20 Differentialrechnung

Die *Differentialrechnung* als Teil der sogenannten *Analysis* beschäftigt sich mit der Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen. Konkret geht es um die Frage

> «Wie stark verändert sich der Funktionswert, wenn sich das Argument ändert?»

Diese Änderungsrate selbst ist wieder eine Funktion, die **Ableitung** genannt wird. Für jeden x-Wert gibt die Ableitung an, wie stark sich die Funktion in diesem Punkt ändert.

Wichtige Anwendungen sind z.B. die Bestimmung von lokalen Minima und Maxima einer Funktion (Optimierung), die Beschreibung physikalischer und technischer Abläufe und Computergrafik (z.B. Bezier-Kurven, Nurbs etc.).

Beispiel 1: Beschreibt die Funktion $s(t)$ die Strecke als Funktion der Zeit (z.B. $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$), ist deren Ableitung die entsprechende momentane Geschwindigkeit (also $v(t) = at + v_0$). Die Änderung der Geschwindigkeit wäre dann die Beschleunigung (also $a(t) = a$, in diesem Fall konstant).

Beispiel 2: Um ein hypothetisches Bakterienwachstum zu beschreiben, sei $N(t) = 2^t$ die Funktion, die die Anzahl Bakterien in Abhängigkeit der Zeit t in Stunden beschreibt. Wie gross ist z.B. die momentane Zunahme zum Zeitpunkt $t = 10$?

Beispiel 3: Wie stark nimmt der Umfang eines Quadrats zu, wenn die Fläche vergrössert wird?

20.1 Durchschnittliche Änderungsrate

Definition 20.51 Durchschnittliche Änderungsrate

Die durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion $f(x)$ zwischen zwei Stellen x_0 und x_1 ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Aufgabe 20.395 Studieren Sie erst die ganze Aufgabe. Für die Funktion in Beispiel 1 wählen Sie $a = -2$, $v_0 = 2$, $s_0 = 0$. Für diese Parameter zeichnen Sie den Graphen der Funktion $s(t)$ für $t \in [0, 2]$ mit Einheit 8 Häuschen.

Für folgende Werte von t_0 und t_1 zeichnen Sie das Differenzdreieck ein und berechnen Sie jeweils die *durchschnittliche* Geschwindigkeit (d.h. die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion $s(t)$):

a) $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$ b) $t_0 = 0$ und $t_1 = \frac{1}{2}$ c) $t_0 = \frac{1}{2}$ und $t_1 = 1$ d) $t_0 = 0$ und $t_1 = 2$ e) $t_0 = 0$ und $t_1 = 0.01$

Aufgabe 20.396 Für die Funktion $N(t) = 2^t$ aus Beispiel 2 zeichnen Sie den Graphen von $N(t)$ für $t \in [0, 2]$ mit Einheit 4 Häuschen. Ziel ist es, die momentane Änderungsrate für $t = 1$ anzunähern. Berechnen Sie dazu die durchschnittlichen Änderungsraten für $t_0 = 1$ und $t_1 \in \{2, 1.5, 1.1, 1.01\}$.

Aufgabe 20.397 Schätzen Sie die lokale Änderungsrate des Quadratumfangs ab für Flächen $A = 1$, $A = 100$ und $A = 0.01$.

Merke

Die durchschnittliche Änderungsrate ist gleich der Steigung des Differenzendreiecks, bzw. der *Sekante* durch die entsprechenden Punkte auf dem Funktionsgraphen.

Skizze:

20.2 Lokale (momentane) Änderungsrate

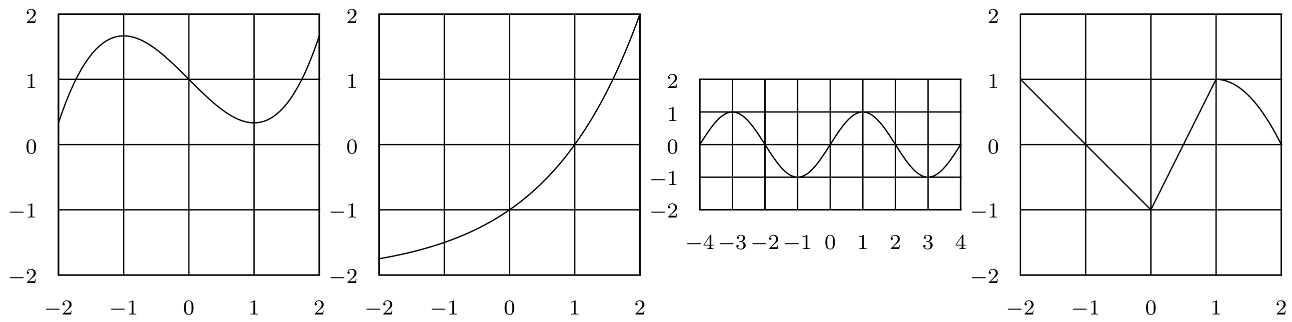
Wie ein Tachometer die momentane Geschwindigkeit anzeigt (ungefähr), interessieren wir uns für die lokale (bzw. momentane) Änderung einer Funktion. Diese kann angenähert werden, indem man die durchschnittliche Änderungsrate für Punkte berechnet, die immer näher zusammen liegen.

Skizze:

Merke Ableitung einer Funktion

Die lokale Änderungsrate einer Funktion $f(x)$ ist ebenfalls wieder eine Funktion und wird **Ableitung** von f genannt und $f'(x)$ (sprich «f Strich») geschrieben.
Die Ableitung $f'(x)$ gibt die **Tangentensteigung** vom Graph von $f(x)$ im Punkt $(x, f(x))$ an.

Aufgabe 20.398 Skizzieren Sie die Ableitungen folgender Funktionen:



Definition 20.52 Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Lies: Der Grenzwert wenn h gegen Null strebt von ...
Der Quotient im Grenzwert wird **Differenzenquotient** genannt.

20.3 Ableitung von Potenzfunktionen

Aufgabe 20.399 Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = x^3$.

