20 Differentialrechnung

Die *Differentialrechnung* als Teil der sogenannten *Analysis* beschäftigt sich mit der Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen. Konkret geht es um die Frage

> «Wie stark verändert sich der Funktionswert, wenn sich das Argument ändert?»

Diese Änderungsrate selbst ist wieder eine Funktion, die **Ableitung** genannt wird. Für jeden x-Wert gibt die Ableitung an, wie stark sich die Funktion in diesem Punkt ändert.

Wichtige Anwendungen sind z.B. die Bestimmung von lokalen Minima und Maxima einer Funktion (Optimierung), die Beschreibung physikalischer und technischer Abläufe und Computergrafik (z.B. Bezier-Kurven, Nurbs etc.).

Beispiel 1: Beschreibt die Funktion $s(t)$ die Strecke als Funktion der Zeit (z.B. $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$), ist deren Ableitung die entsprechende momentane Geschwindigkeit (also $v(t) = at + v_0$). Die Änderung der Geschwindigkeit wäre dann die Beschleunigung (also $a(t) = a$, in diesem Fall konstant).

Beispiel 2: Um ein hypothetisches Bakterienwachstum zu beschreiben, sei $N(t) = 2^t$ die Funktion, die die Anzahl Bakterien in Abhängigkeit der Zeit t in Stunden beschreibt. Wie gross ist z.B. die momentane Zunahme zum Zeitpunkt $t = 10$?

Beispiel 3: Wie stark nimmt der Umfang eines Quadrats zu, wenn die Fläche vergrössert wird?

20.1 Durchschnittliche Änderungsrate

Definition 20.51 Durchschnittliche Änderungsrate

Die durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion $f(x)$ zwischen zwei Stellen x_0 und x_1 ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Aufgabe 20.395 Studieren Sie erst die ganze Aufgabe. Für die Funktion in Beispiel 1 wählen Sie $a = -2$, $v_0 = 2$, $s_0 = 0$. Für diese Parameter zeichnen Sie den Graphen der Funktion $s(t)$ für $t \in [0, 2]$ mit Einheit 8 Häuschen.

Für folgende Werte von t_0 und t_1 zeichnen Sie das Differenzdreieck ein und berechnen Sie jeweils die *durchschnittliche* Geschwindigkeit (d.h. die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion $s(t)$):

a) $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$ b) $t_0 = 0$ und $t_1 = \frac{1}{2}$ c) $t_0 = \frac{1}{2}$ und $t_1 = 1$ d) $t_0 = 0$ und $t_1 = 2$ e) $t_0 = 0$ und $t_1 = 0.01$

Aufgabe 20.396 Für die Funktion $N(t) = 2^t$ aus Beispiel 2 zeichnen Sie den Graphen von $N(t)$ für $t \in [0, 2]$ mit Einheit 4 Häuschen. Ziel ist es, die momentane Änderungsrate für $t = 1$ anzunähern. Berechnen Sie dazu die durchschnittlichen Änderungsraten für $t_0 = 1$ und $t_1 \in \{2, 1.5, 1.1, 1.01\}$.

Aufgabe 20.397 Schätzen Sie die lokale Änderungsrate des Quadratumfangs ab für Flächen $A = 1$, $A = 100$ und $A = 0.01$.

Merke

Die durchschnittliche Änderungsrate ist gleich der Steigung des Differenzendreiecks, bzw. der *Sekante* durch die entsprechenden Punkte auf dem Funktionsgraphen.

Skizze: