1 Brückenkurs Lineare Algebra

1.1 Notationen und Begriffe

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen.

$\mathbb{R}^n$ Menge aller n-dimensionalen Vektoren mit reellen Komponenten. Insbesondere entspricht $\mathbb{R}^2$ der Ebene und $\mathbb{R}^3$ dem Raum.

$f : A \to B$ Eine Funktion bzw. Abbildung f, die den Elementen aus A Elemente in B zuordnet.

$\forall$ Für alle. Z.B. $x^2 > x \ \forall x > 1$.

2 Lineare Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Die «klassische lineare Funktion» $f(x) = mx + q$ ist nicht linear im Sinne der linearen Algebra (ausser für $q = 0$). Es wird darum von *linearen Abbildungen* gesprochen, um die Verwirrung klein zu halten.

2.1 Lineare Abbildungen der Ebene $\mathbb{R}^2$

Streckungen am Ursprung, Drehungen um den Ursprung und Scherungen, die den Ursprung auf sich selbst abbilden sind lineare Abbildungen der Ebene.

Eine solche Abbildung f ist vollständig definiert, wenn die Bilder $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} f_{1,x} \\ f_{1,y} \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} f_{2,x} \\ f_{2,y} \end{pmatrix}$ der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bekannt sind. Es ist $\vec{f_1} = f(\vec{e}_1)$ und $\vec{f_2} = f(\vec{e}_2)$.
Es entsteht so ein neues, eventuell schiefes Koordinatensystem, in dem die Bildpunkte die gleichen Koordinaten wie die Urbildpunkte im ursprünglichen Koordinatensystem haben.

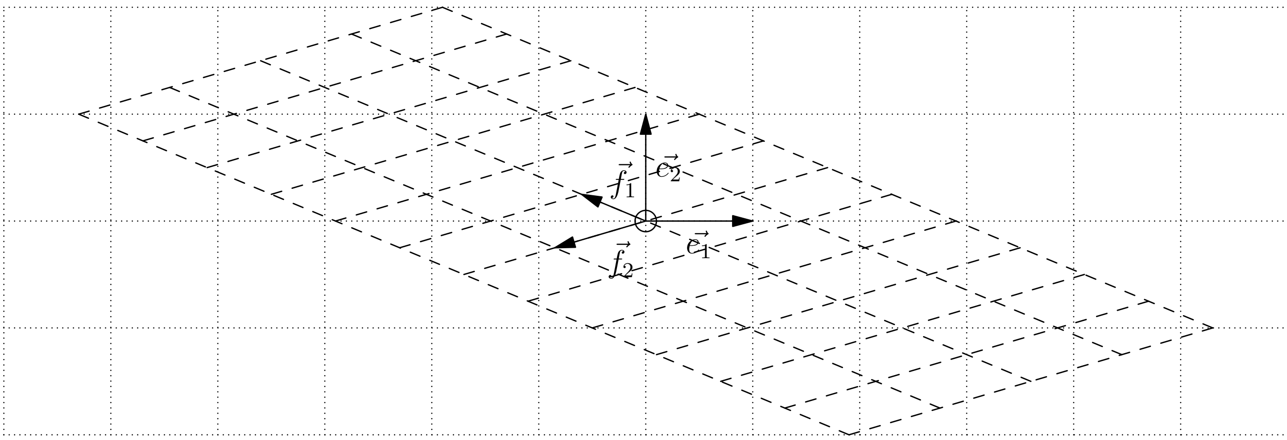

Abbildung 1: Beispiel einer linearen Abbildung anhand einer Koordinatentransformation

Nimmt man konkrete Zahlen für die Vektoren $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ und $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -0.85 \\ -0.25 \end{pmatrix}$ wird ein allgemeiner Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x\vec{e}_1 + v_y\vec{e}_2$ wie folgt abgebildet:

$$f(\vec{v}) = v_x \cdot \vec{f_1} + v_y \cdot f_2 = v_x \cdot \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.25 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} -0.85 \\ -0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6v_x \\ 0.25v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.85v_y \\ -0.25v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6v_x - 0.85v_y \\ 0.25v_x - 0.25v_y \end{pmatrix}$$

Definition 2.1 Lineare Abbildung

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist linear, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(\vec{u}+\vec{v}) &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) && \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \\ f(\lambda \vec{v}) &= \lambda f(\vec{v}) && \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften einer linearen Abbildung wird einsichtlich, dass die lineare Abbildung vollständig mit den Bildern der Einheitsvektoren definiert ist:

$$f(\vec{v}) = f(v_x\vec{e}_1 + v_y\vec{e}_2) = f(v_x\vec{e}_1) + f(v_y\vec{e}_2) = v_x f(\vec{e}_1) + v_y f(\vec{e}_2) = v_x \vec{f_1} + v_y \vec{f_2}$$