✎

Aufgabe 20.400 Leiten Sie $f(x) = x^2$ ab. Vergleichen Sie mit der Tangente an die Normalparabel im Punkt (p, p^2): $t(x) = 2px - p^2$.

Aufgabe 20.401 Leiten Sie $f(x) = x^n$ ab.

✎

Merke Ableitung einer Potenzfunktion

Für $p \in \mathbb{R}^\star$ und $f(x) = x^p$ gilt:

$$f'(x) = (x^p)' = px^{p-1}$$

Der Beweis für negative ganzzahlige Exponenten kann wie oben geführt werden. Für reelle Exponenten wird der Beweis später via die Exponentialfunktion zur Basis e und dem natürlichen Logarithmus mit der Kettenregel geführt werden.

20.3.1 Ableitung von Exponentialfunktionen

Aufgabe 20.402 Sei $f(x) = 2^x$.

a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$. Leiten Sie dazu mit dem Differenzenquotienten ab.

b) Überzeugen Sie sich, dass das obige Resultat für beliebige Basen $a \in \mathbb{R}^+$ gilt.

c) Für welche Basis gilt $f'(0) = 1$ (und damit $f'(x) = f(x)$)? Vorgehen: Setzen Sie den Differenzenquotienten (ohne Grenzwert) gleich 1 und lösen Sie nach a auf. Bestimmen Sie dann näherungsweise den Grenzwert wenn $h \to 0$.

✎

Definition 20.53 Eulersche Zahl e

Man definiert Eulersche Zahl

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045.$$

Diese Zahl bildet die Basis des *natürlichen Logarithmus* und ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten.

Merke

Alle Funktionen feiern eine Party. Da kommt der Ableitungsoperator und schreit: «Ich leite Euch alle ab!». Alle Funktionen zittern vor Angst. Nur eine steht cool an der Bar und grinst: «Ich bin e^x!».

Aufgabe 20.403 Leiten Sie $f(x) = a^x$ ab, indem Sie die Funktion mit Basis e schreiben.

✎

Merke

Die Ableitung einer Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist

$$f'(x) = (a^x)' = \ln(a)a^x.$$

Insbesondere gilt $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

20.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Aufgabe 20.404 Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ (Logarithmus zur Basis e). Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = e^x$ ins gleiche Koordinatensystem. Was ist der geometrische Zusammenhang dieser beiden Graphen?

b) An der allgemeinen Stelle x_0 soll die Ableitung bestimmt werden. Für $x_0 = 2$ skizzieren Sie im Punkt $(x_0, \ln(x_0))$ die Tangente t_f an $f(x)$. Skizzieren Sie die Tangente t_f im entsprechenden Punkt auf $g(x)$.

c) Bestimmen Sie die Tangentensteigung von t_g mit Hilfe der Ableitung von $g(x)$.

d) Schliessen Sie daraus auf die Tangentensteigung von t_f und damit die Ableitungsfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

Merke Ableitung des natürlichen Logarithmus

Es gilt:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 20.405 Analog zur Aufgabe 20.404, leiten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ als Umkehrfunktion der Funktion $g(x) = x^2$ ab.

Merke Ableitung der Wurzelfunktion

Es gilt:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Beachten Sie, dass die Wurzelfunktion auch als Potenzfunktion mit $p = \frac{1}{2}$ abgeleitet werden kann: $(x^p)' = px^{p-1}$.

Diese Methode kann auf beliebige Umkehrfunktionen verallgemeinert werden:

Merke Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ ist

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

20.5 Ableitungsregeln

Die Definition mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten ist unpraktisch. Im Folgenden werden Regeln für das Ableiten hergeleitet, mit denen nachher beliebige Funktionen (zusammengesetzt aus «bekannten» Funktionen) «einfach» abgeleitet werden können.

20.5.1 Vielfaches einer Funktion

⚒ **Aufgabe 20.406** Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und deren Ableitung. Daraus wird eine neue Funktion $g(x) = a \cdot f(x)$ definiert, mit $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $g'(x) = a \cdot f'(x)$. Der Beweis kann auf verschiedene Arten erfolgen. Einerseits algebraisch über den Differenzenquotienten, oder geometrisch.

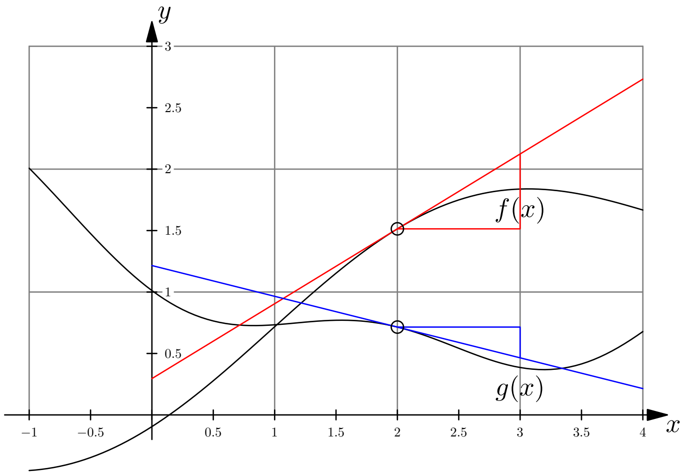
✎

⚒ **Aufgabe 20.407** Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen. Hinweis: Schreiben Sie d) als natürlichen Logarithmus.

a) $f(x) = -4x^3$ b) $g(x) = 4\sqrt{x}$ c) $h(x) = -\mathrm{e}^x$ d) $k(x) = \log_2(x)$

20.6 Summe zweier Funktionen

Aufgabe 20.408 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und deren Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ gebildet. Über den Differenzenquotienten kann man relativ einfach zeigen, dass $h'(x) = f'(x) + g'(x)$. Mehr Einsicht gewinnt man aber mit einem grafischen Beweis.
Skizzieren Sie $h(x)$ und die Tangente in $x_0 = 2$. Was muss die Steigung von h im Punkt $x_0 = 2$ sein?



