Teil 1 ohne Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

Hinweise

Es hat zu viele Aufgaben. Von den total 30 möglichen Punkten werden 22 für die Note 6 verlangt.

Aufgabe 1 *1+2=3 Punkte*

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x, bzw. nach x und y auf:

a) $\log_2(3x+1) = 4$

b) $\left|\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 1 \\ 4x+3y & = & 2 \end{array}\right|$

Aufgabe 2 *1 Punkt*

100 Gäste feiern ein Fest. Jeder will mit jedem anstossen. Wie viel mal wird insgesamt angestossen?

Aufgabe 3 *1+1=2 Punkte*

Begründen Sie folgende Zusammenhänge mit einer Skizze und ein bis zwei Sätzen:

a) $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

b) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

Aufgabe 4 *2+1+1=4 Punkte*

Sei $f(x) = -(x-1)\cdot(x+2)$.

a) Bestimmen Sie die Null-, Extremal- und Wendestellen von $f(x)$.

b) Skizzieren Sie die Funktion.

c) Berechnen Sie Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen liegt.

Aufgabe 5 *1+1+1=3 Punkte*

Gegeben sind $A = (3, -2, 1)$ und $B = (2, -3, 1)$.

a) Bestimmen die Koordinaten vom Punkt C so, dass B der Mittelpunkt von AC ist.

b) Was ist speziell an der Lage der Geraden (AB) im Koordinatensystem?

c) Schätzen Sie nachvollziehbar den Winkel zwischen $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$ auf 15°genau.

Aufgabe 6 *1+1=2 Punkte*

Bei einem fiktiven Lotto-Spiel werden 7 aus 37 Zahlen gezogen.
Hinweis: Die Resultate sollen als Formel stehen gelassen werden.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp 7 Richtige zu haben?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp 6 Richtige zu haben?

Teil 2 mit Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

Hinweise

Taschenrechner und das Fundamentum sind als Hilfsmittel zugelassen. Notieren Sie den Lösungsweg in mathematischer Notation mit stichwortartigen Kommentaren. Es hat zu viele Aufgaben. Von den total 30 möglichen Punkten werden 22 für die Note 6 verlangt.

Aufgabe 7 *3+1=4 Punkte*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph von $f(x)$ den Graphen von $g(x) = x^2 - 4x + 4$ im Punkt $P = (1, ?)$ berührt. Skizzieren Sie die beiden Funktionen.

b) Wie sind a, b zu wählen, damit der Vektor $\vec{E_1 E_2}$ zwischen den Extremalpunkten von $f(x)$, E_1 und E_2, gleich $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist?

Aufgabe 8 *1+1+1=3 Punkte*

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 4, 2)$ und $C = (2, 0, -1)$.

a) Wie lang ist die kürzeste Seite?

b) Wie gross ist der Winkel $\alpha = CAD$?

c) Wie lang ist die Höhe h_a auf die Seite $a = BC$? *Hinweis: Berechnen Sie erst die Fläche des Dreiecks.*

Aufgabe 9 *2 Punkte*

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person terroristische Absichten hat, beträgt schätzungsweise 10^{-5}. Die Sicherheitsfirma «Snake-Oil-Industries» bietet eine künstliche Intelligenz an, die aufgrund verschiedener Daten Personen mit terroristischen Absichten erkennen kann. Die Firma verspricht, dass 90% dieser Personen erkannt werden. Die Firma gibt an, dass friedliche Personen nur in 1 von 1000 Fällen fälschlicherweise als Terroristen erkannt werden.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine vom System als Terrorist erkannte Person auch wirklich terroristische Absichten hat?

Aufgabe 10 *1+1=2 Punkte*

Ein Virus vermehrt sich anfänglich exponentiell. Die Anzahl verdreifacht sich alle 3 Stunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 100 Viren im Körper vorhanden.

a) Geben Sie die Funktionsgleichung $N(t)$ an, die die Anzahl Viren zur Zeit t beschreibt.

b) Ab 10^6 Viren treten die ersten Krankheitssymptome auf. Wann ist das der Fall?

