$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

1 Brückenkurs Lineare Algebra

1.1 Notationen und Begriffe

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen.

$\mathbb{R}^n$ Menge aller n-dimensionalen Vektoren mit reellen Komponenten.

$f : A \to B$ Eine Funktion bzw. Abbildung f, die den Elementen aus A Elemente in B zuordnet.

$\forall$ Für alle. Z.B. $x^2 > x \ \forall x > 1$.

$\exists$ Es existiert. Z.B. $\exists x \in \mathbb{R}$ so dass $x^2 = 2$.

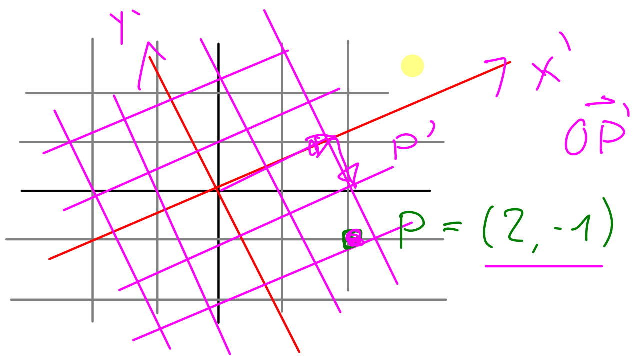
2 Lineare Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Die «klassische lineare Funktion» $f(x) = mx + q$ ist nicht linear im Sinne der linearen Algebra (ausser für $q = 0$). Es wird darum von *linearen Abbildungen* gesprochen, um die Verwirrung klein zu halten.

2.1 Lineare Abbildungen der Ebene $\mathbb{R}^2$

Streckungen am Ursprung, Drehungen um den Ursprung und Scherungen, die den Ursprung auf sich selbst abbilden sind lineare Abbildungen der Ebene.

Eine solche Abbildung f ist vollständig definiert, wenn die Bilder $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} f_{1,x} \\ f_{1,y} \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} f_{2,x} \\ f_{2,y} \end{pmatrix}$ der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bekannt sind. Es ist $\vec{f_1} = f(\vec{e}_1)$ und $\vec{f_2} = f(\vec{e}_2)$.
Es entsteht so ein neues, eventuell schiefes Koordinatensystem, in dem die Bildpunkte die gleichen Koordinaten wie die Urbildpunkte im ursprünglichen Koordinatensystem haben.



$\vec{OP'} = 2 \cdot \vec{f_1} - 1 \cdot \vec{f_2}$

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e_1} + (-1) \cdot \vec{e_2}$

Ein allgemeiner Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x\vec{e}_1 + v_y\vec{e}_2$ wird wie folgt abgebildet:

$$f(\vec{v}) = f(v_x\vec{e}_1 + v_y\vec{e}_2) = f(v_x\vec{e}_1) + f(v_y\vec{e}_2) = v_x f(\vec{e}_1) + v_y f(\vec{e}_2) = v_x\vec{f_1} + v_y\vec{f_2}$$

Damit wurden die zwei Eigenschaften von linearen Abbildungen bereits benutzt:

Definition 2.1 Lineare Abbildung

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist linear, wenn gilt:

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$
$$f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$f(\vec{0}) \overset{?}{=} \vec{0}$ | $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot f(\vec{v}) = \vec{0}$

$f(\vec{v} - \vec{v}) = f(\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v}) = f(\vec{v}) + (-1) \cdot f(\vec{v})$

Aufgabe 2.1 Beweisen Sie aus den Eigenschaften einer linearen Abbildung dass $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung f kann mit einer **Matrix** (plural Matrizen) beschrieben werden:

$$f(\vec{v}) = f\left(\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} f_{1,x} & f_{2,x} \\ f_{1,y} & f_{2,y} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_{1,x} \cdot v_x + f_{2,x} \cdot v_y \\ f_{1,y} \cdot v_x + f_{2,y} \cdot v_y \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}$$

Merke: Die Spalten einer Matrix entsprechen den Bildern der jeweiligen Einheitsvektoren.