Merke Ableitung von Summen

Die Ableitung der Summe ist die Summe der Ableitungen:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f + g)' = f' + g'.$$

Aufgabe 20.409 Leiten Sie ab:

a) $f(x) = 42$
b) $f(x) = x^5 - 3x^3$
c) $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x) + x^2$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$
e) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2}$
f) $f(x) = (x-1)(x-2)$
g) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\mathrm{e}^x}$
h) $f(x) = \ln\left(x^4 \cdot \mathrm{e}^x\right)$

20.7 Ableitung als Approximation

Die Tangente an den Graphen von $f(x)$ in einem Punkt x_0 ist die beste lineare Approximation an die Funktion. D.h. in einer kleinen Umgebung um den Punkt $(x_0, f(x_0))$ sind die beiden Graphen kaum zu unterscheiden. Konkret:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \qquad \text{für kleine } h.$$

Skizze:

Die lineare Approximation kann nun verwendet werden, um weitere Ableitungsregeln wie die Kettenregel herzuleiten. Um die Kettenregel zu verstehen ist erst eine kurze Repetition nötig:

Aufgabe 20.410 Gegeben sind $f(x) = x^5$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \ln(x)$, $k(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie folgende Ausdrücke:

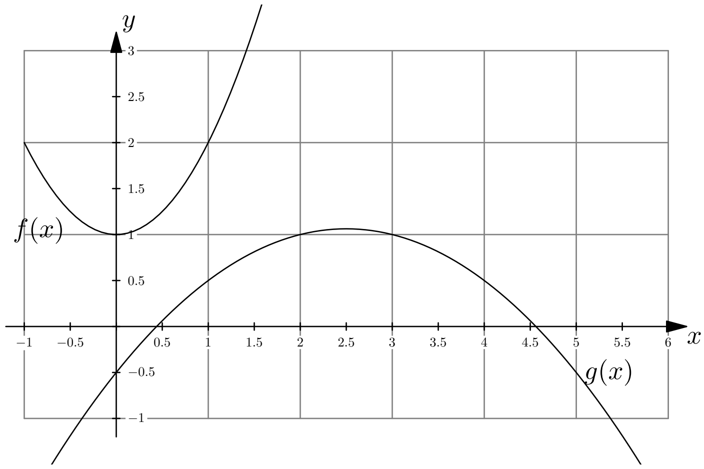
a) $f(g(x))$
b) $g(f(x))$
c) $f(k(x))$
d) $k(h(f(x)))$
e) $g(f(h(x)))$
f) $h(g(k(x)))$

Aufgabe 20.411 Bestimmen Sie zwei nicht-triviale Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ so, dass $f(x) = g(h(x))$.

a) $f(x) = \ln\left(x^5\right)$
b) $f(x) = \sqrt{4^x}$
c) $f(x) = 2^{x^2}$
d) $f(x) = (2^x)^2$

20.8 Kettenregel

Aufgabe 20.412 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und deren Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $k(x) = f(g(x))$ gebildet.
Skizzieren Sie $k(x)$.
Skizzieren Sie die Tangente t_g im Punkt $x_0 = 3$ an g, die Tangente t_f im Punkt $g(x_0)$ an f und die Tangente t_k im Punkt x_0.
Was ist der Zusammenhang dieser drei Steigungen?



Aufgabe 20.413 Gegeben sind $f(x)$, $g(x)$ und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion $k(x) = f(g(x))$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung $k'(x)$. Schreiben Sie dazu f, g und k als lineare Approximation.

Merke Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

f wird **äussere Funktion**, g **innere Funktion** genannt.
Der Operator $\circ$ bedeutet die Verknüpfung von Funktionen und $f \circ g$ wird «f nach g» gelesen.

Aufgabe 20.414 Bestimmen Sie folgende Ableitungen. In einigen Fällen kann die Funktion nach Umformungen auch ohne Kettenregel abgeleitet werden.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ b) $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2$ c) $f(x) = \ln\left(x^7\right)$ d) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x)$

e) $f(x) = g(h(k(x)))$ f) $f(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)}$ g) $f(x) = (\ln(x))^4$ h) $f(x) = \frac{1}{k(x)}$

Aufgabe 20.415 Mit Hilfe der Kettenregel kann nun die Formel zur Ableitung von Potenzfunktionen $f(x) = x^p$ für alle Exponenten $p \in \mathbb{R}^\star \setminus \{1\}$ bewiesen werden. Vorgehen: Schreiben Sie $f(x)$ als Exponentialfunktion mit Basis e, wenden Sie ein Logarithmusgesetz an, leiten Sie ab und formen Sie wieder um.

✎

20.9 Produktregel

Als «letzte» Regel leiten wir die Produktregel her. Diese Herleitung ist technisch und gibt Einblick in einen in der Mathematik «geläufigen Trick», wo zu Termen Null addiert wird (oder mit Eins multipliziert wird).

Aufgabe 20.416 Gegeben sind zwei Funktionen f und g und deren Ableitungen. Zu bestimmen ist die Ableitung der Funktion $k(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) \overbrace{-f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h)}^{0} - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

✎

Merke Produktregel

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

Aufgabe 20.417 Gegeben sind $f(x)$, $g(x)$ und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung $p'(x)$, indem Sie $p(x+h)$ mit Hilfe von f und g und deren linearen Approximationen im Punkt x_0 schreiben. Aus dem Resultat kann die Ableitung von p abgelesen werden. Der Term in h^2 ist für kleine h vernachlässigbar.

Aufgabe 20.418 Leiten Sie ab:

a) $f(x) = x^{42}\cdot \ln(x)$ b) $f(x) = \sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^x$ c) $f(x) = 2^x \cdot x^{-2}$ d) $f(x) = x^5 \cdot x^4$

Aufgabe 20.419 Mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel leiten Sie die Quotientenregel her. Bestimmen Sie die Ableitung von $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn die Funktionen f und g und deren Ableitungen gegeben sind. Schreiben Sie dazu die Funktion als Produkt.

✎

Merke Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{oder kurz} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}$$

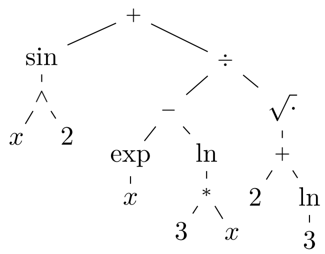
Aufgabe 20.420 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie:

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3}$ b) $f(x) = \frac{x^5}{x^3}$ c) $f(x) = \frac{\log_2(x)}{2^x}$ d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$

20.10 Termanalyse, Termbäume und Ableitungsregeln

Das Wichtigste beim Ableiten komplizierterer Funktionen ist zu erkennen, welche Regel angwendet werden soll. Dazu ist es am einfachsten, wenn der Term als Baum dargestellt wird. Je nach Operation oder Funktion in der Wurzel und der Art der Unterbäume wird die entsprechende Regel angewandt und die Unterbäume abgeleitet. Zur Repetition: «Termanalyse, Kapitel 2.2, Seite 15».
Funktionen werden als Knoten mit nur einem Unterbaum dargestellt. Speziell wird die e^x-Funktion als «`exp`» notiert.

Beispiel:
Der Ausdruck $\sin\left(x^2\right) + \dfrac{\mathrm{e}^x - \ln(3\cdot x)}{\sqrt{2+\ln(3)}}$ wird als



dargestellt.

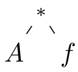
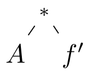
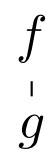
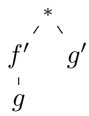
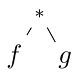
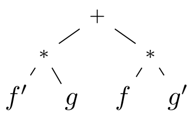
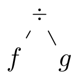
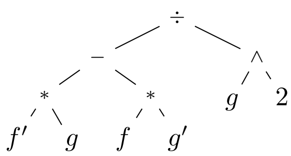
Aufgabe 20.421 Zeichnen Sie die entsprechenden Termbäume für folgende Ausdrücke ohne Vereinfachen.

a) $\ln\left(3\cdot x - \sqrt{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{2-4\cdot x}$ b) $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$ c) $x + x^2 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{4\cdot x}$

d) $\sqrt{\ln\left(x^2+\mathrm{e}^x\right)}$ e) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right)^x + \mathrm{e}^{x^{\mathrm{e}}}$ f) $x - \sqrt{x} + \ln(x)\cdot \mathrm{e}^x$

20.11 Ableitungsregeln mit Bäumen

Im Folgenden steht A für beliebige Ausdrücke ohne x. Ausdrücke, bzw. Funktionsterme, die x enthalten, werden mit f und g geschrieben:

Regel	Funktionsterm	Ableitung	Algebraisch
Konstante	A	0	$(c)' = 0$
Konstanter Faktor			$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$
Kettenregel			$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
Produktregel			$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel			$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Merke Ableitungen einiger Grundfunktionen

$$(x^p)' = px^{p-1} \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad (a^x)' = \ln(a)a^x \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)x}$$

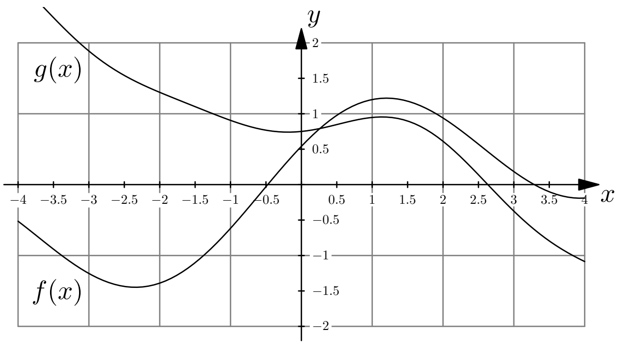
Aufgabe 20.422 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie:

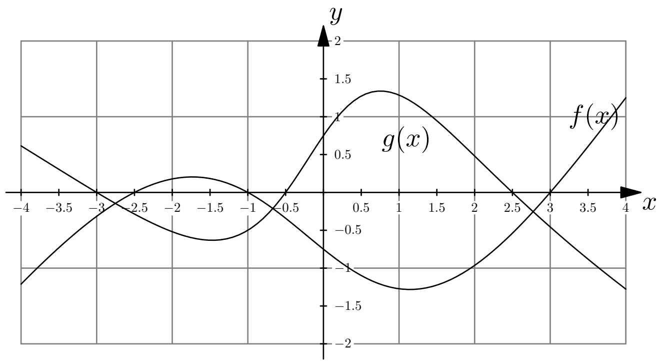
a) e^{2x} b) $x\cdot 2^x$ c) $\frac{\ln(x)}{x}$

d) $\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\ln(4x)}$ e) $\ln\left(\sqrt{2^x}\right)$ f) $\mathrm{e}^{x^2}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{x}}$

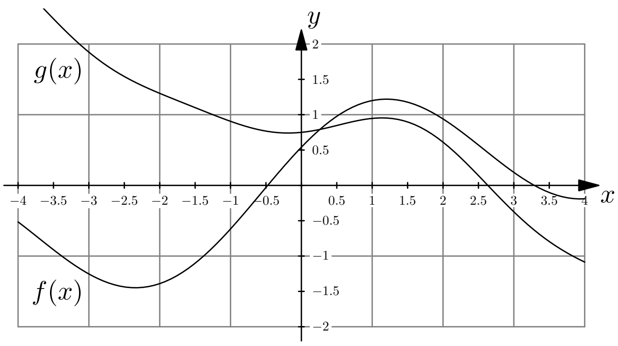
20.12 Repetionsaufgaben

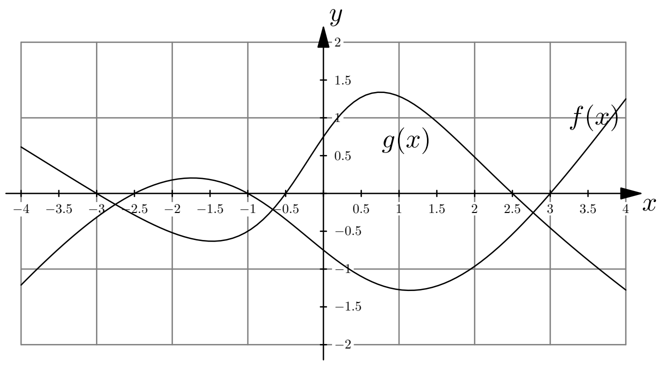
Aufgabe 20.423 Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen
$s(x) = f(x) + g(x)$,