Aufgabe 11 *1+1+1+1=4 Punkte*

Zwei Spaziergänger sind zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ genau $100\,\text{m}$ voneinander entfernt. Jeder spaziert mit einer Geschwindigkeit von $1\,\text{m/s}$ gradlinig auf den anderen zu. Der erste Spaziergänger hat einen Hund, der zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Geschwindigkeit von $9\,\text{m/s}$ auf zweiten Spaziergänger zurennt. Kaum dort angekommen wendet der Hund und rennt zurück, um das Spiel wieder von vorne zu beginnen. Seien d_1, d_2, d_3, etc. die Strecken, die der Hund zwischen dem Wenden zurücklegt.

a) Skizzieren Sie die ersten 3 Läufe vom Hund.

b) Berechnen Sie d_1 und d_2.

c) Geben Sie einer Formel zur Berechnung von d_n an.

d) Welche Strecke legt der Hund insgesamt zurück, bis sich die Spaziergänger treffen?

Teil 1 ohne Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

Hinweise

Es hat zu viele Aufgaben. Von den total 30 möglichen Punkten werden 22 für die Note 6 verlangt.

Aufgabe 1 *1+2=3 Punkte*

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x, bzw. nach x und y auf:

a) $\log_2(3x+1) = 4$

b) $\left| \begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 1 \\ 4x + 3y & = & 2 \end{array} \right|$

Aufgabe 2 *1 Punkt*

100 Gäste feiern ein Fest. Jeder will mit jedem anstossen. Wie viel mal wird insgesamt angestossen?

Aufgabe 3 *1+1=2 Punkte*

Begründen Sie folgende Zusammenhänge mit einer Skizze und ein bis zwei Sätzen:

a) $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

b) $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Aufgabe 4 *2+1+1=4 Punkte*

Sei $f(x) = -(x-2) \cdot (x+1)$.

a) Bestimmen Sie die Null-, Extremal- und Wendestellen von $f(x)$.

b) Skizzieren Sie die Funktion.

c) Berechnen Sie Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen liegt.

Aufgabe 5 *1+1+1=3 Punkte*

Gegeben sind $A = (3, -2, 1)$ und $B = (2, -3, 1)$.

a) Bestimmen die Koordinaten vom Punkt C so, dass B der Mittelpunkt von AC ist.

b) Was ist speziell an der Lage der Geraden (AB) im Koordinatensystem?

c) Schätzen Sie nachvollziehbar den Winkel zwischen $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$ auf 15°genau.

Aufgabe 6 *1+1=2 Punkte*

Bei einem fiktiven Lotto-Spiel werden 7 aus 37 Zahlen gezogen.
Hinweis: Die Resultate sollen als Formel stehen gelassen werden.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp 7 Richtige zu haben?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp 6 Richtige zu haben?

Teil 2 mit Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

Hinweise

Taschenrechner und das Fundamentum sind als Hilfsmittel zugelassen. Notieren Sie den Lösungsweg in mathematischer Notation mit stichwortartigen Kommentaren. Es hat zu viele Aufgaben. Von den total 30 möglichen Punkten werden 22 für die Note 6 verlangt.

Aufgabe 7 *3+1=4 Punkte*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx$

a) Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph von $f(x)$ den Graphen von $g(x) = x^2 - 4x + 4$ im Punkt $P = (1, ?)$ berührt. Skizzieren Sie die beiden Funktionen.

b) Wie sind a, b zu wählen, damit der Vektor $\overrightarrow{E_1E_2}$ zwischen den Extremalpunkten von $f(x)$, E_1 und E_2, gleich $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist?

Aufgabe 8 *1+1+1=3 Punkte*

Gegeben sind die Punkte $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 4, 2)$, $C = (2, 1, 0)$ und $D = (-3, -6, 0)$ eines allgemeinen Vierecks.

a) Wie lang ist die längste Seite?

b) Wie gross ist der Winkel $\alpha = BAC$?

c) Wie gross ist die Fläche des Vierecks?

Aufgabe 9 *2 Punkte*

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person terroristische Absichten hat, beträgt schätzungsweise 10^{-5}. Die Sicherheitsfirma «Snake-Oil-Industries» bietet eine künstliche Intelligenz an, die aufgrund verschiedener Daten Personen mit terroristischen Absichten erkennen kann. Die Firma verspricht, dass 90% dieser Personen erkannt werden. Die Firma gibt an, dass friedliche Personen nur in 1 von 1000 Fällen fälschlicherweise als Terroristen erkannt werden.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine vom System als Terrorist erkannte Person auch wirklich terroristische Absichten hat?

