Differentialrechnung mit Hilfsmittel

1) $f(x) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{6}x - 1\right) \rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \quad \underline{\underline{x_2 = 6}}$

Extremalpunkte: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x \overset{!}{=} 0$

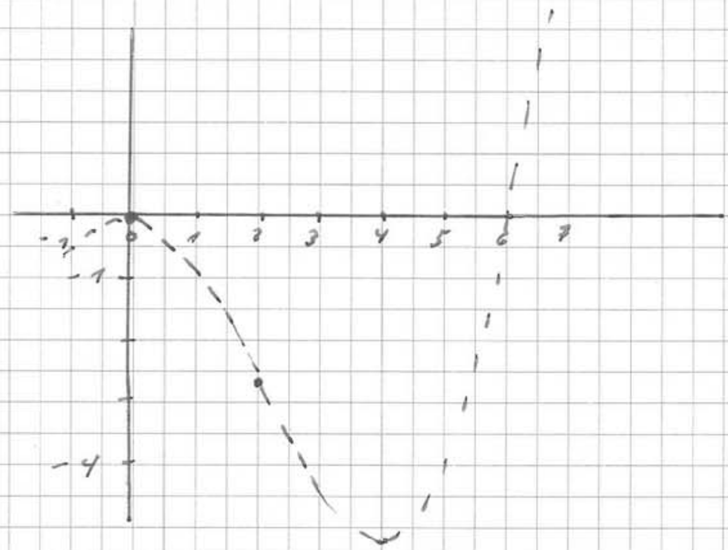
$= x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0 \rightarrow x_{E1} = 0 \quad x_{E2} = 4$

$f''(x) = x - 2$, $f''(0) < 0 \rightarrow$ <u>Maximum bei $x = 0$</u> $y = 0$

$f''(4) > 0 \rightarrow$ <u>Minimum bei $x = 4$</u> $y = -\frac{16}{3}$

Wendepunkt:

$f''(x) = x - 2 \overset{!}{=} 0 \rightarrow$ Wendepunkt bei $x = 2$ $y = -\frac{8}{3}$



2) $f'(x) = \dfrac{-4\cdot(6x^2 + mx + 8)}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow 6x^2 + mx + 8 = 0$

$\xrightarrow{TR} m = \dfrac{-2(3x^2 + 4)}{x}$

$x \notin \{-2, 2, 0\}$

3) $f'(x) = 2 - e^{1-x} \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = 1 - \ln(2) \underline{\underline{\approx 0,307}}$

b) $f'(0) = 2 - e^{1} \approx -0,718 \rightarrow \alpha = -35,69°$

Winkel gegenüber der y-Achse ist $90° - 35,69° = \underline{\underline{54,31°}}$

4) $y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2}$ $\quad y' = \frac{x^3 - bx - 2c}{x^3}$

P liegt auf der Kurve: $-2 = \frac{(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c}{(-1)^2}$

$\rightarrow 0 = 1 + a - b + c \quad (I)$

Steigung ist $m = -1$ bei P:

$-1 = \frac{(-1)^3 + b - 2c}{(-1)^3} \rightarrow 0 = -2 + b - 2c \quad (II)$

Nullstelle bei $x = 1$

$0 = \frac{1 + a + b + c}{1} \rightarrow 0 = 1 + a + b + c \quad (III)$

(I) − (III) liefert $-2b = 0 \rightarrow \underline{\underline{b = 0}}$ (II) liefert $\underline{\underline{c = -1}}$

(III) liefert $0 = 1 + a - 1 \rightarrow \underline{\underline{a = 0}}$

5) $e^x = e^{2-x} \rightarrow x = 2 - x \rightarrow x = 1 \quad \underline{\underline{S(1/e)}}$

6) Steigung der Geraden:

$f_1'(x) = e^x \quad f_1'(1) = e \approx 2{,}718$

Gerade geht durch den Punkt S:

$y = mx + q \rightarrow e \cdot x + q = e \rightarrow q = 0$

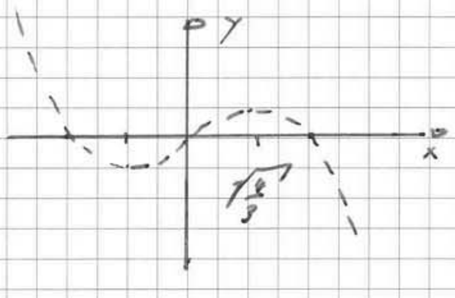
Ursprungsgerade! $\underline{\underline{y = e \cdot x + 0}}$

Schnittwinkel ist $\alpha = \arctan(e) \cong \underline{\underline{69{,}8^\circ}}$

6) Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\underline{\underline{x_2 = 2}}$ $\underline{\underline{x_3 = -2}}$

Extrempunkte:

$f'(x) = 4 - 3x^2 \overset{!}{=} 0 \rightarrow 4 = 3x^2$ $\underline{\underline{x_{E1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}}}$



$y_{E1,2} \approx \pm 3,1$

$f''(x) = 4 - 6x$ $f''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0 \rightarrow$ Maximum bei $\sqrt{\frac{4}{3}}$

$f''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) > 0 \rightarrow$ Minimum bei $-\sqrt{\frac{4}{3}}$

b) $13x - 4y + 20 = 0 \rightarrow y = \frac{13}{4}x + 5$

Steigung der Geraden ist $\frac{13}{4} = f'(x) = 4 - 3x^2$

an den Stellen $\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$ und $\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$ ist $m = \frac{13}{4}$.

7) $y = ax - x^2$ einsetzen liefert $\underline{\underline{R(1/a-1)}}$ $\underline{\underline{S(a/0)}}$

b) $f_1'(x) = 6 - 2x$ $f_1'(6) = -6 \rightarrow \alpha_1 = -80,54°$

$f_2'(x) = -\frac{6}{x^2}$ $f_2'(6) = -\frac{1}{6} \rightarrow \alpha_2 = -9,46°$

$\underline{\underline{\Delta\alpha = 71,05°}}$

8) x = Anzahl Artikel pro Tag

$G(x) = -500 - 10x - 0,004x^2 + 15x$

$= -0,004x^2 + 5x - 500$

$G'(x) = 5 - 0,008x \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = 625$

$G''(x) = -0,008 \rightarrow$ Maximum bei $\underline{\underline{x = 625}}$