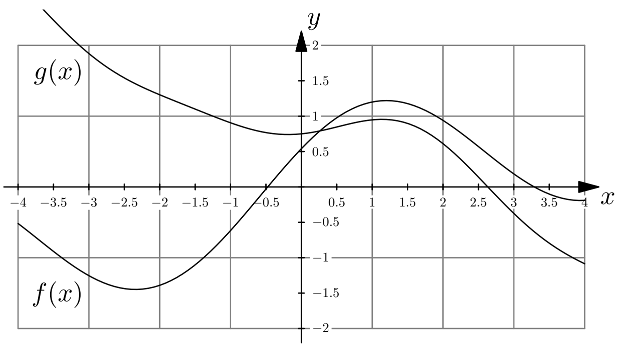


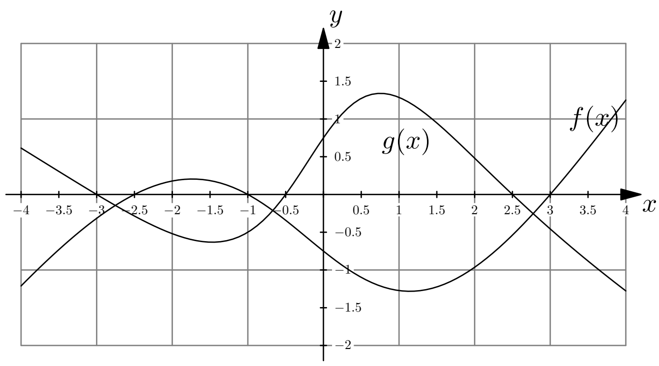
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$





und $k(x) = f(g(x))$.





Aufgabe 20.424 Leiten Sie ab. Das Resultat braucht nicht vereinfacht zu werden.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x} \cdot \ln(x)}}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x^4 \cdot \log_7(42)} - 2^{1-x^2}$ c) $f(x) = 1 + 2x^3 - \frac{4 \cdot \ln(5x \cdot 6^x)}{\sqrt[7]{x^8 \cdot \ln(9)}}$

Aufgabe 20.425 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie (Resultat als ein Bruch in c).

a) $f(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x$ b) $f(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{2} + 2\ln(x-1)$

Aufgabe 20.426 Bestimmen Sie die hunderste Ableitung $f^{(100)}$ von $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$.

20.13 Lösungen

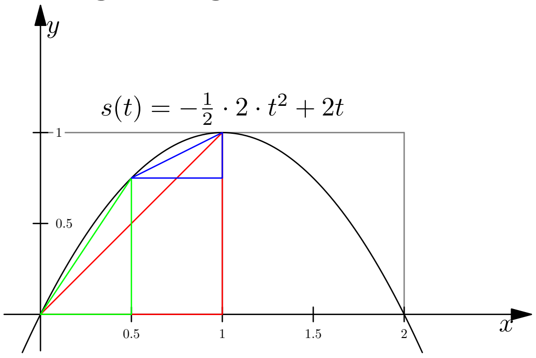
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 20.395 ex-durchschnittlicheaenderung-bsp1-gleichmaessig-beschleunigt



a) $\frac{s(1)-s(0)}{1-0} = 1 - 0 = 1$.

b) $\frac{s\left(\frac{1}{2}\right)-s(0)}{\frac{1}{2}-0} = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right) = \frac{3}{2}$.

c) $\frac{s(1)-s\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

d) $\frac{s(2)-s(0)}{2-0} = 0$

e) $\frac{s\left(\frac{1}{100}\right)-s(0)}{\frac{1}{100}-0} = 100 \cdot \frac{199}{10000} = \frac{199}{100} \approx 2 = v(0)$

Lösung zu Aufgabe 20.396 ex-durchschnittlicheaenderung-bsp2-2hochx

Änderungsraten für $t_0 = 1$:

$t_1 =$	2	1.5	1.1	1.01	1.001
Änderungsrate	3	1.657	1.435	1.391	1.3877

Lösung zu Aufgabe 20.397 ex-durchschnittlicheaenderung-bsp3-quadratumfang-aus-flaeche

Erst muss die Funktion $U(A)$ bestimmt werden, die aus dem Quadratumfang die Fläche ergibt.

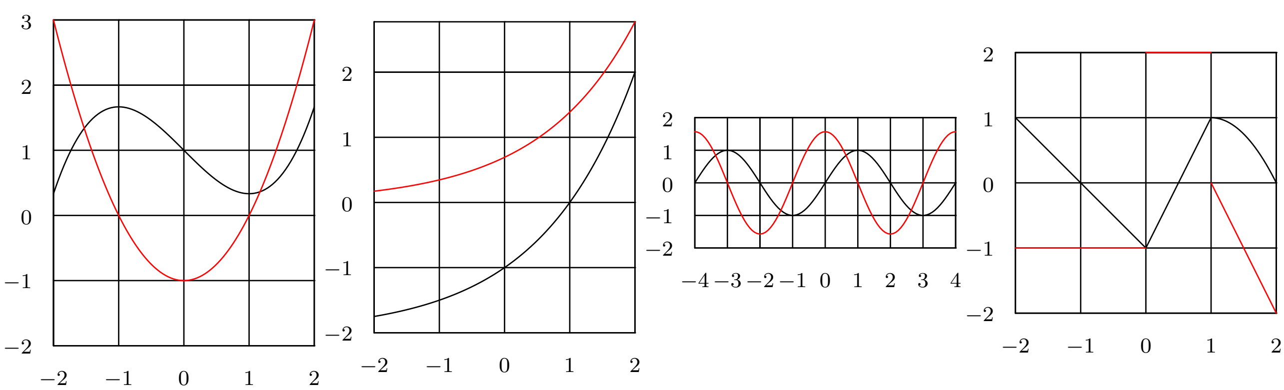
Die Seitenlänge ist $s = \sqrt{A}$ und damit $U(A) = 4\sqrt{A}$