Aufgabe 2.1 Beweisen Sie, dass für jede lineare Abbildung gilt: $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

✎

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kann mit einer **Matrix** (plural Matrizen) beschrieben werden. Eine Matrix wird wie ein Vektor mit mehreren Spalten notiert:

$$f(\vec{v}) = f\left(\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_{1,x} & f_{2,x} \\ f_{1,y} & f_{2,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,x} \cdot v_x + f_{2,x} \cdot v_y \\ f_{1,y} \cdot v_x + f_{2,y} \cdot v_y \end{pmatrix}$$

Nimmt man konkrete Zahlen (wie in Abbildung **??** für die Vektoren $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ sieht die Matrix für die Abbildung f wie folgt aus:

$$M = \begin{pmatrix} -0.6 & -0.85 \\ 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}$$

Merke Spalten einer Matrix

Die **Spalten** einer Matrix entsprechen den **Bildern der jeweiligen Einheitsvektoren**.

Eine $n \times m$-Matrix A hat n **Zeilen** und m **Spalten**. Die Komponenten der Matrix A werden mit $a_{i,j}$ notiert, wobei der erste Index i die Zeile und der zweite Index j die Spalte angibt. Man schreibt auch $A = (a_{i,j})$ oder ausführlicher

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,n} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Merke Matrix-Vektor Multiplikation

Eine $n \times n$ Matrix $M = (m_{i,j})$ wird mit einem n-dimensionalen Vektor $\vec{v} = (v_i)$ wie folgt multipliziert:

$$\vec{u} = M \cdot \vec{v} \quad \text{mit} \quad u_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \cdot v_j$$

Visuell stellt man sich den Vektor hochgestellt neben der Matrix vor. Eine Komponente des Resultats erhält man dann als **Skalarprodukt** des Vektors mit der entsprechenden Zeile der Matrix:

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \vdots \\ \downarrow \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ \rightarrow \\ \cdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots \\ \otimes \\ \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Aufgabe 2.2 Bestimmen Sie die Abbildungssmatrizen folgender Abbildungen (falls es sich um eine lineare Abbildung handelt). Sonst erklären Sie, warum es sich nicht um eine lineare Abbildung handelt. *Bestimmen Sie dazu die Bilder der Einheitsvektoren, um die Spalten den Matrix zu erhalten.*

a) Drehung um den Ursprung um 90°.

b) Streckung am Ursprung mit Faktor 2.

c) Spiegelung an der x-Achse.

d) Spiegelung an der 45° Winkelhalbierenden durch den Ursprung.

e) Drehung um 180° um den Punkt $(1, 0)$.

f) Drehung um 30° um den Ursprung.

g) Drehung um 45°, gefolgt von einer Spiegelung an der y-Achse, gefolgt von einer Streckung mit Faktor $\sqrt{2}$.

Aufgabe 2.3 Beschreiben Sie die geometrische Abbildungen, die durch folgende Matrizen beschrieben werden:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Merke Identitätsmatrix

Die Matrix I (manchmal auch Id geschrieben), ist die Matrix der Identitätsabbildung, d.h. jene Abbildung, die jeden Vektor auf sich selbst abbildet. Die Spalten von I sind die Einheitsvektoren, d.h. die Komponenten auf der Diagonale sind 1, alle anderen sind Null:

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.4 Beweisen Sie, dass die Verknüpfung $h(x) = f(g(x))$ zweier linearer Abbildungungen f und g selbst wieder eine lineare Abbildung ist. *D.h. beweisen Sie, dass h die Eigenschaften einer linearen Abbildung hat: $h(u + v) = h(u) + h(v)$ und $h(\lambda v) = \lambda h(v)$.*

Merke Verknüpfungen von Abbildungen

Man notiert auch $h = f \circ g$, gelesen «f nach g», oder «f verknüpft mit g».

