Vektorgeometrie ohne Hilfsmittel

1) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E: \; x + 2y - 5z + 9 = 0$

a) Durchstosspunkt:

$-2 + 3t + 2(-1 + t) - 5(4 - 2t) + 9 = 0$

$-2 + 3t - 2 + 2t - 20 + 10t + 9 = 0$

$-15 + 15t = 0 \rightarrow \underline{t = 1}$

$P = (-2 + 3 \,/\, -1 + 1 \,/\, 4 - 2) = \underline{\underline{(1/0/2)}}$

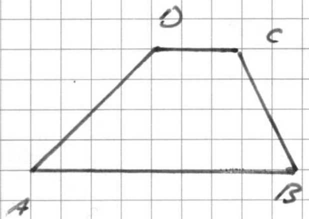
b) Abstand des Punktes von der Geraden

$d = \dfrac{|\vec{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ mit $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1+1 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ -3 + 8 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $|\vec{AP} \times \vec{v}| = \sqrt{42}$

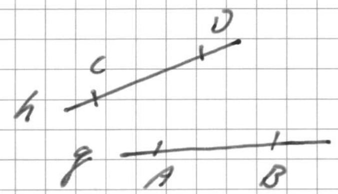
$|\vec{v}| = \sqrt{14}$ $d = \dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{42}{14}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

2)



$\vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6.5 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{C = (3/0/6.5)}}$

3)



$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}}$ $h: \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}}$

Da $\vec{v_1} \neq k \cdot \vec{v_2}$ sind sie nicht parallel. Zwei Geraden in der Ebene, die nicht parallel sind, müssen sich schneiden.

Schnittwinkel: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = 0$, weil $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\rightarrow$ $\underline{\underline{\varphi = 90°}}$

Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $1 + 4t_1 = 8$ $\qquad\rightarrow$ $t_1 = \frac{7}{4}$

$1 = 6 - 10t_2$ $\qquad t_2 = \frac{1}{2}$

$\underline{\underline{P = (8/1)}}$

4) $E: 6x - 2y + 9z = -15$ und $F: 6x - 2y + 9z = 18$

Untersuche die Normalvektoren

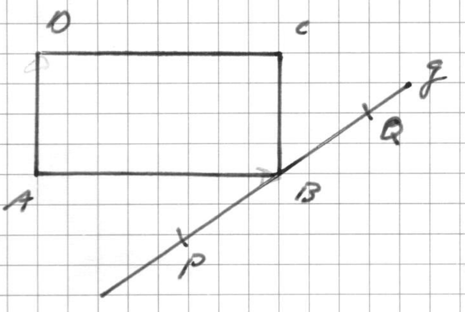
$\vec{n}_E = \begin{pmatrix}6\\-2\\9\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix}6\\-2\\9\end{pmatrix}$ da $\vec{n}_E = \vec{n}_F$, sind die Ebenen parallel.

Wähle irgend einen Punkt auf E und berechne seinen Abstand zu F, z. B. $P = (1/15/1)$

HNF von F: $\frac{1}{11}(6x - 2y + 9z - 18 = 0)$

P einsetzen, liefert $\left|\frac{1}{11}\cdot(6 - 30 + 9 - 18)\right| = \underline{\underline{3}}$

5)



$g = \begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

$B = (8+t/6+3t/2-2t)$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix}4+t\\5+3t\\-3-2t\end{pmatrix}$

Weil $\vec{AD} \perp \vec{AB}$ muss das Skalarprodukt gleich null sein:

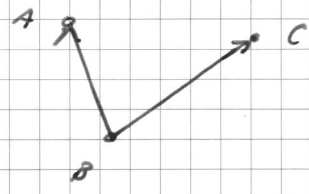
$3\cdot(4+t) + 4(5+3t) - 2(-3-2t) \overset{!}{=} 0$

$12 + 3t + 20 + 12t + 6 + 4t = 0$

$38 + 19t \rightarrow t = -2$ $\quad \underline{\underline{B = (6/0/6)}}$ $\quad \underline{\underline{C = (9/4/4)}}$

b) E in HNF: $\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$

$$d = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

b) 

Normalvektor von F steht senkrecht auf $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F: x + 2y + 0z + d = 0$ Punkt A einsetzen

liefert $d = 0$ $\quad F: x + 2y = 0$

Richtungsvektor der Schnittgeraden ist parallel zu $\vec{n}_E \times \vec{n}_F$

$$\vec{n}_E \times \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Schnittpunkt der Ebenen liegt bei $P = (0|0|1)$

$$\rightarrow \underline{\underline{g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

7) a) Sie ist parallel zur xy-Ebene, weil Richtungsvektor parallel zur xy-Ebene ist.

b) g muss senkrecht stehen zum Normalvektor von E, d.h.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 = 4 + 5 + 3a \rightarrow a = -3$$

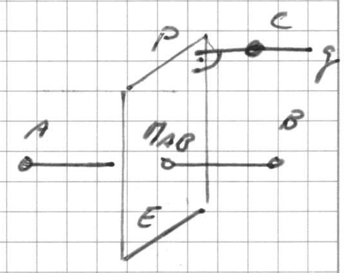
$$\underline{\underline{g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

c) $P = (1|2|3)$ einsetzen in HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{14}}(2x - y + 3z - 7)$

liefert $\underline{\underline{d = \frac{2}{\sqrt{14}}}}$

8) P liegt auf der Mittelsenkrechten-Ebene von A und B. $\overrightarrow{AB}$ ist Normalvektor dieser Ebene:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-5\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad$ $M_{AB} = (-0,5/-2/3,5)$



$E: -5x - 2y - 3z + d = 0$

M_{AB} einsetzen, liefert $d = 4$

$E: -5x - 2y - 3z + 4 = 0$

Fälle das Lot von C auf E, indem man den Schnittpunkt von g mit E bestimmt. g hat als Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}9\\4\\9\end{pmatrix}}_{=C} + t\begin{pmatrix}-5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

E geschnitten mit g liefert:

$$-5(9-5t) - 2(4-2t) - 3(9-3t) + 4 = 0$$
$$-45 + 25t - 8 + 4t - 27 + 9t + 4 = 0$$
$$-76 + 38t = 0 \rightarrow t = 2$$

$$\rightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}9\\4\\9\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-5\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P = (-1/0/3)}}$$