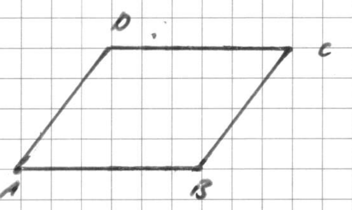
Vektorgeometrie mit Hilfsmittel

1)



$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{B = (-2/8/5)}}$

b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{|0 - 24 - 7|}{\sqrt{41}\sqrt{193}} \quad \varphi = 110{,}39° \rightarrow \underline{\underline{\varphi' = 69{,}61°}}$$

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -21 \\ 36 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \underline{\underline{41{,}69}}$

d) Normalvektor dieser Ebene ist $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -21 \\ 36 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung der Ebene:

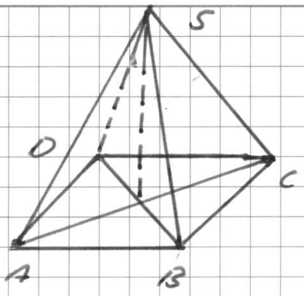
$E: -x - 21y + 36z + d = 0$

Punkt A einsetzen, liefert $d = -14$

$\rightarrow E: -x - 21y + 36z - 14 = 0$

HNF von E: $\frac{1}{41{,}69}(-x - 21y + 36z - 14) = 0$

$\rightarrow d = \left|\frac{-14}{41{,}69}\right| = \underline{\underline{0{,}336}}$

a) 

$A = (3|5|5) \quad B = (1|1|1) \quad C = (5|3|-3)$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{D = (7|7|1)}}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{AD} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix}$

$|\vec{h}| \overset{!}{=} 3 \;\rightarrow\; \vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M_{AC} = (4|4|1) \qquad \vec{OS} = \vec{OM_{AC}} + \vec{h} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S = (10|-2|4)}}$

$\vec{OS'} = \vec{OM_{AC}} - \vec{h} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S' = (-2|10|-2)}}$

c) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{AC} \cdot \vec{AS}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{AS}|}$ mit $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{14 + 14 + 8}{\sqrt{99}\,\sqrt{72}} = 0{,}426 \;\rightarrow\; \underline{\underline{\varphi = 64{,}76°}}$

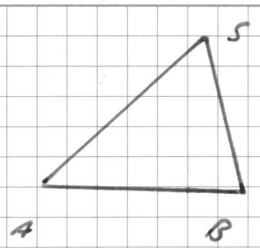
d) $M_{AB} = (2|3|3) \qquad \vec{M_{AB}S} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen $\vec{BC}$ und $\vec{M_{AB}S}$:

$\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{90}\,\sqrt{36}} = 0{,}316$

$\underline{\underline{\varphi = 71{,}6°}}$

3)



$\vec{AS} = \begin{pmatrix}10\\-5\\0\end{pmatrix}$ $\vec{BS} = \begin{pmatrix}6\\-8\\0\end{pmatrix}$ $\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AB} \cdot \vec{BS} = 24 - 24 + 0 = 0$!

$\rightarrow \vec{AB}$ und $\vec{BS}$ stehen rechtwinklig!

$|\vec{AB}| = 5$ $|\vec{BS}| = 10$ $|\vec{AS}| = 11{,}18$

b) $\vec{AB} \times \vec{BS} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\-8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-50\end{pmatrix}$ um Faktor 50 kürzen

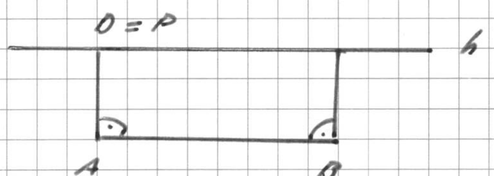
$\vec{n_E} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $E: -z + d = 0$ A einsetzen liefert

$E: -z - 2 = 0$

c) $g: \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren sind gleich, also sind die Geraden parallel. Liegt $P = (5/8/3)$ auf g? Gibt es ein t, so dass

$1 + 4t = 5$
$5 + 3t = 8$
$-2 = 3$ ← nicht möglich, $P \notin g$, g und (AB) sind echt parallel. Abstand = 5

d)



$h: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$

Ein Punkt auf h hat die Koordinaten

$P = (5 + 4t / 8 + 3t / 3)$ $\vec{AP} = \begin{pmatrix}4+4t\\3+3t\\5\end{pmatrix}$