Aufgabe 2.5 Gegeben sind jeweils zwei lineare Abbildungen der Ebene $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch ihre Matrizen F und G. Bestimmen Sie die Matrizen H_1 und H_2 der Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$.

a) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Merke Matrix-Matrix Multiplikation

Eine $n \times m$ Matrix $A = (a_{i,j})$ wird mit einer einer $m \times k$-Matrix B wie folgt multipliziert. Das Resultat $C = A \cdot B$ ist eine $n \times k$-Matrix mit

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \cdot b_{l,j}$$

Die Komponenten von C sind also die Skalarprodukte der Zeilenvektoren von A mit den Spaltenvektoren von B. Visuell stellt man sich die Matrix B hochgestellt neben der Matrix A vor. So können die Komponenten von C bequem berechnet werden.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \vdots & \downarrow & \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ \rightarrow \\ \cdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \otimes & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Multiplikation zweier Matrizen entspricht der Verknüpfung zweier linearer Abbildungen und ist damit **nicht kommutativ**, d.h. i.A. ist $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Aufgabe 2.6 Multiplizieren Sie die Matrizen in Aufgabe 2.5 miteinander und bestimmen Sie so die jeweilige Matrix der Verknüpfungen.

3 Lineare Gleichungssysteme und Inverse Matrix

Gegeben ist eine 2×2 Matrix M, ein Vektor aus 2 Unbekannten $\vec{z} = \binom{x}{y}$ und ein Vektor $\vec{c} = \binom{a}{b}$.
Was bedeutet $M \cdot \vec{z} = \vec{c}$?

Frage: Gibt es eine Umkehrabbildung? Wenn ja, nennen wir deren Matrix die inverse Matrix M^{-1} von M. Die Gleichung kann nun auf beiden Seiten von links mit M^{-1} multipliziert werden:

$$\begin{aligned} M \cdot \vec{z} &= \vec{c} & &\mid M^{-1}(\cdot) \\ M^{-1} \cdot M \cdot \vec{z} &= M^{-1} \cdot \vec{c} \\ I \cdot \vec{z} &= M^{-1} \cdot \vec{c} \\ \vec{z} &= M^{-1} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Im Sinne von Abbildungen gesprochen suchen wir einen Punkt (x, y), der nach der Abbildung mit M auf dem Punkt $C = (a, b)$ landet. Ist die Abbildung umkehrbar, dann ist existiert die Lösung und ist eindeutig.

Merke Umkehrbare Abbildungen der Ebene

Eine lineare Abbildung ist umkehrbar, wenn die Spalten der Matrix die Ebene aufspannen, d.h. die Bilder der Einheitsvektoren sind **nicht kollinear**, d.h. linear unabhängig.
Das gleiche gilt sinngemäss für Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definition 3.2 Lineare Unabhängigkeit

Ein Menge von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind **linear unabhängig** wenn die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}$$

für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ausschliesslich die Lösung $\lambda_i = 0$ hat.

Aufgabe 3.7

a) Beweisen Sie, dass wenn vom Nullvektor verschiedene Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, dass es dann einen gibt, der sich als Linearkombination der anderen Vektoren ausdrücken lässt.

b) Beweisen Sie, dass $n+1$ Vektoren, die n-dimensional sind, immer linear abhängig sind.

3.1 Bestimmung der inversen Matrix

Um die Inverse einer Matrix zu bestimmen gibt es mehrere Methoden und Formeln. Einige davon sind nur theoretischer Natur und rechnerisch bei grösseren Matrizen nicht praktikabel. In der Praxis wird wenn immer möglich die Berechnung der inversen Matrix umgangen, weil das einerseits sehr aufwendig ist und andererseits nummerisch instabil sein kann, im Sinne dass sich Rundungsfehler enorm vergrössern können. (Computer rechnen normalerweise auf ca. 17 Stellen genau).

3.1.1 Das Gauss-Jordan Verfahren

Ein praktikable Variante ist das Gauss-Jordan Verfahren.

Um die Inverse A^{-1} einer Matrix A zu bestimmen, sucht man eine Matrix, die die Spaltenvektoren der Matrix A «zurück» auf die Einheitsvektoren abbildet. Umgekehrt bildet auch A die Spaltenvektoren von A^{-1} auf die Einheitsvektoren ab. Sei $\binom{x}{y}$ der erste Spaltenvektor von A^{-1}. Dieser wird von A auf den ersten Einheitsvektor $\binom{1}{0}$ abgebildet. Wir haben also das Gleichungssystem

$$A \cdot \binom{x}{y} = \binom{1}{0}$$

Ändert man die rechte Seite auf den zweiten Einheitsvektor $\binom{0}{1}$, erhält man ein Gleichungssystem für den zweiten Spaltenvektor von A^{-1}.

Die Idee ist, dass man die zwei (bzw. n) Gleichungssysteme auf einmal löst, und zwar mit dem Additionsverfahren.

Dazu schreibt man alle Einheitsvektoren auf die rechte Seite. Die Gleichungen werden dann geschickt multipliziert und Vielfache von Gleichungen zu anderen addiert, bis auf der linken Seite pro Zeile nur noch eine Unbekannte steht. Dann sind die Resultate rechts abzulesen.