Die lokale Änderungsrate wird abeschätzt mit A und z.B. $A + 0.0001$:

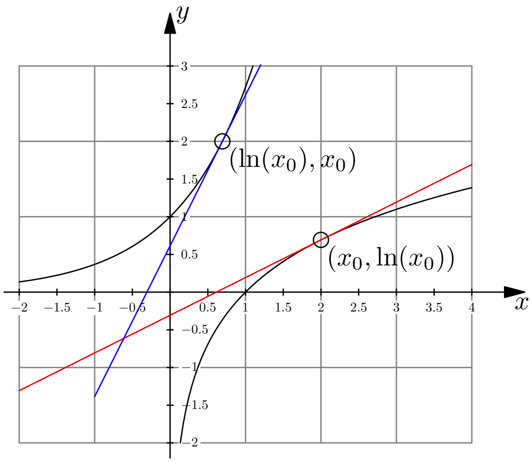
Argumente	durchschnittliche Änderungsrate
$A_0 = 1,\ A_1 = 1.0001$	1.999950...
$A_0 = 100,\ A_1 = 100.0001$	0.199999950...
$A_0 = 0.01,\ A_1 = 0.0101$	19.9502...

Je kleiner die Fläche, desto grösser wirkt sich die Änderung der Fläche auf den Umfang aus.

Lösung zu Aufgabe 20.398 ex-ableitungenskizzieren



Lösung zu Aufgabe 20.404 ex-ln-ableiten



a) Die Graphen sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt. Diese Spiegelung vertauscht x und y.

b) Siehe Abbildung.

c) Wir bestimmen den Wert der Ableitung von $g(x) = \mathrm{e}^x$ für das Argument $x = \ln(x_0)$, also $g'(\ln(x_0)) = \mathrm{e}^{\ln(x_0)} = x_0$.

d) Beim Spiegeln eines Steigungsdreiecks an der Winkelhalbierenden werden Δx und Δy vertauscht. D.h. die Steigung von t_f ist der Kehrwert der Steigung von t_g. Und somit ist $\ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Lösung zu Aufgabe 20.405 ex-wurzel-ableiten

Gesucht ist die Tangentensteigung an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$. Wir wählen einen Punkt $(x_0, \sqrt{x_0})$ auf dem Graphen von $f(x)$. Der entsprechende Punkt auf $g(x)$ hat die Koordinaten $(\sqrt{x_0}, x_0)$. Die Tangentensteigung in diesem Punkt erhalten wir durch die Ableitung von $g'(x) = 2x$, also $g'(\sqrt{x_0}) = 2\sqrt{x_0}$.

Der Kehrwert davon ist die Tangentensteigung an der Stelle x_0. Wir folgern

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Lösung zu Aufgabe 20.407 ex-vielfache-ableiten

a) $f'(x) = -12x^2$ b) $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ c) $h'(x) = -\mathrm{e}^x$ d) $k'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)' = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$

Lösung zu Aufgabe 20.409 ex-linearkombinationen-ableiten

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 5x^4 - 9x^2$

c) $f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x} + 2x$

d) $f'(x) = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

e) $f'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$

f) $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)' = 2x - 3$

g) $f'(x) = \mathrm{e}^x$

h) $f'(x) = \left(4\ln(x) + \ln\left(\mathrm{e}^x\right)\right)' = 4 \cdot \frac{1}{x} + 1$

Lösung zu Aufgabe 20.410 ex-funktionen-verschachteln

a) $f(g(x)) = (2^x)^5$

b) $g(f(x)) = 2^{x^5}$

c) $f(k(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^5$

d) $k(h(f(x))) = \sqrt{\ln\left(x^5\right)}$

e) $g(f(h(x))) = 2^{(\ln(x))^5}$

f) $h(g(k(x))) = \ln\left(2^{\sqrt{x}}\right)$

Lösung zu Aufgabe 20.411 ex-funktionen-entschachteln

a) $f(x) = \ln\left(x^5\right)$ $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = x^5$

b) $f(x) = \sqrt{4^x}$ $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^4$

c) $f(x) = 2^{x^2}$ $g(x) = 2^x$, $h(x) = x^2$

d) $f(x) = (2^x)^2$ $g(x) = x^2$, $h(x) = 2^x$

Lösung zu Aufgabe 20.413 ex-kettenregel-mit-linearer-approximation-herleiten
Es gilt $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ und $g(x_0+h) \approx g(x_0) + g'(x_0)h$. Es gilt also:

$$k(x_0+h) = f(g(x_0+h)) \approx f\left(g(x_0) + \underbrace{h \cdot g'(x_0)}_{h_2}\right) \approx f(g(x_0)) + h_2 f'(g(x_0)) = f(g(x_0)) + h \cdot g'(x_0) f'(g(x_0))$$

Der erste Term ist $k(x_0)$, der zweite ist also $h \cdot k'(x_0)$. Wir schliessen daraus

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Intuitiv kann man die Sache wie folgt verstehen: Das Argument in f ändert sich nicht mit Änderungsrate 1 (wie wenn dort nur x stehen würde) sondern mit Änderungsrate $g'(x)$. Darum wird die Änderungsrate noch damit multipliziert. Man spricht von innerer Ableitung.

