Integralrechnung mit Hilfsmittel

1) Nullstellen bei $x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 4$

$$\left|\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\right| = \frac{81}{8} \qquad \left|\int_{1}^{4} f(x)\,dx\right| = \frac{81}{8}$$

2) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x \qquad P(-1/2)$

Steigung der Tangente in P $\quad f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$

$f'(-1) = 1$

P liegt auf der Tangente $\rightarrow$ $t(x) = x + 3$

Schnittpunkte von $f(x)$ und $t(x)$: $x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

$$\int_{-1}^{3} (t(x) - f(x))\,dx = \frac{64}{3}$$

3) $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit Scheitelpunkt bei $(0/4,5)$

ist $c = 4,5$

Gleichungssystem mit $f(-3) = 0$ und $f'(0) = 0$

liefert Parabelgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

b) Fläche des Hohlraumes: $A = \int_{-3}^{3} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}\right)dx = 18$

Trapezfläche $= 5 \cdot 8 = 40$

Fläche der Brücke $= 40 - 18 = 22\,m^2$

c) Volumen : $4m \cdot 22m^3 = 88\,m^3$

a) Nullstellen: $f(x) = 4x - x^3 = x(4 - x^2) = x(x+2)(x-2)$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\underline{\underline{x_2 = 2}}$ $\underline{\underline{x_3 = -2}}$

Extrema: $f'(x) = 4 - 3x^2$ Maximum bei $\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}} \,\middle|\, 3{,}08\right)$

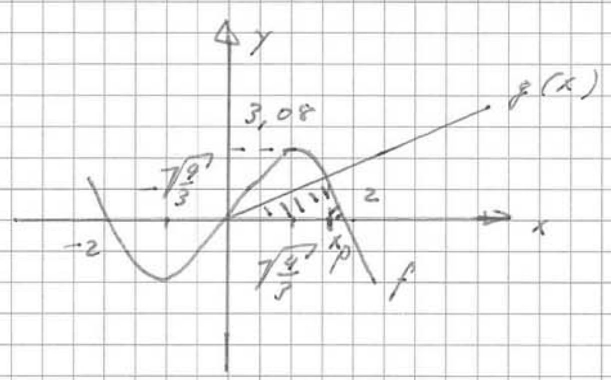
$f''(x) = -6x$ Minimum bei $\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}} \,\middle|\, -3{,}08\right)$

b) Geradengleichung: $13x - 4y + 20 = 0$

$\longrightarrow y = \frac{13}{4}x + 5 \longrightarrow m = \frac{13}{4}$

$f'(x) \overset{!}{=} \frac{13}{4} = 4 - 3x^2 = \frac{13}{4} \rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}}}$

c) Skizze Nullstellen bei $x_1 = 0$ $x_2 = -2$ $x_3 = 2$



$\underline{\underline{\int_0^2 f(x)\,dx = 4}}$

d) Geradengleichung $g(x) = a \cdot x$

$$\int_0^{x_p} ax\,dx + \int_{x_p}^2 f(x)\,dx = \frac{x_p^4}{4} + \left(\frac{a}{2} - 2\right) \cdot x_p^2 + 4 = 2 \quad (I)$$

ausserdem gilt für die Steigung a:

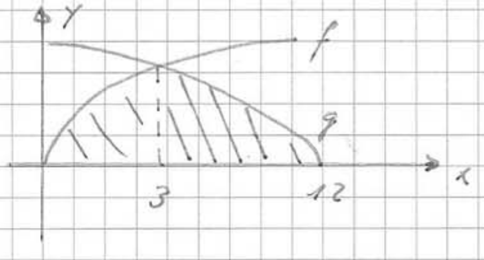
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x_p - x_p^3}{x_p} \quad (II)$$

(I) und (II) liefern:

$\underline{\underline{x_p = 1{,}68 \quad a = 1{,}17}}$

Biella 451 444

5) Skizze:



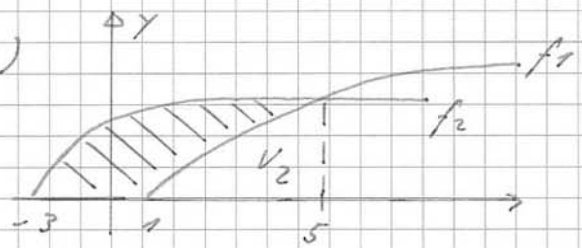
a) Schnittpunkt bei $S(3/3\sqrt{3})$

b) $V_1 = \pi \int_0^3 (f(x))^2 dx = \frac{81\pi}{2}$

$V_2 = \pi \int_3^{12} (g(x))^2 dx = \frac{243\pi}{2}$

$V_{tot} = V_1 + V_2 = \underline{\underline{162\pi}}$

6)

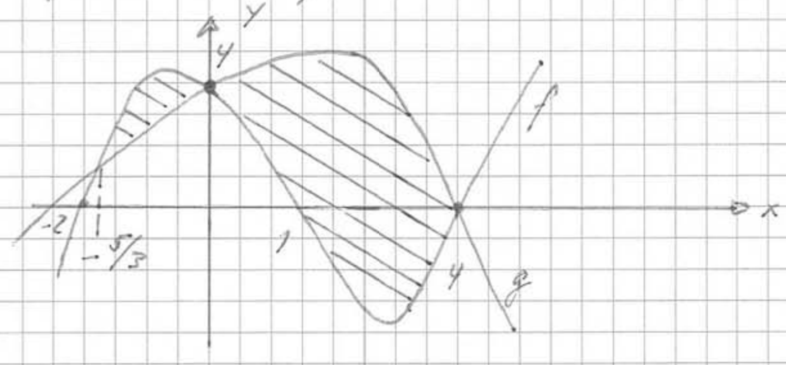


$V_1 = \pi \int_{-3}^{5} (f_2(x))^2 dx = 64\pi$

$V_2 = \pi \int_{1}^{5} (f_1(x))^2 dx = 32\pi$

$\underline{\underline{\Delta V = 32\pi}}$

7) Folgender Graph ist nicht „sauber"



Ansatz: $g(x) = ax^2 + bx + c$

Schnittpunkt bei y-Achse $\rightarrow$ $c = 4$

" " x-Achse $\rightarrow$ $16a + 4b + 4 = 0$

Die Steigung von f bei (0/4) ist

$f'(0) = -3$ $\rightarrow$ Steigung von g ist $\frac{1}{3}$

$g'(0) = 2a\underset{0}{x} + b \overset{!}{=} \frac{1}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3} \rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$\underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4}}$

c) $A_1 = \int_{-\frac{5}{3}}^{0} (f(x) - g(x))\,dx = \underline{\underline{1{,}865}}$

$A_2 = \int_{0}^{4} (g(x) - f(x))\,dx = \underline{\underline{18{,}556}}$

8) $y = x^2 \quad y' = 2x \overset{!}{=} 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\hat{=}$ Steigung von OA

Berührungspunkt bei $P(\frac{1}{2} / \frac{1}{4})$

P liegt auf $f(x) = 1 \cdot x + q \longrightarrow q = -\frac{1}{4} \longrightarrow f(x) = x - \frac{1}{4}$

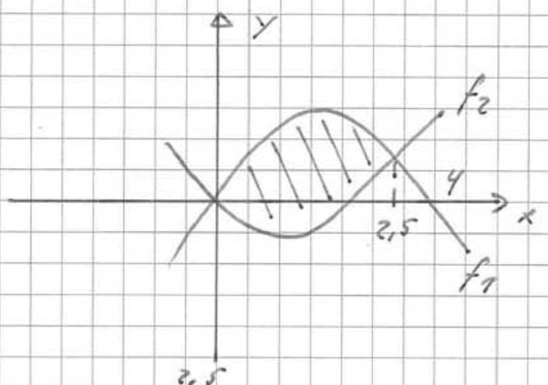
f schneidet die x-Achse bei $(\frac{1}{4} / 0)$

f " " " Senkrechte durch 1 bei $(1 / \frac{3}{4})$

Das Integral unter der Kurve von $y = x^2$ ist $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$,

davon muss man die Dreiecksfläche subtrahieren. $A = \underline{\underline{\frac{5}{96}}}$.

9)



Schnittpunkte bei:

$x = 0$ und $x = 4$

$A = \int_{0}^{2{,}5} (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \underline{\underline{2{,}604}}$

Biella 451 444