Das Gauss-Jordan Verfahren notiert die Unbekannten nicht mehr, sondern nur noch die Matrix A und die Identitätsmatrix daneben.

Das hier vorgestellte Verfahren funktioniert nur, wenn die diagonalenen Komponenten nie Null sind. Wenn eine solche Komponente Null ist, müssten Zeilen so vertauscht werden, dass die diagonale Komponenten nicht mehr Null ist. Ist das nicht möglich, ist die Matrix nicht invertierbar.

Beispiel für das Gauss-Jordan Verfahren Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Damit ist $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ x + 4y \end{pmatrix}$.
Neben der Matrix A wird die Identitätsmatrix notiert.
Rechts davon ist das entsprechende Gleichungssystem zur Veranschaulichung notiert.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcrcr|l} 2x & - & 2y & = & 1 & 0 \\ 1x & + & 4y & = & 0 & 1 \end{array}$$

Zeile 1 mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcrcr|l} 1x & - & 1y & = & \frac{1}{2} & 0 \\ 1x & + & 4y & = & 0 & 1 \end{array}$$

-1 mal Zeile 1 zur Zeile 2 addieren.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcrcr|l} 1x & - & 1y & = & \frac{1}{2} & 0 \\ 0x & + & 5y & = & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Zeile 2 mit $\frac{1}{5}$ multiplizieren:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcrcr|l} 1x & - & 1y & = & \frac{1}{2} & 0 \\ 0x & + & 1y & = & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{array}$$

1 mal Zeile 2 zur Zeile 1 addieren.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcrcr|l} 1x & + & 0y & = & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0x & + & 1y & = & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{array}$$

Man liest ab: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
Die Multiplikation der beiden Matrizen ergibt wie gewünscht die Identitätsmatrix:

$$\begin{array}{cc} \cdot & \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 3.8 Invertieren Sie folgende Matrizen von Hand:

a) $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & -6 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4 Determinante einer $n \times n$ Matrix

Die Determinante $\det(A)$ einer Matrix A ist eine reelle Zahl mit folgenden Eigenschaften:

- $\det(I) = 1$.
- $\det(A)$ ist genau dann nicht Null, wenn die Matrix invertierbar ist.
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- $|\det(A)|$ ist gleich der Parallelogrammsfläche (bzw. Spatvolumen, bzw. Hypervolumen), die durch die Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.
- Das Vorzeichen von $\det(A)$ ist von der Orientierung der Spaltenvektoren bestimmt. $\det(A)$ ist positiv, wenn die Orientierung gleich ist wie die der Einheitsvektoren. D.h. der Drehsinn in 2D, bzw. Rechts-/Linkshändigkeit in 3D.

- Wird ein Vielfaches einer Spalte von A zu einer anderen Spalte addiert, ändert sich die Determinante nicht. Wie sich die Parallelogrammsfläche (etc.) nicht ändert, wenn ein Punkt parallel zur gegenüberliegenden Seite verschoben wird.
- Wird eine Spalte von A mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, multipliziert sich auch $\det(A)$ mit λ. Wie sich die Parallelogrammsfläche (etc.) ändert, wenn eine Seitenlänge (bzw. Kantenlänge etc.) mit λ multipliziert wird.
- Die beiden oberen Punkte sind auf für entsprechende Operationen auf Zeilen gültig. Der Beweis dafür ist theoretischer Natur und liefert keine geometrischen Interpretationsmöglichkeiten.

Aufgabe 4.9 Bestimmen Sie die Determinante einer allgemeinen 2×2-Matrix. *Hinweis: Benutzen Sie das Vektorprodukt zur Berechnung der Fläche und der Orientierung.*

4.1 Determinante einer diagonalen Matrix

Definition 4.3 Diagonale Matrix

Eine Matrix A ist diagonal, wenn alle Komponenten ausserhalb der Diagonalen Null sind, d.h. $a_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$.

Aufgabe 4.10 Bestimmen Sie die Determinante einer diagonalen Matrix.

4.2 Determinante einer Dreiecksmatrix

Definition 4.4 Dreiecksmatrix

In einer **oberen Dreiecksmatrix** sind Komponenten unterhalb der Diagonale Null. Entsprechend ist eine untere Dreiecksmatrix definiert.

Aufgabe 4.11 Zeigen Sie, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalen Komponenten der Matrix ist.

