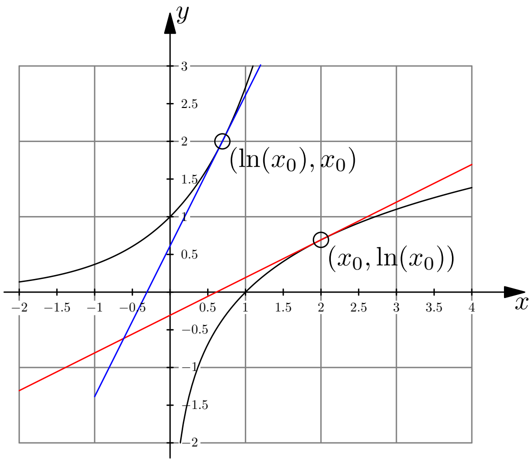

a) Die Graphen sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt. Diese Spiegelung vertauscht x und y.

b) Siehe Abbildung.

c) Wir bestimmen den Wert der Ableitung von $g(x) = \mathrm{e}^x$ für das Argument $x = \ln(x_0)$, also $g'(\ln(x_0)) = \mathrm{e}^{\ln(x_0)} = x_0$.

d) Beim Spiegeln eines Steigungsdreiecks an der Winkelhalbierenden werden Δx und Δy vertauscht. D.h. die Steigung von t_f ist der Kehrwert der Steigung von t_g. Und somit ist $\ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Lösung zu Aufgabe 405 ex-wurzel-ableiten

Gesucht ist die Tangentensteigung an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$. Wir wählen einen Punkt $(x_0, \sqrt{x_0})$ auf dem Graphen von $f(x)$. Der entsprechende Punkt auf $g(x)$ hat die Koordinaten $(\sqrt{x_0}, x_0)$. Die Tangentensteigung in diesem Punkt erhalten wir durch die Ableitung von $g'(x) = 2x$, also $g'(\sqrt{x_0}) = 2\sqrt{x_0}$.

Der Kehrwert davon ist die Tangentensteigung an der Stelle x_0. Wir folgern

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Lösung zu Aufgabe 407 ex-vielfache-ableiten

a) $f'(x) = 12x^2$ b) $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ c) $h'(x) = -\mathrm{e}^x$ d) $k'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)' = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$

Lösung zu Aufgabe 409 ex-linearkombinationen-ableiten

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 5x^4 - 9x^2$

c) $f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x} + 2x$

d) $f'(x) = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

e) $f'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$

f) $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)' = 2x - 3$

g) $f'(x) = \mathrm{e}^x$

h) $f'(x) = \left(4\ln(x) + \ln\left(\mathrm{e}^x\right)\right)' = 4 \cdot \frac{1}{x} + 1$

Lösung zu Aufgabe 410 ex-produktregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ und $g(x_0+h) \approx g(x_0) + g'(x_0)h$. Das Produkt ist

$$p(x_0+h) = f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) \approx (f(x_0) + f'(x_0)h) \cdot (g(x_0) + g'(x_0)h) = \\ f(x_0)g(x_0) + h(f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)) + h^2 f'(x_0)g'(x_0)$$

Der erste Teil ist $p(x_0)$, der zweite Teil ist eine lineare Approximation von p, also $p'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Der letzte Teil ist für sehr kleine h vernachlässigbar.

Wir vermuten also:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$