiligen Aufgabe erzielt haben.

b) $\vec{p} = \vec{a_1} + \dots + \vec{a_5}$

c) $\vec{n} = 0.25\vec{p} + \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{p} = 2\vec{a_1} + \dots + \vec{a_5}$, $\vec{n} = 0.2\vec{p} + \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$