Damit haben wir eine praktikable Methode, um Determinanten von grösseren Matrizen zu berechnen: Die Matrix wird erst **triangularisiert**:

Für $i = 1, \dots, n-1$ wird für alle $j > i$ das $a_{i,j}/a_{i,i}$-fache der Zeile i von der Zeile j subtrahiert. *Sollte $a_{i,i} = 0$ sein, können entweder zwei Zeilen vertauscht und das Vorzeichen einer Zeile gewendet werden, oder eine Zeile addiert werden, damit $a_{i,i} \neq 0$. Ist das nicht möglich, ist die Determinante Null.*

Aufgabe 4.12 Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrizen durch Triangularisierung der Matrix:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

4.3 Matrizielle Betrachtung des Gauss-Jordan Verfahrens

Wir betrachten im folgenden nur $n \times n$-Matrizen. Ziel ist es, das Gauss-Jordan Verfahren und die Methode zur Triangulierung matriziell zu verstehen, d.h. die einzelne Schritte als Multiplikation mit speziellen Matrizen zu begreifen.

Bei diesen Verfahren kann es vorkommen, dass eine diagonale Komponente gleich Null ist und das Verfahren direkt nicht durchführbar ist. In diesen Fällen müssten Zeilen vertauscht werden, so dass da aktuelle diagonale Element nicht Null ist.

Aufgabe 4.13 Bestimmen Sie eine Matrix M, so dass $M \cdot A$ jene Matrix ergibt, die man erhält, wenn man die i-te Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert. Bestimmen sie auch die Determinante und die Inverse dieser Matrix M.

Aufgabe 4.14 Bestimmen Sie eine Matrix M so, dass $M \cdot A$ jene Matrix ergibt, die man erhält wenn man das λ-fache der Zeile i zur Zeile j addiert (mit $i \neq j$). Bestimmen sie auch die Determinante und die inverse dieser Matrix M.

Gauss-Jordan Verfahren Seien M_1, M_2, bis M_k die Matrizen, die den Schritten beim Gauss-Jordan Verfahren für das Invertieren einer Matrix A entsprechen. Es gilt also

$$M_k \cdot M_{k-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot A = I$$

Daraus folgt dass

$$M_k \cdot M_{k-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 = A^{-1}.$$

Triangularisierung einer Matrix Sei A eine Matrix, die mit obigem Verfahren triangularisiert wird. Alle Operationen sind Additionen eines Vielfachen einer Zeile i zu einer Zeile Zeile j, wobei $j > i$. D.h. die Matrizen M_1, M_2, …, M_k, die den einzelnen Operationen entsprechen, sind alle ebenfalls obere Dreickmatrizen.

Aufgabe 4.15 Zeigen Sie, dass Produkt zweier oberer (bzw. unterer) Dreieckmatrizen ebenfalls wieder eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrize ist.

Aufgabe 4.16 Zeigen Sie, dass die Inverse (wenn sie existiert) einer oberen Dreiecksmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist.

***LU*-Zerlegung** Sei M das Produkt der Matrizen, die den Operationen der Triangularisierung einer Matrix A entsprechen. Es gilt also $M \cdot A = U$, wobei U eine obere Dreiecksmatrix (upper triangular) ist. M ist invertierbar und $L = M^{-1}$ ist eine untere Dreiecksmatrix (lower triangular). Wird die obige Gleichung von links mit L multipliziert erhält man

$$A = L \cdot U$$

Diese Zerlegung ist sehr praktisch, weil ein Gleichungssystem mit einer Dreiecksmatrix sehr einfach durch Einsetzen zu lösen ist. Damit die das Gleichungssystem mit A durch zweifaches Lösen eines Gleichungssystems (erst mit U, dann L) mit Dreiecksmatrizen zu lösen.

Die Zerlegung ist nicht eindeutig, kann aber so gewählt werden, dass eine der Dreiecksmatrizen nur Einsen auf der Diagonalen hat. Das hat den Vorteil, dass L und U in nur einer Matrix gespeichert werden können.

Hat A weitere mathematische Eigenschaften, können L und U so gewählt werden, dass $L = U^t$ (die an der Diagonale gespiegelte Matrix). Man spricht dann von der Cholesky-Zerlegung. Diese Zerlegung bietet nummerisch viele Vorteile, was die Rechengenauigkeit anbelangt.

5 Translation

Aufgabe 5.17 Warum ist eine Translation keine lineare Abbildung?

Betrachtet man anstatt der 2-dimensionalen x/y-Ebene die Ebene $z = 1$ im Raum, können darin Translationen als lineare Abbildung des Raumes formuliert werden.

