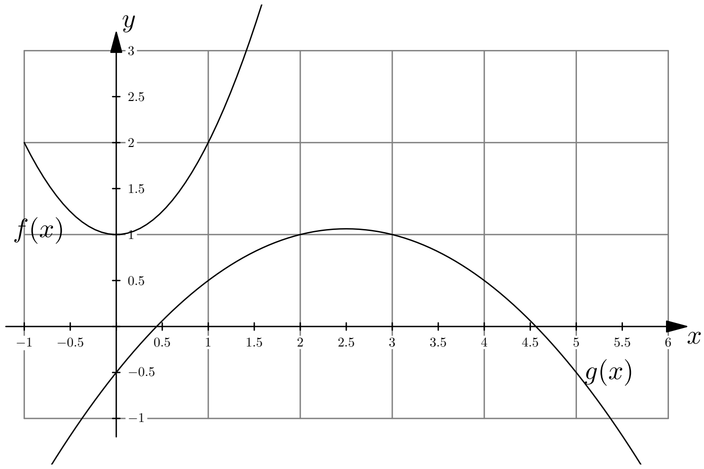
20.8 Kettenregel

Aufgabe 20.412 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und deren Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $k(x) = f(g(x))$ gebildet.
Skizzieren Sie $k(x)$.
Skizzieren Sie die Tangente t_g im Punkt $x_0 = 3$ an g, die Tangente t_f im Punkt $g(x_0)$ an f und die Tangente t_k im Punkt x_0.
Was ist der Zusammenhang dieser drei Steigungen?



Aufgabe 20.413 Gegeben sind $f(x)$, $g(x)$ und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion $k(x) = f(g(x))$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung $k'(x)$. Schreiben Sie dazu f, g und k als lineare Approximation.

Merke Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

f wird **äussere Funktion**, g **innere Funktion** genannt.
Der Operator $\circ$ bedeutet die Verknüpfung von Funktionen und $f \circ g$ wird «f nach g» gelesen.

Aufgabe 20.414 Bestimmen Sie folgende Ableitungen. In einigen Fällen kann die Funktion nach Umformungen auch ohne Kettenregel abgeleitet werden.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ b) $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2$ c) $f(x) = \ln\left(x^7\right)$ d) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x\right)$

e) $f(x) = g(h(k(x)))$ f) $f(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)}$ g) $f(x) = (\ln(x))^4$ h) $f(x) = \frac{1}{k(x)}$

Aufgabe 20.415 Mit Hilfe der Kettenregel kann nun die Formel zur Ableitung von Potenzfunktionen $f(x) = x^p$ für alle Exponenten $p \in \mathbb{R}^\star \setminus \{1\}$ bewiesen werden. Vorgehen: Schreiben Sie $f(x)$ als Exponentialfunktion mit Basis e, wenden Sie ein Logarithmusgesetz an, leiten Sie ab und formen Sie wieder um.

20.9 Produktregel

Als «letzte» Regel leiten wir die Produktregel her. Diese Herleitung ist technisch und gibt Einblick in einen in der Mathematik «geläufigen Trick», wo zu Termen Null addiert wird (oder mit Eins multipliziert wird).

Aufgabe 20.416 Gegeben sind zwei Funktionen f und g und deren Ableitungen. Zu bestimmen ist die Ableitung der Funktion $k(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) \overbrace{- f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h)}^{0} - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$