b) $f(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} - (-1)\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1-\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x}^2$$

c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{2} + 2\ln(x-1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+2) + 2\frac{1}{x-1}\cdot 1 = x+1+\frac{2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+2}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Lösung zu Aufgabe 20.426 ex-hunderste-ableitung

Man bildet die ersten Ableitungen, um eine Gesetzmässigkeit zu finden.
$f'(x) = 2x\cdot \mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\cdot\mathrm{e}^x$
$f''(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$
$f'''(x) = (2x+4)\mathrm{e}^x + (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$
Man stellt fest, dass man immer ein Polynom zweiten Grades multipliziert mit e^x erhält. Etwas allgemeiner:
$(f(x)\cdot\mathrm{e}^x)' = f'(x)\mathrm{e}^x + f(x)\mathrm{e}^x = (f(x)+f'(x))\mathrm{e}^x$
Wenn $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist, dann ist $f(x)+f'(x)$ wieder ein Polynom n-ten Grades. Der Koeffizient der höchsten Potenz von x ändert sich nicht.
Untersuchen wir den allgemeinen Fall mit $f(x) = x^2+ax+b$. Wir erhalten $f'(x) = 2x+a$ und damit
$f(x)+f'(x) = x^2+(a+2)x+(a+b)$.
D.h. der Koeffizient von x wir immer um 2 grösser. Die Konstante wird immer um den Koeffizienten von x grösser.
Damit bilden die Koeffizienten von x eine arithmetische Folge mit $a_1 = 2$ und $d = 2$, die Konstanten eine arithmetische Reihe (mit erstem Glied 0 und $d = 2$).
Damit lassen sich die Koeffizienten des n-ten Polynoms angeben:
Koeffizent von x: $2n$
Konstante : $n\cdot\frac{a_1+a_n}{2} = n\cdot\frac{0+2(n-1)}{2} = n(n-1)$
und damit:

$$f^{(n)} = \left(x^2+2n\cdot x+n(n-1)\right)\mathrm{e}^x$$

$$f^{(100)} = \left(x^2+200x+9900\right)\mathrm{e}^x$$