Die Punkte in der Ebene $z = 1$ haben alle die Koordinaten $P = (x, y, 1)$. Die Idee ist nun, dass der dritte Einheitsvektor auf den Translationsvektor $(a, b, 1)$ abgebildet wird. Die Matrix sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass die 2x2 Matrix links oben die Identitätsmatrix ist. Diese kann natürlich durch eine beliebige Transformationsmatrix ersetzt werden (Skalierung, Drehung, Spiegelung, etc.), die dann *vor* der Translation angewendet wird.

Auf diese Art und Weise können sämtliche *affinen Transformationen* der Ebene mit einer einzigen 3x3 Matrix beschrieben werden.

Analog dazu können die Transformationen des Raumes mit einer 4x4 Matrix beschrieben werden. Grafikkarten sind auf genau diese Operationen optimiert.

5.0.1 Mapping von Parallelogrammen

Die Anwendung kommt von der Programmierung einer Steuerung einer Christbaumbeleuchtung, wo jede Lampe individuell in Helligkeit und Farbe angesteuert werden kann. Die Lage der Lampen wird durch eine Webcam aus verschiedenen Positionen berechnet. Danach können von einem Blickpunkt aus Bilder auf den Christbaum gerechnet werden.

Dabei muss an verschiedenen Stellen das Problem gelöst werden, wie die Punkte von einem Parallelogramm auf ein anderes umgerechnet werden können (meist achsenparallele Rechtecke, die Methode ist aber allgemeiner).

Die Parallelogramme werden mit 3 Vektoren beschrieben: Zwei Richtungsvektoren für die Seiten und einen Ortsvektor für den entsprechenden Eckpunkt. Für ein Parallelogramm P_1 mit Eckpunkten $A_1B_1C_1D_1$ sind also die beiden Richtungsvektoren $\vec{A_1B_1}$ und $\vec{A_1D_1}$ sowie der Ortsvektor $\vec{OA_1}$ gegeben.

Gesucht ist eine lineare Abbildung F als 3x3-Matrix, die ein Punkt in P_1 dem entsprechenden Punkt in P_2 zuordnet.

Dazu betrachten wird die Abbildungen G_i, die einem Punkt E im Einheitsquadrat den entsprechenden Punkt in P_i zuordnet.

Die 3x2 Matrix von G_i kann sofort aufgeschrieben werden (wobei die ersten beiden Zeilen als Vektoren zusammengefasst sind):

$$G_i = \begin{pmatrix} \vec{A_iB_i} & \vec{A_iD_i} & \vec{OA_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D.h. $G_i \cdot \vec{OE}$ sind alle Punkte von P_1, wenn E alle Punkte des Einheitsquadrats durchläuft (wobei alle Punkte eine dritte Koordinate haben, die konstant 1 ist).

Die gesuchte Abbildung F bildet Punkte von P_1 auf Punkte von P_2 ab, d.h.

$$F \cdot G_1 \cdot \vec{OE} = G_2 \cdot \vec{OE} \qquad \forall E$$

Da die Gleichung für alle E Gültigkeit hat gilt:

$$F \cdot G_1 = G_2$$

Und wenn die Matrix G_1 invertierbar ist (was sie für nicht-degenerierte Parallelogramme immer ist), kann obige Gleichung *von rechts* mit G_1^{-1} multipliziert werden und wir erhalten:

$$F = G_2 \cdot G_1^{-1}$$

Bildet man einen Punkt von P_1 mit G_1^{-1} ab, erhält man ein Bild im Einheitsquadrat, das mit G_2 auf P_2 abgeildet wird.

In Python, mit der «numpy»-Library sieht das dann z.B. wie folgt aus:

```
# O Koordinatensystem auf der Raumebene
# B Koordinatensystem auf dem Bild der Webcam
# Abbildung vom Webcambild auf das Koordinatensystem der Raumebene
F = O*np.linalg.inv(B)
```

Wobei es hier nur darum geht zu zeigen, dass wenn eine Lösung mit Hilfe von linearer Algebra beschrieben werden kann, dass dann ein Arsenal von effizienten Werkzeugen bereitssteht, die Berchnungen auszuführen.

5.1 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 2.2 ex-abbildungsmatrizen-bestimmen

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) Der Ursprung wird nicht auf den Ursprung abgebildet, darum ist es keine lineare Abbildung.

f) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 2.3 ex-abbildung-aus-matrix-bestimmen

a) Identität, d.h. die Abbildung, die "nichts"tut.
b) Spiegelung an der y-Achse.
c) Drehung um $+45°$ und Streckung um Faktor $\sqrt{2}$.
d) Spiegelung and der $45°$-Winkelhalbierenden.

