

**\* Lösung zu Aufgabe 413** ex-kettenregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt  $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$  und  $g(x_0 + h) \approx g(x_0) + g'(x_0)h$ . Es gilt also:

$$k(x_0 + h) = f(g(x_0 + h)) \approx f\left(g(x_0) + \underbrace{h \cdot g'(x_0)}_{h_2}\right) \approx f(g(x_0)) + h_2 f'(g(x_0)) = f(g(x_0)) + h \cdot g'(x_0) f'(g(x_0))$$

Der erste Term ist  $k(x_0)$ , der zweite ist also  $h \cdot k'(x_0)$ . Wir schliessen daraus

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Intuitiv kann man die Sache wie folgt verstehen: Das Argument in  $f$  ändert sich nicht mit Änderungsrate 1 (wie wenn dort nur  $x$  stehen würde) sondern mit Änderungsrate  $g'(x)$ . Darum wird die Änderungsrate noch damit multipliziert. Man spricht von innerer Ableitung.

**\* Lösung zu Aufgabe 414** ex-kettenregel-anwenden

Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die äussere und innere Funktion zu bestimmen. Wir schreiben  $f(x) = g(h(x))$ :

- a)  $g(x) = e^x$  und  $h(x) = x^2$ .  $g'(x) = e^x$  und  $h'(x) = 2x$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$ .
- b)  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = e^x$ ,  $g'(x) = 2x$ ,  $h'(x) = e^x$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$ .
- c)  $g(x) = \ln(x)$ ,  $h(x) = x^7$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h'(x) = 7x^6$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^7} \cdot 7x^6 = \frac{7}{x}$ .  
Hätte man umgeformt als  $f(x) = 7 \ln(x)$  wäre die Sache etwas einfacher gewesen.
- d)  $g(x) = \ln(x)$ ,  $h(x) = e^x$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h'(x) = e^x$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1$ . Hätte man umgeformt als  $f(x) = x$  wäre die Sache sofort klar.
- e)  $f'(x) = g'(h(k(x))) \cdot (h(k(x)))' = g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$
- f)  $g(x) = e^x$ ,  $h(x) = p \ln(x)$ ,  $g'(x) = e^x$ ,  $h'(x) = \frac{p}{x}$  und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{p \ln(x)} \cdot \frac{p}{x}$ .
- g)  $g(x) = x^4$ ,  $h(x) = \ln(x)$ ,  $g'(x) = 4x^3$ ,  $h'(x) = \frac{1}{x}$  und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 4(\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x}$
- h)  $f(x) = (k(x))^{-1}$ . Äussere Funktion  $g(x) = x^{-1}$ , innere Funktion  $h(x) = k(x)$ ,  $g'(x) = -x^{-2}$ ,  $h'(x) = k'(x)$   
und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -(k(x))^{-2} \cdot k'(x) = -\frac{k'(x)}{(k(x))^2}$

**\* Lösung zu Aufgabe 417** ex-produktregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt  $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$  und  $g(x + h) \approx g(x) + g'(x)h$ . Das Produkt ist

$$p(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h) \approx (f(x) + f'(x)h) \cdot (g(x) + g'(x)h) = f(x)g(x) + h(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) + h^2 f'(x)g'(x)$$

Der erste Teil ist  $p(x)$ , der zweite Teil ist eine lineare Approximation von  $p$ , also  $p'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ .  
Der letzte Teil ist für sehr kleine  $h$  vernachlässigbar.

**\* Lösung zu Aufgabe 418** ex-produktregel-anwenden

- a)  $f'(x) = (x^{42} \cdot \ln(x))' = 42x^{41} \cdot \ln(x) + x^{42} \cdot \frac{1}{x} = x^{41} \cdot (1 + 42 \ln(x))$
- b)  $f'(x) = (\sqrt{x} \cdot e^x)' = \sqrt{x}e^x + \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^x = e^x \cdot \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$
- c)  $f'(x) = (2^x \cdot x^{-2})' = \ln(2) \cdot 2^x \cdot x^{-2} + 2^x \cdot (-2) \cdot x^{-3}$
- d)  $f'(x) = (x^5 \cdot x^4)' = 5x^4 \cdot x^4 + x^5 \cdot 4x^3 = 9x^8$  Hier hätte man besser zuerst umgeformt.