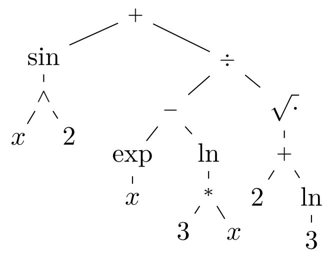
20.10 Termanalyse, Termbäume und Ableitungsregeln

Das Wichtigste beim Ableiten komplizierterer Funktionen ist zu erkennen, welche Regel angwendet werden soll. Dazu ist es am einfachsten, wenn der Term als Baum dargestellt wird. Je nach Operation oder Funktion in der Wurzel und der Art der Unterbäume wird die entsprechende Regel angewandt und die Unterbäume abgeleitet. Zur Repetition: «Termanalyse, Kapitel 2.2, Seite 15».
Funktionen werden als Knoten mit nur einem Unterbaum dargestellt. Speziell wird die e^x-Funktion als «`exp`» notiert.

Beispiel:
Der Ausdruck $\sin\left(x^2\right) + \dfrac{\mathrm{e}^x - \ln(3\cdot x)}{\sqrt{2+\ln(3)}}$ wird als



dargestellt.

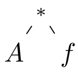
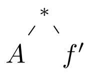
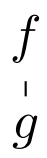
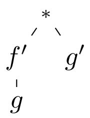
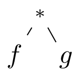
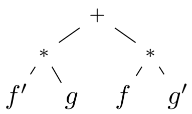
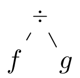
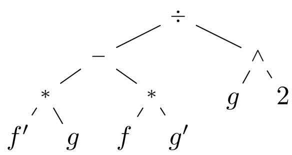
Aufgabe 20.421 Zeichnen Sie die entsprechenden Termbäume für folgende Ausdrücke ohne Vereinfachen.

a) $\ln\left(3\cdot x - \sqrt{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{2-4\cdot x}$ b) $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$ c) $x + x^2 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{4\cdot x}$

d) $\sqrt{\ln\left(x^2+\mathrm{e}^x\right)}$ e) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right)^x + \mathrm{e}^{x^{\mathrm{e}}}$ f) $x - \sqrt{x} + \ln(x)\cdot \mathrm{e}^x$

20.11 Ableitungsregeln mit Bäumen

Im Folgenden steht A für beliebige Ausdrücke ohne x. Ausdrücke, bzw. Funktionsterme, die x enthalten, werden mit f und g geschrieben:

Regel	Funktionsterm	Ableitung	Algebraisch
Konstante	A	0	$(c)' = 0$
Konstanter Faktor			$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$
Kettenregel			$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
Produktregel			$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel			$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Merke Ableitungen einiger Grundfunktionen

$$(x^p)' = px^{p-1} \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad (a^x)' = \ln(a)a^x \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)x}$$

Aufgabe 20.422 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie:

a) e^{2x} b) $x\cdot 2^x$ c) $\frac{\ln(x)}{x}$

d) $\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\ln(4x)}$ e) $\ln\left(\sqrt{2^x}\right)$ f) $\mathrm{e}^{x^2}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{x}}$