Lösung zu Aufgabe 2.4 ex-verknupfung-ist-linear

$$\begin{aligned} h(u+v) = f(g(u+v)) = f(g(u)+g(v)) = f(g(u)) + f(g(v)) &= h(u) + h(v) \\ h(\lambda v) = f(g(\lambda v)) = f(\lambda g(v)) = \lambda f(g(v)) &= \lambda h(v) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.5 ex-matrix-von-verknuepfung

Für diese Aufgabe gibt es mehrere Herangehensweisen. Man könnte den allgemeinen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ abbilden und die Matrix dann ablesen, oder man könnte die Einheitsvektoren abbilden, was wohl schneller geht. Oder man multipliziert einfach die beiden Matrizen, wohin die Aufgabe natürlich führen soll.

a) H_1: Matrix von $f \circ g$.
Erste Spalte: $f(g(e_1)) = f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Zeite Spalte: $f(g(e_2)) = f(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.
Damit ist $H_1 = \begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$.

H_2: Matrix von $g \circ f$.
Erste Spalte: $g(f(e_1)) = g(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
Zeite Spalte: $g(f(e_2)) = g(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Damit ist $H_2 = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

b) H_1: Matrix von $f \circ g$.
Erste Spalte: $f(g(e_1)) = f(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.
Zeite Spalte: $f(g(e_2)) = f(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.
Damit ist $H_1 = \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{pmatrix}$.

H_2: Matrix von $g \circ f$.
Erste Spalte: $g(f(e_1)) = g(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.
Zeite Spalte: $g(f(e_2)) = g(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.
Damit ist $H_2 = \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 3.7 ex-lineare-unabhaengikeit-beweise

a) Linear abhängig heisst, es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ nicht alle Null so, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \vec{0}$. Sei j ein Index so, dass $\lambda_j \neq 0$. Die Gleichung kann umgeformt werden:

$$\sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot v_i = -\lambda_j v_j$$

$$\sum_{i \neq j} -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \cdot v_i = v_j$$

b) Wir nehmen an, $v_1, \ldots, v_n$ seien linear unabhängig und $v_{n+1} \neq \vec{0}$ (sonst gibt es nichts mehr zu beweisen). Man betrachtet die lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deren Matrix M die Kolonnen v_1 bis v_n hat. Da diese linear unabhängig sind, ist die Abbildung umkehrbar (der gesamte Raum wird aufgespannt). Damit hat die Gleichung

$$M \cdot \vec{\lambda} = v_{n+1} = \sum_i \lambda_i v_i$$

genau eine Lösung.
$M \cdot \vec{\lambda} = \sum_i \lambda_i v_i = v_{n+1}$ ist eine Linearkombination, die zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 3.8 ex-matrix-invertieren

a)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeile 1 mit $-\frac{1}{4}$ multiplizieren:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-1 mal Zeile 1 zur Zeile 2 addieren.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

Zeile 2 mit -4 multiplizieren:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{4}$ mal Zeile 2 zur Zeile 1 addieren.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeile 1 mit $\frac{7}{3}$ multiplizieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\frac{2}{7}$ mal Zeile 1 zur Zeile 2 addieren.
$\frac{6}{7}$ mal Zeile 1 zur Zeile 3 addieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-2 mal Zeile 2 zur Zeile 1 addieren.
-2 mal Zeile 2 zur Zeile 3 addieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Zeile 3 mit $\frac{3}{7}$ multiplizieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$

-2 mal Zeile 3 zur Zeile 1 addieren.
$\frac{2}{3}$ mal Zeile 3 zur Zeile 2 addieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$

Lösung zu Aufgabe 4.9 ex-determinante-von-2x2-matrizen-herleiten

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir suchen also die Masszahl der orientierten Parallelogrammsfläche, aufgespannt durch die

Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Länge von $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ entspricht der Fläche, das Vorzeichen der dritten (und einzigen von Null verschiedenen Komponente) die Orientierung. Die dritte Komponente von $\vec{w}$ ist also genau $\det(A)$. Und damit ist

$$\det(A) = a \cdot d - c \cdot b.$$

Lösung zu Aufgabe 4.10 ex-determinante-einer-diagonalen-matrix

Im Falle einer Diagonalen Matrix sind alle Spalten Vielfache der Einheitsvektoren, es wird also ein Rechteck, bzw. Quader, bzw. Hyperquader aufgespannt. Dessen Fläche, bzw. Volumen, bzw. Hypervolumen ist gleich dem Produkt der Seitenlängen, also

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Lösung zu Aufgabe 4.11 ex-determinante-einer-dreiecks-matrix

Wir nehmen an A sei eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j$.