Merke Matrix-Komponenten

Eine $n \times m$-Matrix A hat n **Zeilen** und m **Spalten**. Die Komponenten der Matrix A werden mit $a_{i,j}$ notiert, wobei der erste Index i die Zeile und der zweite Index j die Spalte angibt. Man schreibt auch $A = (a_{i,j})$ oder ausführlicher

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,n} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Merke Matrix-Vektor Multiplikation

Eine $n \times n$ Matrix $M = (m_{i,j})$ wird mit einem n-dimensionalen Vektor $\vec{v} = (v_i)$ wie folgt multipliziert:

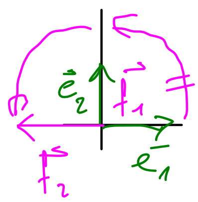
$$\vec{u} = M \cdot \vec{v} \quad \text{mit} \quad u_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \cdot v_j$$

Visuell stellt man sich den Vektor hochgestellt neben der Matrix vor. Eine Komponente des Resultats erhält man dann als **Skalarprodukt** des Vektors mit der entsprechenden Zeile der Matrix:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ & \rightarrow & \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ \otimes \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2 Bestimmen Sie die Abbildungssmatrizen folgender Abbildungen (falls es sich um eine lineare Abbildung handelt). Sonst erklären Sie, warum es sich nicht um eine lineare Abbildung handelt.

a) Drehung um den Ursprung um 90°. $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Streckung am Ursprung mit Faktor 2.

c) Spiegelung an der x-Achse. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) Spiegelung an der 45° Winkelhalbierenden durch den Ursprung. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) Drehung um 180° um den Punkt $(1, 0)$. nicht linear.

f) Drehung um 30° um den Ursprung. $M =$

g) Drehung um 45°, gefolgt von einer Spiegelung an der y-Achse, gefolgt von einer Streckung mit Faktor $\sqrt{2}$.

Aufgabe 2.3 Beschreiben Sie die geometrische Abbildungen, die durch folgende Matrizen beschrieben werden:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Identität (tut nix)

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an y-Achse

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Drehung um 45° Streckung mit $\sqrt{2}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Länge $\sqrt{2}$

Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}))$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

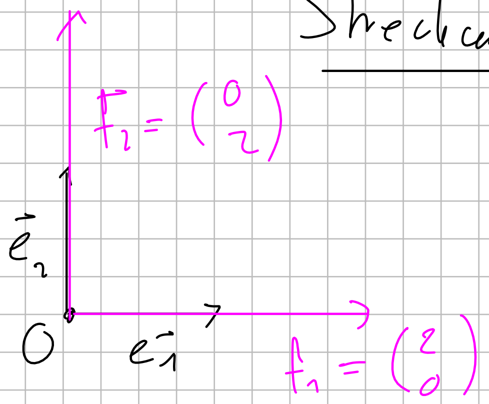
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\vec{f}_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\vec{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underset{\vec{e}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{\vec{f}_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$\vec{f}_2$

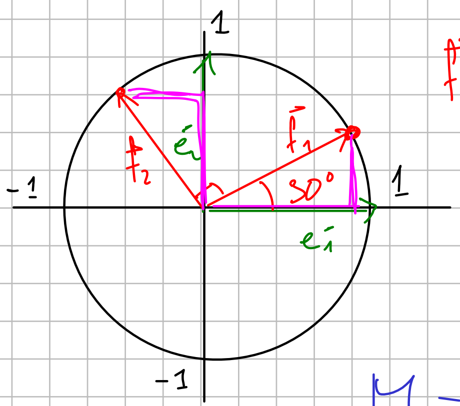
Streckung mit $\lambda = 2$



$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Drehung um 30°



$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(30°) \\ \cos(30°) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um 45°, Spiegelung an y, $\sqrt{2}$

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos(45°) \\ \sin(45°) \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} -\sin(45°) \\ \cos(45°) \end{pmatrix}$$

$$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(45°)$$

Spiegeln

$$f_1' \begin{pmatrix} -c \\ s \end{pmatrix} \quad f_2' \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$$

$1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

Skalieren

$$\vec{f}_1'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_2'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$