Lösung zu Aufgabe 20.414 ex-kettenregel-anwenden
Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die äussere und innere Funktion zu bestimmen. Wir schreiben $f(x) = g(h(x))$:

a) $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = x^2$. $g'(x) = \mathrm{e}^x$ und $h'(x) = 2x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x$.

b) $g(x) = x^2$, $h(x) = \mathrm{e}^x$, $g'(x) = 2x$, $h'(x) = \mathrm{e}^x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{2x}$.

c) $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = x^7$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h'(x) = 7x^6$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^7} \cdot 7x^6 = \frac{7}{x}$. Hätte man umgeformt als $f(x) = 7\ln(x)$ wäre die Sache etwas einfacher gewesen.

d) $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \mathrm{e}^x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x = 1$. Hätte man umgeformt als $f(x) = x$ wäre die Sache sofort klar.

e) $f'(x) = g'(h(k(x))) \cdot (h(k(x)))' = g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$

f) $g(x) = \mathrm{e}^x$, $h(x) = p\ln(x)$, $g'(x) = \mathrm{e}^x$, $h'(x) = \frac{p}{x}$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)} \cdot \frac{p}{x}$.

g) $g(x) = x^4$, $h(x) = \ln(x)$, $g'(x) = 4x^3$, $h'(x) = \frac{1}{x}$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 4\left(\ln(x)\right)^3 \cdot \frac{1}{x}$

h) $f(x) = (k(x))^-1$. Äussere Funktion $g(x) = x^{-1}$, innere Funktion $h(x) = k(x)$, $g'(x) = -x^{-2}$, $h'(x) = k'(x)$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -(k(x))^{-2} \cdot k'(x) = -\frac{k'(x)}{(k(x))^2}$

Lösung zu Aufgabe 20.417 ex-produktregel-mit-linearer-approximation-herleiten
Es gilt $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$ und $g(x+h) \approx g(x) + g'(x)h$. Das Produkt ist

$$p(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h) \approx (f(x) + f'(x)h) \cdot (g(x) + g'(x)h) = \\ f(x)g(x) + h(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) + h^2 f'(x)g'(x)$$

Der erste Teil ist $p(x)$, der zweite Teil ist eine lineare Approximation von p, also $p'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Der letzte Teil ist für sehr kleine h vernachlässigbar.

Lösung zu Aufgabe 20.418 ex-produktregel-anwenden

a) $f'(x) = \left(x^{42} \cdot \ln(x)\right)' = 42x^{41} \cdot \ln(x) + x^{42} \cdot \frac{1}{x} = x^{41} \cdot (1 + 42\ln(x))$

b) $f'(x) = (\sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^x)' = \sqrt{x}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \left(2^x \cdot x^{-2}\right)' = \ln(2) \cdot 2^x \cdot x^{-2} + 2^x \cdot (-2) \cdot x^{-3}$

d) $f'(x) = \left(x^5 \cdot x^4\right)' = 5x^4 \cdot x^4 + x^5 \cdot 4x^3 = 9x^8$ Hier hätte man besser zuerst umgeformt.

Lösung zu Aufgabe 20.420 ex-quotientenregel-anwenden

a) $f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - \ln(x)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^2 - 3x^2\cdot\ln(x)}{x^6} = \frac{x^2(1-3\ln(x))}{x^6} = \frac{1-3\ln(x)}{x^4}$

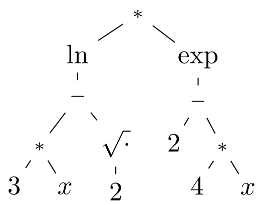
b) $f'(x) = \left(\frac{x^5}{x^3}\right)' = \frac{5x^4\cdot x^3 - x^5\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x^7}{x^6} = 2x$ Zuerst vereinfachen wäre einfacher gewesen!

c) $f'(x) = \left(\frac{\log_2(x)}{2^x}\right)' = \frac{\frac{1}{\ln(2)x}\cdot 2^x - \log_2(x)\cdot\ln(2)\cdot 2^x}{(2^x)^2} = \frac{2^x\left(\frac{1}{\ln(2)x} - \frac{\ln(x)}{\ln(2)}\cdot\ln(2)\right)}{(2^x)^2} = \frac{\frac{1}{\ln(2)x} - \ln(x)}{2^x}$

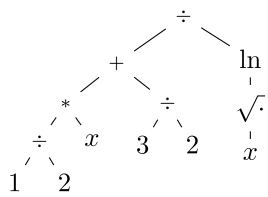
d) $f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{e^x\cdot x^2 - e^x\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x\cdot e^x(x-2)}{x^4} = e^x\cdot\frac{x-2}{x^3}$

Lösung zu Aufgabe 20.421 ex-termbaueme-zeichnen

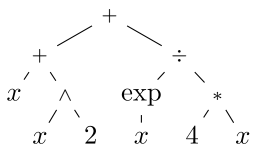
a) $\ln\left(3\cdot x - \sqrt{2}\right)\cdot e^{2-4\cdot x}$



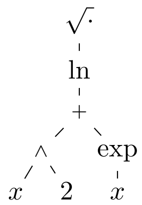
b) $\frac{\frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$



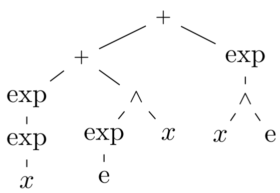
c) $x + x^2 + \frac{e^x}{4\cdot x}$



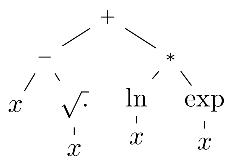
d) $\sqrt{\ln\left(x^2 + e^x\right)}$



e) $e^{e^x} + (e^e)^x + e^{x^e}$



f) $x - \sqrt{x} + \ln(x)\cdot e^x$



Lösung zu Aufgabe 20.422 ex-dem-teufel-ein-ohr-ableiten

a) Kettenregel. Äussere Funktion: e^x, innere Funktion $2x$. Also $\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}\cdot 2$

b) Produktregel. $(x\cdot 2^x)' = 1\cdot 2^x + x\cdot\ln(2)\cdot 2^x = 2^x(1+\ln(2)x)$.

