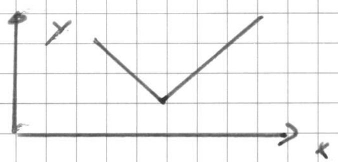
Differentialrechnung ohne Hilfsmittel

1) Graph der Funktion f kann ohne Abheben des Stiftes gezeichnet werden. Jede differenzierbare Funktion ist stetig, aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar.



Diese Funktion ist stetig aber nicht differenzierbar (wegen Knick)

2a) $f'(x) = \underline{\underline{6 \cdot (2x+1)^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{(\pi - x^2) - (-2x)\cdot x}{(\pi - x^2)^2} = \underline{\underline{\dfrac{\pi + x^2}{(\pi - x^2)^2}}}$

c) $f'(x) = \dfrac{4x(x^2-1) - (2x-1)(2x^2+1)}{(x^2-x)^2} = \underline{\underline{\dfrac{-2x^2+2x-1}{(x^2-x)^2}}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1\cdot(1-x) - (-1)(1+x)}{(1-x)^2} = \underline{\underline{\dfrac{2}{(1-x)^2}}}$

e) $f'(x) = \dfrac{12x^2(4x^3-2) - 12x^2(4x^3+1)}{(4x^3-2)^2} = \underline{\underline{\dfrac{-36x^2}{(4x^3-2)^2}}} = \left(\dfrac{-9x^2}{(2x^3-1)^2}\right)$

f) $f'(x) = \underline{\underline{a\cdot e^{-x}\cdot[6\cdot\cos(6x) - \sin(6x)]}}$

g) $f'(x) = \underline{\underline{A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)}}$

h) $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2x = \underline{\underline{-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}}$

i) $e^{1-2x} + (-2)\cdot e^{1-2x}\cdot x = \underline{\underline{e^{(1-2x)}(1-2x)}}$

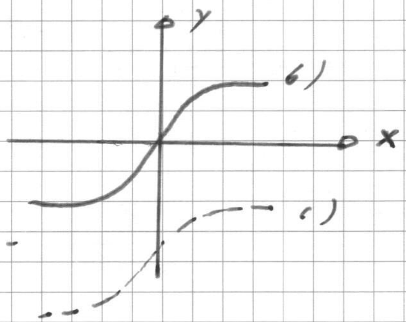
j) $\cos(\cos(x))\cdot(-\sin(x)) = \underline{\underline{-\sin(x)\cdot\cos(\cos(x))}}$

k) $f'(x) = \underline{\underline{\sin\left(\frac{x^2}{3}+2\right) + \frac{2}{3}x^2\cos\left(\frac{x^2}{3}+2\right)}}$

l) $f'(x) = \underline{\underline{\dfrac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin(x) - \cos(x)\cdot x^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 x}}}$

3) a) Richtig, wenn die Ableitung positiv ist, so ist die Funktion streng monoton wachsend.

b) falsch



c) falsch vgl. ---

4) ganz am Schluss

5) $P(-2|-1)$

Die Steigung im Punkt P beträgt:

$f'(x) = \dfrac{-10}{(3x+1)^2}$ $\quad f'(-2) = \dfrac{-10}{25} = \dfrac{-2}{5}$

Die Tangente muss durch den Punkt P:

$y = m\cdot x + q \rightarrow -1 = -\frac{2}{5}(-2) + q$

$-1 = \frac{4}{5} + q \rightarrow q = -\frac{9}{5}$

$\rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{2}{5}x - \frac{9}{5}}}$

6) $f'(x) = \frac{5}{8}x^2 + \frac{b}{2}$

$f'(0) = \frac{b}{2} \qquad f'(2) = \frac{5}{2} + \frac{b}{2}$

Tangenten stehen senkrecht, wenn $-\frac{1}{f'(0)} = f'(2)$

$-\frac{2}{b} = \frac{5}{2} + \frac{b}{2} \quad | \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)$

$1 = \frac{-5b}{4} - \frac{b^2}{4} \rightarrow b^2 + 5b + 4 = 0$

$(b+4)(b+1) = 0 \rightarrow \underline{\underline{b = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}}}$

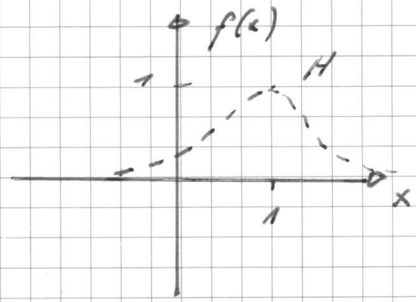
7) $f'(x) = \frac{2x \cdot a \cdot bx - b(ax^2+1)}{b^2x^2} = \frac{ax^2 - 1}{bx^2}$

$f'(2) = \frac{4a-1}{4b} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{4}}}$

$f(2) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 4 + 1}{2b} \overset{!}{=} 1 \rightarrow \underline{\underline{b = 1}}$

8) $f'(x) = e^{-(x-1)^2} \cdot 2 \cdot (-(x-1))$

$= -2(x-1)\, e^{-(x-1)^2}$



$f'(x) \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = 1 \qquad \underline{\underline{H(1/1)}}$

9) Ansatz $ax^3 + bx^2 + cx + d = f(x) \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

(0/0) liegt auf dem Graphen $\rightarrow d = 0$

Wendepunkt: $f''(1) = 6a + 2b = 0$ (I)

P liegt auf dem Graphen: $a + b + c = 6$ (II)

Extremum bei $x = 0$: $f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$ (III)

$\rightarrow a = -3 \qquad b = 9 \qquad \underline{\underline{f(x) = -3x^3 + 9x^2}}$

4) Gegeben ist der Graph einer Funktion. Zeichne mit Farbe, qualitativ richtig, den Graphen der Ableitungsfunktion f' direkt in die Figur.