Aufgabe 10 *1+1=2 Punkte*

Ein Virus vermehrt sich anfänglich exponentiell. Die Anzahl verdoppelt sich alle 2 Stunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 100 Viren im Körper vorhanden.

a) Geben Sie die Funktionsgleichung $N(t)$ an, die die Anzahl Viren zur Zeit t beschreibt.

b) Ab 10^6 Viren treten die ersten Krankheitssymptome auf. Wann ist das der Fall?

Aufgabe 11 *1+1+1+1=4 Punkte*

Sei $A_1B_1C_1$ ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1. Die Seitenmitten bilden ein kleineres Dreieck $A_2B_2C_2$. Dieses wird vom ersten Dreieck entfernt und es bleiben 3 kleinere Dreiecke. Mit diesen restlichen drei Dreiecken wird wieder gleich verfahren, usw. Am Schluss erhält man ein sogenanntes Sierpinski Dreieck.

a) Skizzieren Sie, was nach 2 Schritten übrig bleibt.

b) Wie gross ist der Flächeninhalt von $A_1B_1C_1$?

c) Wie viele Dreiecke sind nach 5 Schritten vorhanden (d.h. 5 mal werden jeweils die mittleren Dreiecke entfernt)?

d) Wie gross ist, nach unendlich vielen Schritten, die verbleibende Fläche?

Teil 1 ohne Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

Aufgabe 1 *1+2=3 Punkte*

a)

$$\begin{aligned} \log_2(3x+1) &= 4 && |2^{(\cdot)} \\ 3x+1 &= 2^4 \\ 3x+1 &= 16 && |-1 \\ 3x &= 15 && |:3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

b) Gleichung 1 nach y aufgelöst: $y = \frac{1-3x}{2}$, eingesetzt in die zweite Gleichung:

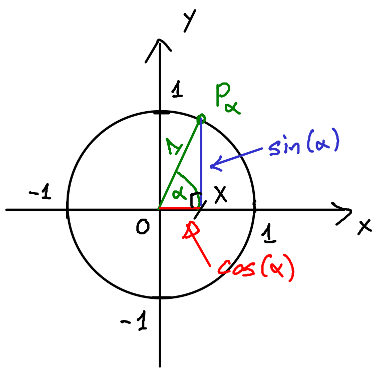
$$\begin{aligned} 4x + 3 \cdot \frac{1-3x}{2} &= 2 \\ 4x + \frac{3-9x}{2} &= 2 && |\cdot 2 \\ 8x + (3-9x) &= 4 \\ -x+3 &= 4 && |+x-4 \\ -1 &= x \end{aligned}$$

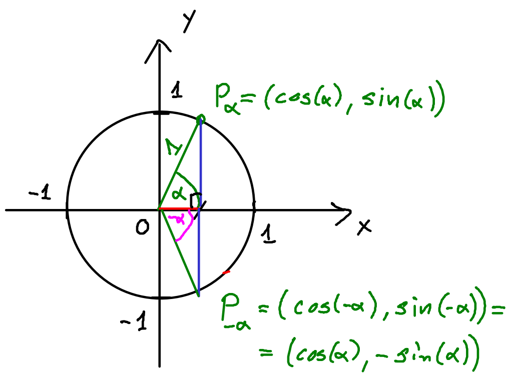
Eingesetzt in $y = \frac{1-3x}{2} = \frac{1-(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$.
Lösung: $x = -1$, $y = 2$.

Aufgabe 2 *1 Punkt*

Die erste Person stösst 99 mal an, die nächste noch 98, etc, also $99 + \ldots + 1 = n \cdot \frac{a_1+a_n}{2} = 99 \cdot \frac{1+99}{2} = 4950$ mal.
Oder man zählt 99 mal für jede der 100 Personen, hat dann aber doppelt gezählt, also $\frac{100 \cdot 99}{2}$.

