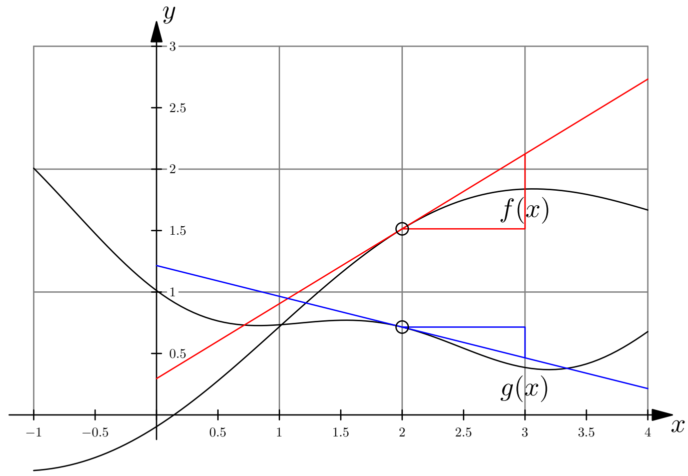
20.6 Summe zweier Funktionen



Aufgabe 20.408 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und deren Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ gebildet. Über den Differenzenquotienten kann man relativ einfach zeigen, dass $h'(x) = f'(x) + g'(x)$. Mehr Einsicht gewinnt man aber mit einem grafischen Beweis.
Skizzieren Sie $h(x)$ und die Tangente in $x_0 = 2$. Was muss die Steigung von h im Punkt $x_0 = 2$ sein?

Merke Ableitung von Summen

Die Ableitung der Summe ist die Summe der Ableitungen:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f+g)' = f' + g'.$$

Aufgabe 20.409 Leiten Sie ab:

a) $f(x) = 42$ b) $f(x) = x^5 - 3x^3$ c) $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x) + x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2}$ f) $f(x) = (x-1)(x-2)$ g) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\mathrm{e}^x}$ h) $f(x) = \ln\left(x^4 \cdot \mathrm{e}^x\right)$

20.7 Ableitung als Approximation

Die Tangente an den Graphen von $f(x)$ in einem Punkt x_0 ist die beste lineare Approximation an die Funktion. D.h. in einer kleinen Umgebung um den Punkt $(x_0, f(x_0))$ sind die beiden Graphen kaum zu unterscheiden. Konkret:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \qquad \text{für kleine } h.$$

Skizze:

Die lineare Approximation kann nun verwendet werden, um weitere Ableitungsregeln wie die Kettenregel herzuleiten. Um die Kettenregel zu verstehen ist erst eine kurze Repetition nötig:

Aufgabe 20.410 Gegeben sind $f(x) = x^5$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \ln(x)$, $k(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie folgende Ausdrücke:

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(k(x))$

d) $k(h(f(x)))$ e) $g(f(h(x)))$ f) $h(g(k(x)))$

Aufgabe 20.411 Bestimmen Sie zwei nicht-triviale Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ so, dass $f(x) = g(h(x))$.

a) $f(x) = \ln\left(x^5\right)$ b) $f(x) = \sqrt{4^x}$ c) $f(x) = 2^{x^2}$ d) $f(x) = (2^x)^2$