$\vec{AP} \cdot \vec{AB} \overset{!}{=} 0 = (4+4t) \cdot 4 + (3+3t) \cdot 3 + 0 = 16 + 16t + 9 + 9t$

$\rightarrow t = -1$ $D = (1/5/3)$

$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\\3\end{pmatrix}$ $C = (5/8/3)$

4) a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\-6\\10\end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-6\\10\end{pmatrix}$

$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\5\\16\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\-5\\3\end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $0 + 2t = -7 + 5s$

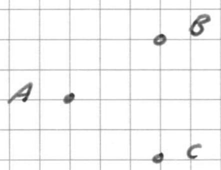
$+ \ (4 - 6t = 5 - 5s)$

$4 - 4t = -2 \quad \rightarrow \underline{t = 1{,}5} \quad \underline{s = 2}$

$\underline{\underline{S = (3/-5/22)}}$

$\vec{OS} = \vec{OA} + 1{,}5\,\vec{AB}$

S liegt ausserhalb der Strecke AB.



b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\-6\\10\end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix}-17\\11\\3\end{pmatrix}$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix}-18 - 110\\-170 - 6\\22 - 102\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-128\\-176\\-80\end{pmatrix}$

Dieser Vektor lässt sich verkürzen um Faktor 16.

$\rightarrow n_F = \begin{pmatrix}8\\11\\5\end{pmatrix}$ $F: 8x + 11y + 5z + d = 0$

Punkt A einsetzen, liefert $44 + 35 + d = 0 \rightarrow d = -79$

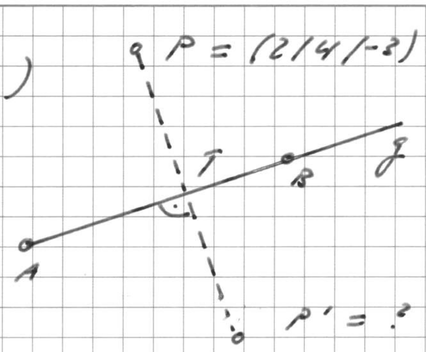
$\underline{\underline{F: 8x + 11y + 5z - 79 = 0}}$

Winkel zwischen $\vec{n_E}$ und $\vec{n_F}$:

$\vec{n_E} \cdot \vec{n_F} = |\vec{n_E}| \cdot |\vec{n_F}| \cdot \cos\varphi$

$\rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\vec{n_E} \cdot \vec{n_F}}{|\vec{n_E}| \cdot |\vec{n_F}|} = \dfrac{30}{32{,}4} \rightarrow \underline{\underline{\varphi = 22{,}21°}}$

5)



$g = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

Ein Punkt auf g hat die Koordinaten $T = (2t|4+2t|1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{PT} \overset{!}{=} 0$ (weil sie rechtwinklig stehen), $\vec{PT} = \begin{pmatrix}2t-2\\2t\\4\end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2t-2\\2t\\4\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \rightarrow 4t-4+4t \overset{!}{=} 0$

Fusspunkt

$\rightarrow t = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{T = (1|5|1)}$

$\vec{PT} = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} \qquad \vec{OP'} = \vec{OT} + \vec{PT} = \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P' = (0|6|5)}}$

6) Schnittpunkt von a und b: $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$

erste Zeile liefert $2 = -2 + 4s \rightarrow \underline{s = 1}$

dritte " " $t = -4 + 8s \rightarrow \underline{t = 4}$

$\underline{\underline{D = (2|3|4)}}$

b) $\left|k\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}\right| = 4{,}5 \rightarrow \sqrt{k^2\cdot 16 + k^2\cdot 1 + k^2\cdot 64} = 4{,}5$

$\rightarrow k\cdot\sqrt{16+1+64} = 4{,}5 \rightarrow \underline{k = \frac{1}{2}}$

$\vec{OC} = \vec{OD} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3{,}5\\8\end{pmatrix}$ $\underline{\underline{C = (4|3{,}5|8)}}$

c) $4x + y + 8z + d = 0$ Punkt C einsetzen

$16 + 3{,}5 + 64 + d = 0 \rightarrow d = -83{,}5$

$\underline{\underline{E: 4x + y + 8z - 83{,}5 = 0}}$