Aufgabe 3 *1+1=2 Punkte*





a) Das Dreieck OXP_α ist rechtwinklig mit Hypotenuse 1 und Katheten $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$. Es gilt der Satz von Pythagoras: $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1^2$.

b) Den Punkt $P_{-\alpha}$ erhält man durch Spiegelung des Punktes P_α an der x-Achse. Die x-Koordinate (der Cosinus) bleibt unverändert, während die y-Koordinate (der Sinus) das Vorzeichen wechselt. Also gilt $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

Aufgabe 4 *2+1+1=4 Punkte*

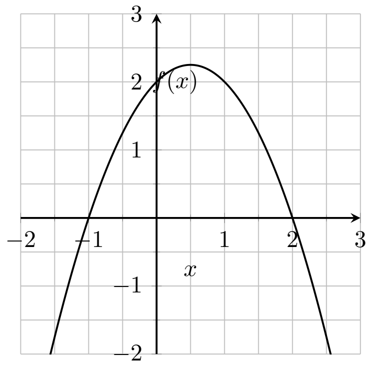
a) Die Funktion ist als Produkt gegeben. Das ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Man erhält also direkt: Nullstellen: $x = -2$, $x = 1$.

Extremalstellen. Wir suchen jene x für die $f'(x) = 0$. Um abzuleiten, lohnt es sich, auszumultiplizeren (sonst müsste man die Produktregel anwenden):

$f(x) = -x^2 - x + 2$, also $f'(x) = -2x - 1$.

$f'(x) = 0$ liefert die Extremalstelle $x = -0.5$ (mit $y = f(-0.5) = 2.25$).

Wendestellen: $f''(x) = -2$, also keine WS. (eine Parabel hat keine WS).

b) 

c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{8}{3} - 2 + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = 3 + 2 - 2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{9}{2}$

Aufgabe 5 *1+1+1=3 Punkte*

a) $\vec{OC} = \vec{OA} + 2\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Parallel zur xy-Ebene.

c) Eine Skizze mit Sicht auf die xy-Ebene liefert ca. 20°. Sonst $\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{6+6+1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{13}{14}$. Ergibt 21.79°.

Aufgabe 6 *1+1=2 Punkte*

a) Es gibt total $\binom{37}{7}$ mögliche Ziehungen. (Die Reihenfolge der gezogenen Zahlen ist nicht relevant). Davon ist genau eine Ziehung die richtige. Also

$P(7 \text{ Richtige}) = \frac{1}{\binom{37}{7}}$.

b) Um eine Ziehung mit 6 Richtigen zu bilden, müssen aus den 7 Richtigen 6 ausgewählt werden, wofür es $7 = \binom{7}{6}$ Möglichkeiten gibt. Aus den 30 «Falschen» wird eine ausgewählt, wofür es $30 = \binom{30}{1}$ Möglichkeiten gibt. Total gibt es also $7 \cdot 30$ Möglichkeiten für 6 Richtige. Die Wahrscheinlichkeit ist also

$P(\text{genau 6 Richtige}) = \frac{\binom{30}{1} \cdot \binom{7}{6}}{\binom{37}{7}}$.

Teil 2 mit Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

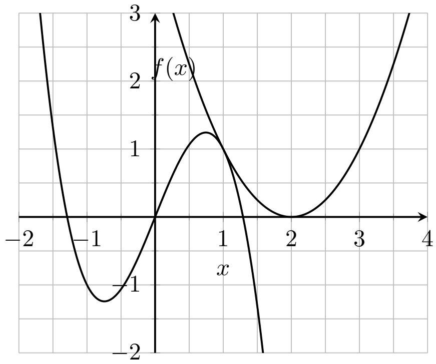
Aufgabe 7

3+1=4 Punkte

a) Im Berührungspunkt $x = 1$ müssen beide Funktionswerte gleich sein, was die Gleichung $f(1) = g(1)$ liefert. Zusätzlich müssen die Steigungen beider Funktionen für $x = 1$ gleich sein, was uns die Gleichung $f'(1) = g'(1)$ liefert.

Das ergibt ein System mit zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten a und b. Mit dem TR erhält man:

$$a = -\frac{3}{2}, \qquad b = \frac{5}{2}.$$



b) Sei e die x-Koordinate der ersten Extremalstelle. Damit ist $E_1 = (e, f(e))$ und $E_2 = (e+2, f(e+2)) = (e+2, f(e)+2)$. Damit haben wir 3 Unbekannte e, a, und b und folgende drei Gleichungen:

Es müssen Extremalstellen sein, also $f'(e) = 0$ und $f'(e+2) = 0$.

Weiter muss der Unterschied der y-Koordinaten 2 sein: $f(e) + 2 = f(e+2)$.

