1 Brückenkurs komplexe Zahlen

Diese Dokument dient in erster Linie als Notizen für den Unterrichtenden. Der Unterricht findet primär an der Tafel statt. Zum Selbststudium und für ausführlichere Theorie und weitere Aufgaben wird auf folgende Seiten verwiesen:

- http://www.educ.ethz.ch/unterrichtsmaterialien/mathematik/komplexe-zahlen.html
- https://fginfo.ksbg.ch/blcb

1.1 Definition der imaginären Einheit i

Lösungsformel von Gleichungen 3. Grades. «Funktioniert» auch mit Wurzeln aus negativen Zahlen. Ungemach. Überwindung.
Definition: Zusätzliche, nicht reelle Zahl i mit $\mathrm{i}^2 = -1$.
Permanenzprinzip: Rechnen wie gewohnt, mit der Zusatzregel, dass i^2 durch -1 ersetzt werden kann.
Heute sind komplexe Zahlen enorm wichtig (und irgendwie natürlich) in Physik (z.B. Wechselstrom, Quantenphysik), Signalanalyse (Audio, Video, Stichwort Fouriertransformierte).

Aufgabe 1.1 Berechnen, bzw. vereinfachen Sie:

a) $\mathrm{i} + \mathrm{i}$ b) $1 + \mathrm{i}$ c) $\mathrm{i} \cdot (1 + \mathrm{i})$ d) i^4

e) $(2 - \mathrm{i}) \cdot (1 + 2\mathrm{i})$ f) $\frac{3}{\mathrm{i}}$ g) $\frac{1}{1+\mathrm{i}}$ h) $(1 + \mathrm{i})^8$

Definition 1.1 Komplexe Zahlen

Die Menge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \qquad \text{mit } \mathrm{i}^2 = -1.$$

Für eine komplexe Zahl $c = a + b\mathrm{i}$ nennt man $a = \mathrm{Re}(c)$ **Realteil** und $b = \mathrm{Im}(c)$ **Imaginärteil**.

Insbesondere gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Geometrische Interpretation

Idee: Imaginäre Achse rechtwinklig zur reellen Achse. Zahlenebene. Addition (und Subtraktion) ist gewohnte Vektoraddition.
Wie lässt sich die Multiplikation geometrisch interpretieren?

Definition 1.2 Betrag

Der Betrag einer komplexen Zahl $c = a + b\mathrm{i}$ entspricht der Distanz zu 0:

$$|c| = |a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie, dass für $c, z \in \mathbb{C}$ folgendes gilt: $|c \cdot z| = |c| \cdot |z|$.

Für $c \in C$ mit $c \neq 0$ gilt $c = |c| \cdot \frac{c}{|c|}$, wobei $\frac{c}{|c|}$ die komplexe Zahl mit Betrag 1 und gleicher Richtung wie c ist.
Damit reicht es, die Multiplikation für komplexe Zahlen mit Betrag 1 zu untersuchen, d.h. komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene.

Definition 1.3 Trigonometrie im Einheitskreis

Sei P_α der Punkt auf dem Einheitskreis, der mit der positiven x-Achse und dem Nullpunkt den orientierten Winkel α einschliesst. Für die Koordinaten von P_α gilt:

$$P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

Merke: $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ sind die Koordinaten des entsprechenden Punktes auf dem Einheitskreis.

Definition 1.4 Argument und $\operatorname{cis}(\varphi)$

Wir definieren für beliebige Winkel φ die komplexe Zahl

$$c = \operatorname{cis}(\varphi) := \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$$

mit Betrag 1 und **Argument** $\varphi = \arg(c)$.

Additionstheoreme

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \text{und} \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Aufgabe 1.3 Berechnen Sie $\operatorname{cis}(\alpha) \cdot \operatorname{cis}(\beta)$.

Merke Geometrische Interpretation der Multiplikation

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ entspricht einer Streckung am Ursprung mit Faktor $|c|$ gefolgt von einer Drehung um den Ursprung mit dem Winkel $\arg(c)$.

Was passiert beim Quadrieren? Was passiert beim Potenzieren mit einem natürlichen Exponenten n?

