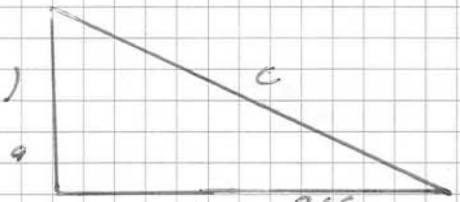
Folgen und Reihen ohne Hilfsmittel

1)

Von der ersten Ecke aus 10
Von " zweiten " " noch 9
⋮
Von der zehnten " noch 1

$$10+9+8+\dots+1=\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{10\cdot 11}{2}=\underline{\underline{55}}$$

2)



$$b=\frac{a+c}{2}$$

Umfang: $a+\frac{a+c}{2}+c=39\rightarrow 3a+3c=78\rightarrow a+c=26$
$\rightarrow b=13$

Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$

$$a^2+13^2=(26-a)^2$$

$$\cancel{a^2}+13^2=26^2-52a+\cancel{a^2}$$

$$52a=26^2-13^2=507$$

$$a=9\tfrac{3}{4}$$

$$\underline{a=9\tfrac{3}{4}}\qquad \underline{b=13}\qquad \underline{c=16\tfrac{1}{4}}$$

$$A=a\cdot b:2=\underline{\underline{63\tfrac{3}{8}}}$$

3) geom. Folge: $r_{n+1}=r_n\cdot\frac{4}{5}$ $\qquad q=\frac{4}{5}$

$r_1=10\quad r_2=8\qquad r_n=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot 10$

Im Grenzfall:

$$0{,}1<\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot 10$$

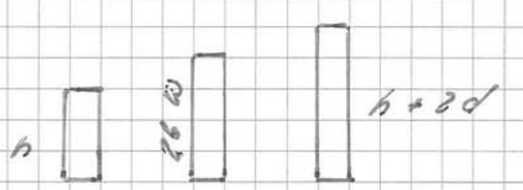
$$\frac{1}{100}<\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\ln\left(\frac{1}{100}\right)<(n-1)\cdot\ln\left(\frac{4}{5}\right)\rightarrow n>\underline{\underline{\frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}+1}}$$

b) $s_n = l_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$$s = \lim_{n \to \infty} \frac{l_1}{1-q} = \frac{10 \cdot \pi\,cm}{1 - \frac{4}{5}} = 10 \cdot \pi\,cm \cdot \frac{5}{1} = \underline{\underline{50\,\pi\,cm}}$$

4)



am Anfang:

$$h + (h+d) + (h+2d) = 78$$

$$3h + 3d = 78 \rightarrow h + d = 26 \rightarrow d = 26 - h \ (I)$$

nach dem Umbau:

$$h+4 \xrightarrow{\cdot q} 18 \xrightarrow{\cdot q} h+2d+4$$

mit (I) ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$(h+4) \cdot q = 18 \quad (II) \qquad \rightarrow \quad q = \frac{18}{h+4}$$

$$18 \cdot q = h + 2 \cdot (26 - h) + 4 \quad (III) \rightarrow \quad q = \frac{56 - h}{18}$$

$$\rightarrow \frac{18}{h+4} = \frac{56-h}{18} \rightarrow 324 = (56 - h) \cdot (h+4)$$

$$\rightarrow 324 = 56h + 224 - h^2 - 4h$$

$$100 = -h^2 + 52h$$

$$\rightarrow h^2 - 52h + 100 = 0$$

$$\rightarrow (h-2)(h-50) = 0$$

$\rightarrow h = 2 \quad d = 24 \quad q = 3$ oder $h = 50 \quad d = -24 \quad q = \frac{1}{3}$

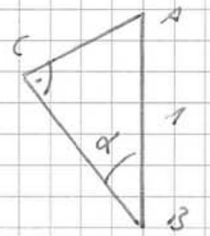
Turmhöhen: $\underline{\underline{2,\ 26,\ 50}}$

5) $\frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{125}{216} + \ldots$

ist eine geometrische Reihe mit $|q| = \frac{5}{6} < 1$,
damit konvergiert die Reihe.

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{5}}$$

6)



$$\sin\alpha = 0{,}8 = \frac{AC}{1} \rightarrow AC = 0{,}8$$

$$BC^2 = 1^2 - 0{,}8^2 = 0{,}36 \quad \text{(Pythagoras)}$$

$$BC = 0{,}6$$

Strecken bilden eine GF mit $q = 0{,}6$

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-0{,}6} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

7) $l_{tot} = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots = \frac{D_1 \cdot \pi}{2} + \frac{D_2 \cdot \pi}{2} + \ldots$

$$= \frac{\pi}{2}(D_1 + D_2 + D_3 + \ldots) = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot (r_1 + r_2 + \ldots)$$

$\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$

$$l_{tot} = \pi \cdot \frac{r_1}{1-q} = \pi \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{2\pi}}$$

6) Mittelpunkte liegen bei $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$x_1 = r_1 \qquad x_2 = 2 \cdot r_1 - r_2 \qquad x_3 = 2r_1 - 2r_2 + r_3$

$x_4 = 2r_1 - 2r_2 + 2r_3 - r_4$

$$x_n = 2r_1 - 2r_2 + 2r_3 - \ldots \pm r_n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \cdot \frac{r_1}{1+\frac{3}{4}} \pm 0 = \frac{2 \cdot 0{,}5}{\frac{7}{4}} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}}$$

$q = -\frac{3}{4} \qquad r_n \approx 0$