Gibt es ein $a_{i,i} = 0$, dann bilden die ersten i Spalten i Vektoren mit maximal $(i-1)$ von Null verschiedenen Komponenten, sind also linear abhängig und damit ist die Determinante Null.

Ansonsten verändern wir die Matrix wie folgt. Für $i = 2, \dots n$ wird für alle $j < i$ das $a_{j,i}/a_{i,i}$-Fache der Zeile i von der Zeile j abgezogen. Diese Operationen ändern den Wert der Determinanten nicht. Man erhält so eine digaonale Matrix mit derselben Determinanten, also gleich dem Produkt der diagonalen Komponenten (die beim Modifizieren der Matrix nicht verändert wurden).

Lösung zu Aufgabe 4.12 ex-determinante-von-hand

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Das 4-fache der Zeile 1 von der Zeile 2 subtrahieren.
Das 9-fache der Zeile 1 von der Zeile 3 subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Das 3-fache der Zeile 2 von der Zeile 3 subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\det(A) = 1 \cdot -2 \cdot 1 = -2$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Das $-\frac{3}{2}$-fache der Zeile 1 von der Zeile 2 subtrahieren.
Das 2-fache der Zeile 1 von der Zeile 3 subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Das -2-fache der Zeile 2 von der Zeile 3 subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist singulär, die Determinante ist Null Damit ist $\det(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Das 2-fache der Zeile 1 von der Zeile 2 subtrahieren.
Das -1-fache der Zeile 1 von der Zeile 3 subtrahieren.
Das 1-fache der Zeile 1 von der Zeile 4 subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & -11 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

Das $\frac{1}{5}$-fache der Zeile 2 von der Zeile 3 subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{33}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

Das $-\frac{35}{33}$-fache der Zeile 3 von der Zeile 4 subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{33}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$$

Damit ist $\det(A) = 1 \cdot -5 \cdot \frac{33}{5} \cdot \frac{7}{11} = -21$

Lösung zu Aufgabe 4.13 ex-zeilen-multiplikation

Die Matrix ist diagonal mit $m_{j,j} = 1$ und $j \neq i$ und $m_{i,i} = \lambda$. Die Determinante ist λ, die inverse ist gleich, bis auf $m_{i,i} = \frac{1}{\lambda}$.

Lösung zu Aufgabe 4.14 ex-zeilen-addition

M ist die Identitätsmatrix mit dem zusätzlichen Koeoffizienten $m_{j,i} = \lambda$. Die Determinante ist 1, die Inverse ist die gleiche Matrix bis auf $m_{j,i} = -\lambda$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad j & \quad & i \end{array} \\ j & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\lambda\cdots 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{array}$$

Die Koeffizienten $b_{j,k}$ der Matrix $B = M \cdot A$ sind

$$b_{j,k} = \sum_{l=1}^{n} m_{j,l} \cdot a_{l,k} = m_{j,j} \cdot a_{j,k} + m_{j,i} \cdot a_{i,k} = a_{j,k} + \lambda a_{i,k}.$$

Also wurde damit das λ-fache der Zeile i zur Zeile j addiert. Alle anderen Zeilen bleiben unverändert.

Lösung zu Aufgabe 4.15 ex-dreiecksmatrixprodukte

Seien $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$ zwei obere Dreieckmatrizen der Dimension $n \times n$. D.h. $a_{i,j} = 0$ und $b_{i,j} = 0$ für alle $i > j$. Zu zeigen ist, dass $C = A \cdot B$ ebenfalls eine obere Dreieckmatrix ist, d.h. dass $c_{i,j} = 0$ für alle $i > j$.

Sei also $i > j$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} \underbrace{a_{i,k}}_{0 \text{ weil } i>k} \cdot b_{k,j} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} \cdot \underbrace{b_{k,j}}_{0 \text{ weil } k \geq i > j} = 0$$

Womit also C ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist. Für untere Dreiecksmatrizen läuft der Beweis analog.

Lösung zu Aufgabe 4.16 ex-inverse-dreiecksmatrix

Wird eine obere Dreiecksmatrix A mit dem Gauss-Jordan Verfahren invertiert, werden nur Vielfachen von Zeilen i von Zeilen j mit $i > j$ subtrahiert, d.h. die entsprechenden Matrizen für diese Operationen sind untere Dreiecksmatrizen. Deren Produkt ist gleich A^{-1} und wiederum eine untere Dreiecksmatrix.