Aufgabe 1.4 Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ folgender Gleichungen:

a) $x^2 = -2$ b) $x^4 = 1$ c) $x^8 = 256$ d) $x^{36} = 1$ e) $x^{36} = -1$

Aufgabe 1.5 Wir betrachten die Bewegung auf einem Kreis mit Radius r und Zentrum 0, d.h. die komplexen Zahlen der Form $r \cdot \operatorname{cis}(t)$, für $t \in [0, 2\pi[$, bzw. $t \in [0°, 360°[$.
Beschreiben Sie die Abbilder dieser Kreisbewegung, wenn man diese mit folgenden Funktionen abbildet:

a) $f(z) = z + (1+i)$ b) $f(z) = \mathrm{i} \cdot z$ c) $f(z) = z^2$ d) $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 1.6 Gegeben ist $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = r$ und $\arg(c) = \varphi$ sowie $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{n}r$, mit $n \in \mathbb{N}$ gross genug (z.B. 10).
Was lässt sich über den Betrag und das Argument von $c + z$ aussagen?

1.3 Fundamentalsatz der Algebra

Sei $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots c_{n-1}z^{n-1} + c_n z^n$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Wir werden nachvollziehbar machen, dass $f(z)$ eine Nullstelle hat. Dazu schreiben wir das Polynom erst einmal für $z \neq 0$ um:
$f(z) = c_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right) = c_n z^n \cdot (1 + g(z))$, wobei $a_i = \frac{c_i}{c_n}$.
Wir betrachten das Bild des Kreises $r \cdot \operatorname{cis}(t)$, d.h. die Werte von f für Argumente z mit $|z| = r$.
Wenn wir r gross genug wählen, ist $g(z)$ betragsmässig beliebig klein. Es gibt ein r, so dass z.B. $|g(z)| < \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}^\star$ beliebig. Das ist z.B. für $r > \max(a_i) \cdot nk$ der Fall, weil dann alle Summanden von $g(z)$ betragsmässig kleiner sind als $\frac{1}{nk}$ und damit ist die Summe (aus n Summanden) betragsmässig kleiner als $\frac{1}{k}$.
D.h. $f(z)$ liegt im Kreis mit Zentrum $c_n z^n$ mit Radius $\frac{1}{k} c_n z^n$.
Das Abbild einer Umdrehung des Kreises $r \cdot \operatorname{cis}(t)$ ist also bis auf die betragsmässig maximale Abweichung von

$\frac{1}{k}$ der n-mal durchlaufene Kreis $c_n^n \cdot r^n \cdot \mathrm{cis}(t)$. Man erhält also eine Kurve, die sich n-mal um den Nullpunkt windet.

Schrumpft man r gegen Null, schrumpft die Kurve gegen den Punkt c_0, und windet sich gar nicht mehr um den Nullpunkt. Während diesem Schrumpfungsprozess verändert sich die Kurve kontinuierlich, ohne Sprünge. Es muss also ein r geben, für das die Kurve durch den Nullpunkt geht, d.h. es gibt ein z_0 so, dass $f(z_0) = 0$.

Der Term $(z - z_0)$ kann nun ausgeklammert werden und man erhält $f(z) = (z - z_0) \cdot h(z)$, wobei $h(z)$ wieder ein Polynom ist, auf den der obige «Beweis» angewendet werden kann. D.h., dass in $\mathbb{C}$ jedes Polynom n-ten Grades in n lineare Faktoren faktorisiert werden kann, bzw. dass jede Gleichung n-ten Grades auch n Lösungen hat (Mehrfachlösungen mitgezählt).

Beachte: Der Satz sagt nichts darüber aus, wie die Lösungen gefunden werden können. Es gibt Lösungsformeln für Gleichungen bis zum vierten Grad. Es ist aber auch bewiesen worden, dass es keine allgemeinen Lösungsformeln für Gleichungen fünften Grades und darüber geben kann.

Aufgabe 1.7 Lösen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{C}$:

a) $x^2 + x = -1$ b) $x^2 = 4\mathrm{i} - 3$ c) $(1+\mathrm{i})x^2-(1+7\mathrm{i})x+(2+14\mathrm{i}) = 0$

1.4 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion kann auch in $\mathbb{C}$ definiert werden, indem man eine der bekannten Definitionen aus $\mathbb{R}$ übernimmt:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(Taylor-Reihe)}$$

Für eine beliebige Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit $c = a + b\mathrm{i}$ gilt:

$$\mathrm{e}^c = \mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}} = \underbrace{\mathrm{e}^a}_{\in\mathbb{R}} \cdot \mathrm{e}^{b\mathrm{i}}$$

Es bleibt also zu untersuchen, was die Exponentialfunktion für rein imaginäre Argumente liefert.
Dazu setzen wir in den obigen Definitionen ein:

$$\mathrm{e}^{b\mathrm{i}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{b\mathrm{i}}{n}\right)^n$$

Die Potenz mit Exponent n bewirkt, dass das Argument φ von $1 + \frac{b\mathrm{i}}{n}$ mit n multipliziert wird. Der Betrag wird mit n potenziert.