Der TR liefert als Lösung $e = -1$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

Alternative: Man berechnet erst die Extremalstellen, indem man $f'(x) = 0$ löst. Man erhält

$$x_E = \pm\frac{\sqrt{-\frac{b}{a}}}{\sqrt{3}}$$

Damit die Extremalstellen die Distanz 2 haben muss $\frac{\sqrt{-\frac{b}{a}}}{\sqrt{3}} = 1$ sein.

Setzt man die beiden Werte in f ein, muss eine Differenz von 2 herauskommen.

Aufgabe 8

1+1+1=3 Punkte

a) $|\vec{AB}| = 3$. ($|\vec{BC}| = \sqrt{26}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{21}$).

b) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{2}{3\cdot\sqrt{21}} \approx 0.1454$. Liefert $\alpha \approx 81.635°$ (oder 1.4248 rad).

c) Die Dreiecksfläche ist die Hälfte der Parallelogrammfläche, die der Länge des Vektorprodukts entspricht:

$A = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-10\\7\\-6\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{185} \approx 6.8007.$

$h_a = \frac{2A}{a} = \frac{\sqrt{185}}{\sqrt{26}} \approx 2.6675$

Aufgabe 9 *2 Punkte*

T: Terrorist, F: flagged (als solcher vom System erkannt).
Entweder ein Baum zeichnen (erste Etage T oder $\overline{T}$, zweite Etage F oder $\overline{F}$), oder eine Vierfeldtafel:

	T	$\overline{T}$	Total
F	$0.9 \cdot 0.00001$	$0.001 \cdot 0.99999$	
$\overline{F}$	$0.1 \cdot 0.00001$	$0.999 \cdot 0.99999$	
Total	0.00001	0.99999	1

Die Wahrscheinlichkeit, dass die F eintritt ist $(1-10^{-5}) \cdot 10^{-3} + 0.9 \cdot 10^{-5}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass F und T gleichzeitig eintreten ist aber nur $0.9 \cdot 0.00001$. Damit ist
$P(T|F) = \frac{P(T \cap F)}{F} = \frac{0.9 \cdot 10^{-5}}{(1-10^{-5}) \cdot 10^{-3} + 0.9 \cdot 10^{-5}} = \frac{100}{11211} \approx 0.008919$
In mehr als 99% der Fälle sind die von der KI gemeldeten Terroristen in Wirklichkeit friedliche Menschen. Fälschlicherweise als Terrorist verdächtigt zu werden, kann recht unangenehme und langfristige Konsequenzen haben.
Davor habe ich persönlich mehr Angst als vor Terroristen.

Aufgabe 10 *1+1=2 Punkte*

a) Exponentialfunktion mit Basis 3 (wegen der Verdreifachung). Im Exponenten zählt man die Anzahl Verdreifachungen, also $t/3$. Der Startwert ist 100:
$N(t) = 100 \cdot 3^{t/3}$.

b) $N(t) = 10^6$ liefert $t \approx 25.1508$ h.

Aufgabe 11 *1+1+1+1=4 Punkte*

a) ...

b) Für d_1: Es gilt: Strecke Mensch+Strecke Hund = 100 m, in gleicher Zeit t:
$t \cdot v_H + t \cdot v_M = 100$, liefert $t = 10$, $d_1 = 90$.
Nach 10 s sind die beiden Spaziergänger 80 m voneinander entfernt. Es gilt:
$t \cdot v_H + t \cdot v_M = 80$, liefert $t = 8$, $d_2 = 72$.

c) Die Strecke wird jedesmal mit dem Faktor $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ multipliziert. Man erhält $d_n = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

d) Entweder via geometrische Summenformel, oder sich überlegen, dass die Spaziergänger 50 s unterwegs sind, und der Hund in dieser Zeit 450 m zurücklegt.

Teil 1 ohne Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

Aufgabe 1 *1+2=3 Punkte*

a)

$$\begin{aligned} \log_2(3x+1) &= 4 && |2^{(\cdot)} \\ 3x+1 &= 2^4 \\ 3x+1 &= 16 && |-1 \\ 3x &= 15 && |:3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

b) Gleichung 1 nach y aufgelöst: $y = \frac{1-3x}{2}$, eingesetzt in die zweite Gleichung:

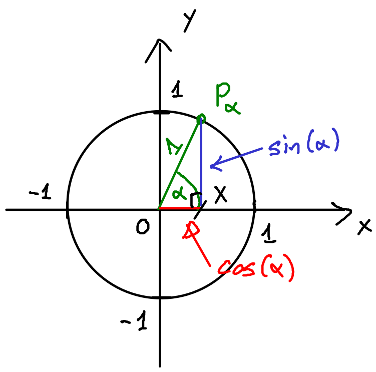
$$\begin{aligned} 4x + 3 \cdot \frac{1-3x}{2} &= 2 \\ 4x + \frac{3-9x}{2} &= 2 && |\cdot 2 \\ 8x + (3-9x) &= 4 \\ -x + 3 &= 4 && |+x-4 \\ -1 &= x \end{aligned}$$

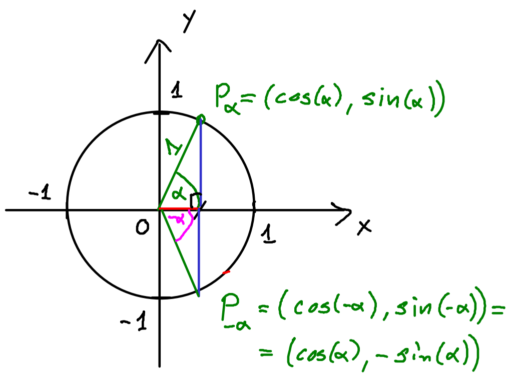
Eingesetzt in $y = \frac{1-3x}{2} = \frac{1-(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$.
Lösung: $x = -1$, $y = 2$.

Aufgabe 2 *1 Punkt*

Die erste Person stösst 99 mal an, die nächste noch 98, etc, also $99 + \ldots + 1 = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 99 \cdot \frac{1+99}{2} = 4950$ mal.
Oder man zählt 99 mal für jede der 100 Personen, hat dann aber doppelt gezählt, also $\frac{100 \cdot 99}{2}$.

Aufgabe 3 *1+1=2 Punkte*

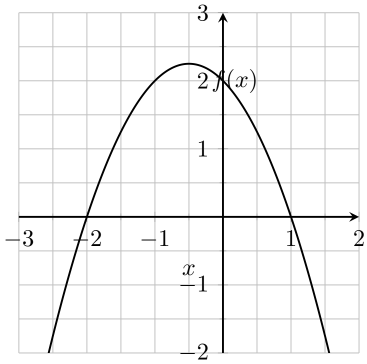




a) Das Dreieck OXP_α ist rechtwinklig mit Hypotenuse 1 und Katheten $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$. Es gilt der Satz von Pythagoras: $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1^2$.
b) Den Punkt $P_{-\alpha}$ erhält man durch Spiegelung des Punktes P_α an der x-Achse. Die x-Koordinate (der Cosinus) bleibt unverändert, während die y-Koordinate (der Sinus) das Vorzeichen wechselt. Also gilt $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

Aufgabe 4 *2+1+1=4 Punkte*

a) Die Funktion ist als Produkt gegeben. Das ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Man erhält also direkt: NS: $x = 2$, $x = -1$.
ES: $f(x) = -x^2 + x + 2$, also $f'(x) = -2x + 1 = 0$ liefert $x = 0.5$, $y = 2.25$. $f''(x) = -2$, keine WS. (ein Parabel hat keine WS).

b) 

c) $\int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = -3 + 6 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Aufgabe 5 *1+1+1=3 Punkte*

a) $\vec{OC} = \vec{OA} + 2\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Parallel zur xy-Ebene.

c) Eine Skizze mit Sicht auf die xy-Ebene liefert ca. 20°. Sonst $\frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|} = \frac{6+6+1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{13}{14}$. Ergibt 21.79°.

Aufgabe 6 *1+1=2 Punkte*

a) Es gibt total $\binom{37}{7}$ mögliche Ziehungen. (Die Reihenfolge der gezogenen Zahlen ist nicht relevant). Davon ist genau eine Ziehung die richtige. Also
$P(7 \text{ Richtige}) = \frac{1}{\binom{37}{7}}$.

b) Um eine Ziehung mit 6 Richtigen zu bilden, müssen aus den 7 Richtigen 6 ausgewählt werden, wofür es $7 = \binom{7}{6}$ Möglichkeiten gibt. Aus den 30 «Falschen» wird eine ausgewählt, wofür es $30 = \binom{30}{1}$ Möglichkeiten gibt. Total gibt es also $7 \cdot 30$ Möglichkeiten für 6 Richtige. Die Wahrscheinlichkeit ist also
$P(\text{genau 6 Richtige}) = \frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{7}{6}}{\binom{37}{7}}$.