c) Quotientenregel. $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

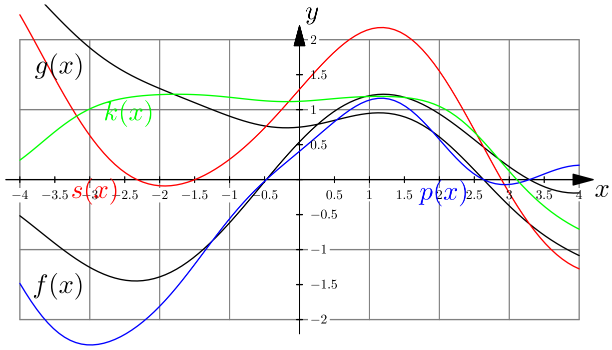
d) $\left(\frac{\sqrt{e^x}}{\ln(4x)}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x}}\cdot e^x\cdot\ln(4x) - \sqrt{e^x}\cdot\frac{1}{4x}\cdot 4}{(\ln(4x))^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{e^x}\,\ln(4x) - \sqrt{e^x}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(4x))^2}$

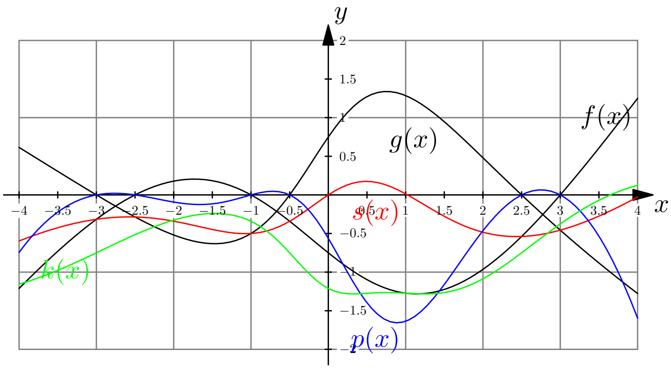
e) $\left(\ln\left(\sqrt{2^x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{2^x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2^x}}\cdot\ln(2)\cdot 2^x = \frac{\ln(2)\cdot 2^x}{2\cdot 2^x} = \frac{\ln(2)}{2}$

Das könnte man auch billiger haben, indem man zuerst vereinfacht: $\ln\left(\sqrt{2^x}\right) = \ln\left(2^{\frac{x}{2}}\right) = \frac{x}{2}\cdot\ln(2) = x\cdot\frac{2}{\ln(2)}$.

f) $\left(e^{x^2}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{x}}\right)' = e^{x^2}\cdot 2x\cdot\sqrt{x+\frac{1}{x}} + e^{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

Lösung zu Aufgabe 20.423 ex-grafisch-funktionen-kombinieren





Lösung zu Aufgabe 20.424 ex-ableiten-bis-zum-abwinken

a) $f(x)=\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x)}}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x)}}\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x)+\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x^2-\sqrt{\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x)}\cdot 2x}{x^4}$$

b) $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x^4\cdot\log_7(42)}-2^{1-x^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x\right)\cdot x^4\cdot\log_7(42)-\ln(x^2-1)\cdot\left(4x^3\cdot\log_7(42)\right)}{x^8\cdot\left(\log_7(42)\right)^2} - \ln(2)\cdot 2^{1-x^2}\cdot(-2)\cdot x$$

c) $f(x)=1+2x^3-\frac{4\cdot\ln(5x\cdot 6^x)}{\sqrt[7]{x^8\cdot\ln(9)}}$

Hier lohnt es sich, zuerst ein bisschen zu vereinfachen, nämlich
$\ln\left(5x\cdot 6^x\right)=\ln(5)+\ln(x)+x\ln(6)$ und
$\sqrt[7]{x^8\cdot\ln(9)}=x^{\frac{8}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}$.
Wir leiten also $f(x)=1+2x^3-4\frac{\ln(5)+\ln(x)+x\ln(6)}{x^{\frac{8}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}}$ ab:

$$f'(x) = 0+6x^2-4\frac{\left(\frac{1}{x}+\ln(6)\right)\cdot x^{\frac{8}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}-(\ln(5)+\ln(x)+x\ln(6))\cdot\frac{8}{7}x^{\frac{1}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}}{x^{\frac{16}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{2}{7}}}$$

Lösung zu Aufgabe 20.425 ex-ableiten-mit-vereinfachen

a) $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x$

$$f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x+\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x$$

b) $f(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} - (-1)\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1-\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x}^{2}$$

c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{2} + 2\ln(x-1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+2) + 2\frac{1}{x-1}\cdot 1 = x + 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+2}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Lösung zu Aufgabe 20.426 ex-hunderste-ableitung

Man bildet die ersten Ableitungen, um eine Gesetzmässigkeit zu finden.
$f'(x) = 2x\cdot e^x + x^2e^x = (x^2+2x)\cdot e^x$
$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$
$f'''(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+2)e^x = (x^2+6x+6)e^x$
Man stellt fest, dass man immer ein Polynom zweiten Grades multipliziert mit e^x erhält. Etwas allgemeiner:
$(f(x)\cdot e^x)' = f'(x)e^x + f(x)e^x = (f(x)+f'(x))e^x$
Wenn $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist, dann ist $f(x)+f'(x)$ wieder ein Polynom n-ten Grades. Der Koeffizient der höchsten Potenz von x ändert sich nicht.
Untersuchen wir den allgemeinen Fall mit $f(x) = x^2+ax+b$. Wir erhalten $f'(x) = 2x+a$ und damit
$f(x)+f'(x) = x^2+(a+2)x+(a+b)$.
D.h. der Koeffizient von x wir immer um 2 grösser. Die Konstante wird immer um den Koeffizienten von x grösser.
Damit bilden die Koeffizienten von x eine arithmetische Folge mit $a_1 = 2$ und $d = 2$, die Konstanten eine arithmetische Reihe (mit erstem Glied 0 und $d = 2$).
Damit lassen sich die Koeffizienten des n-ten Polynoms angeben:
Koeffizent von x: $2n$
Konstante : $n\cdot\frac{a_1+a_n}{2} = n\cdot\frac{0+2(n-1)}{2} = n(n-1)$
und damit:

$$f^{(n)} = \left(x^2+2n\cdot x+n(n-1)\right)e^x$$

$$f^{(100)} = \left(x^2+200x+9900\right)e^x$$