Es gilt (Skizze!): $\tan(\varphi) = \frac{b}{n}$. Für φ sehr nahe bei Null (d.h. n sehr gross) gilt $\tan(\varphi) \approx \varphi$ (im Bogenmass!). Eigentlich müsste hier noch gezeigt werden, dass diese Konvergenz mindestens quadratisch ist, d.h. dass $\varphi - \tan(\varphi)$ mindestens so schnell gegen Null strebt wie φ^2, wenn $\varphi \to 0$.

Für grosse n gilt also $\varphi \approx n \cdot \frac{b}{n} = b$. Für den Betrag müsste noch gezeigt werden, dass $\left|1 + \frac{b\mathrm{i}}{n}\right| - 1$ mindestens so schnell gegen 0 strebt wie $\left(\frac{1}{n}\right)^2$. Daraus folgt dann dann, dass $\left|\mathrm{e}^{b\mathrm{i}}\right| = 1$ sein muss. Es gilt also:

$$\mathrm{e}^{b\mathrm{i}} = \mathrm{cis}(b) \qquad b \text{ im Bogenmass!}$$

Die zweite Variante benutzt folgende Taylor-Reihen:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad\qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Aufgabe 1.8 Setzen Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ in die Taylor-Reihe von e^x ein und «beweisen» Sie damit, dass

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{cis}(b)$$

Zum Schluss noch die «schönste» Gleichung:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

1.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 1.1 ex-basic-algebra

a) $2\mathrm{i}$ b) $1+\mathrm{i}$ c) $\mathrm{i}-1=-1+\mathrm{i}$ d) 1

e) $2+4\mathrm{i}-\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=5+3\mathrm{i}$ f) $\frac{3}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{3\mathrm{i}}{-1}=-3\mathrm{i}$ g) $\frac{1}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

h) $\left(\left((1+\mathrm{i})^2\right)^2\right)^2=\left((2\mathrm{i})^2\right)^2=(-4)^2=16$

Lösung zu Aufgabe 1.2 ex-beweis-mul-betrag
Sei $c=a+b\mathrm{i}$ und $z=x+y\mathrm{i}$. Damit ist $c\cdot z=ax-by+(ay+bx)\mathrm{i}$. Damit ist

$$|c\cdot z|^2=(ax-by)^2+(ay+bx)^2=a^2x^2+b^2y^2-2abxy+a^2y^2+b^2x^2+2abxy=$$
$$a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=|c|^2\cdot|z|^2=(|c|\cdot|z|)^2$$

Weil Beträge immer positiv sind, folgt daraus $|c\cdot z|=|c|\cdot|z|$.

Lösung zu Aufgabe 1.3 ex-cis-mal-cis

$$\mathrm{cis}(\alpha)\cdot\mathrm{cis}(\beta)=(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))\cdot(\cos(\beta)+\mathrm{i}\sin(\beta))=$$
$$\big(\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\big)+\mathrm{i}\big(\cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)\big)=$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)=\mathrm{cis}(\alpha+\beta)$$

Lösung zu Aufgabe 1.4 ex-einheitswurzeln

a) $x=\pm\mathrm{i}\sqrt{2}$ b) $x\in\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},1$

c) $x=2\mathrm{cis}(n\cdot45^\circ)$ für $n=0,1,\ldots,7$. d) $x=\mathrm{cis}(n\cdot10^\circ)$ für $n=0,1,\ldots,35$.

e) $x=\mathrm{cis}(5^\circ+n\cdot10^\circ)$ für $n=0,1,\ldots,35$.

Lösung zu Aufgabe 1.5 ex-kreisbilder

a) Bewegung auf dem Kreis mit Radius r und Zentrum (1+i). Start der Bewegung bei 0° im Gegenuhrzeigersinn.

b) Bewegung auf dem Kreis mit Radius r und Zentrum 0. Start bei 90° im Gegenuhrzeigersinn.

c) Bewegung auf dem Kreis mit Radius r^2 und Zentrum 0. Start bei 0° im Gegenuhrzeigersinn mit **doppelter** Drehgeschwindigkeit. Pro Umdrehung im Original werden 2 Drehungen im Bild ausgeführt.

d) Bewegung auf dem Kreis mit Radius r^n und Zentrum 0. Start bei 0° im Gegenuhrzeigersinn mit ***n*-facher** Drehgeschwindigkeit. Pro Umdrehung im Original werden n Drehungen im Bild ausgeführt.

Lösung zu Aufgabe 1.6 ex-betrag-der-summe-eingrenzen
Die Punkte auf dem Kreis um c mit Radius $\frac{1}{n}r$ sind mindestens $\frac{n-1}{n}$ und höchstens $\frac{n+1}{n}r$ von 0 entfernt:

$$\frac{n-1}{n}r = |c| - |z| \leq |c+z| \leq |c| + |z| = \frac{n+1}{n}r$$

Die maximale Winkeldifferenz ψ zwischen c und $c+z$ erhält man mit der Tangente durch 0 an den Kreis um c mit Radius $\frac{1}{n}r$. Für diese Differenz gilt:

$$\sin(\psi) = \frac{1}{n} \qquad \text{und damit} \quad \psi \approx \frac{1}{n} \text{ im Bogenmass, für grosse } n$$

Lösung zu Aufgabe 1.7 ex-gleichungen-loesen

a) Mitternachtsformel: Diskriminante $D = 1 - 4 = -3$. Die Lösungen sind wie folgt: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{i}$.

b) 2 Lösungsansätze:

Via Polarform $4\mathrm{i} - 3 = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi)$, dann sind die Lösungen $x = \pm\sqrt{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. φ kann angenähert mit dem TR über trigonometrische Umkehrfunktionen bestimmt werden. Oder

algebraisch $x = a + b\mathrm{i}$, also $x^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$ und damit haben wir das folgende, reelle, *nicht lineare* Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3 &= a^2 - b^2 && (1) \\ 4 &= 2ab && (2) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt $b = \frac{2}{a}$ und damit

$$\begin{aligned} -3 &= a^2 - \frac{4}{a^2} && | \cdot a^2 \\ -3a^2 &= a^4 - 4 && | + 3a^2 \\ 0 &= a^4 + 3a^2 - 4 \\ a^2 &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \\ a^2 &\in \{1, -4\} \\ a &= \pm 1 \end{aligned}$$

Und damit $b = \pm 2$. Damit sind die Lösungen $x = \pm(1 + 2\mathrm{i})$

c) Diskriminante der Gleichung ist $D = (1+7\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i})(2+14\mathrm{i}) = -50\mathrm{i}$. Davon sind die Wurzeln zu bestimmen. Es gilt $-50\mathrm{i} = 50\operatorname{cis}(270°)$, also sind die Wurzeln $\pm\sqrt{50} \cdot \operatorname{cis}(135°) = \pm\sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}) = \pm(-5+5\mathrm{i})$.

Daraus ergibt sich mit der Mitternachtsformel

$x_{1,2} = \frac{(1+7\mathrm{i}) \pm (-5+5\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})}$

$x_1 = \frac{(-4+12\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{(-2+6\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = (-1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2 + 4\mathrm{i}$ und

$x_2 = \frac{(6+2\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{4-2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$

Lösung zu Aufgabe 1.8 ex-ehochib
Hinweis: Für $k \in \mathbb{Z}$ ist i^k einer der vier Werte ± 1 oder $\pm\mathrm{i}$ und zwar je nach 4er-Rest r von k. Wir können schreiben $k = 4n + r$ mit $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\mathrm{i}^k = \mathrm{i}^{4n+r} = \mathrm{i}^{4n} \cdot \mathrm{i}^r = \left(\mathrm{i}^4\right)^n \cdot \mathrm{i}^r = 1^n \cdot \mathrm{i}^r = \mathrm{i}^r$$

Beweis:

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}b)^k}{k!} =^{\star}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}b)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}b)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(i^2\right)^k \cdot b^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(i^2\right)^k \cdot \mathrm{i} \cdot b^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot b^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \mathrm{i} \cdot b^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{2k!} + \mathrm{i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b) = \operatorname{cis}(b)
\end{aligned}
$$

$\star$ Weil die Summe absolut konvergiert, darf die Reihenfolge der Summanden beliebig vertauscht werden.