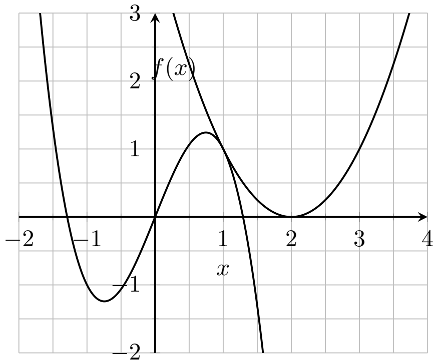
Teil 2 mit Hilfsmittel: 45 Minuten (15 / 30 Punkte)

Aufgabe 7 *3+1=4 Punkte*

a) Im Berührungspunkt $x = 1$ müssen beide Funktionswerte gleich sein, was die Gleichung $f(1) = g(1)$ liefert. Zusätzlich müssen die Steigungen beider Funktionen für $x = 1$ gleich sein, was uns die Gleichung $f'(1) = g'(1)$ liefert.

Das ergibt ein System mit zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten a und b. Mit dem TR erhält man:

$$a = -\frac{3}{2}, \qquad b = \frac{5}{2}.$$



b) Sei e die x-Koordinate der ersten Extremalstelle. Damit ist $E_1 = (e, f(e))$ und $E_2 = (e+2, f(e+2)) = (e+2, f(e)+2)$. Damit haben wir 3 Unbekannte e, a, und b und folgende drei Gleichungen:

Es müssen Extremalstellen sein, also $f'(e) = 0$ und $f'(e+2) = 0$.

Weiter muss der Unterschied der y-Koordinaten 2 sein: $f(e) + 2 = f(e+2)$.

Der TR liefert als Lösung $e = -1$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

Alternative: Man berechnet erst die Extremalstellen, indem man $f'(x) = 0$ löst. Man erhält

$$x_E = \pm\frac{\sqrt{-\frac{b}{a}}}{\sqrt{3}}$$

Damit die Extremalstellen die Distanz 2 haben muss $\frac{\sqrt{-\frac{b}{a}}}{\sqrt{3}} = 1$ sein.

Setzt man die beiden Werte in f ein, muss eine Differenz von 2 herauskommen.

Aufgabe 8

1+1+1=3 Punkte

a) $\overline{AD} = \sqrt{89}$ ($\sqrt{9}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{74}$).

b) $\frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AD}|\cdot|\vec{AB}|} = \frac{-21}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{9}} \approx -0.742$. Winkel: $\arccos(-0.741\ldots) \approx 137.90°$.

c) $\frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}\times\vec{AD}| = 3\sqrt{10}$ und $\frac{1}{2}\cdot|\vec{CB}\times\vec{CD}| = 3\sqrt{10}$. Summe: $6\sqrt{10} \approx 18.974$

Aufgabe 9

2 Punkte

T: Terrorist, F: flagged (als solcher vom System erkannt).

Entweder ein Baum zeichnen (erste Etage T oder $\overline{T}$, zweite Etage F oder $\overline{F}$), oder eine Vierfeldtafel:

	T	$\overline{T}$	Total
F	$0.9\cdot0.00001$	$0.001\cdot0.99999$	
$\overline{F}$	$0.1\cdot0.00001$	$0.999\cdot0.99999$	
Total	0.00001	0.99999	1

Die Wahrscheinlichkeit, dass die F eintritt ist $(1-10^{-5})\cdot 10^{-3}+0.9\cdot 10^{-5}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass F und T gleichzeitig eintreten ist aber nur $0.9 \cdot 0.00001$. Damit ist
$P(T|F) = \frac{P(T\cap F)}{F} = \frac{0.9\cdot 10^{-5}}{(1-10^{-5})\cdot 10^{-3}+0.9\cdot 10^{-5}} = \frac{100}{11211} \approx 0.008919$
In mehr als 99% der Fälle sind die von der KI gemeldeten Terroristen in Wirklichkeit friedliche Menschen. Fälschlicherweise als Terrorist verdächtigt zu werden, kann recht unangenehme und langfristige Konsequenzen haben.
Davor habe ich persönlich mehr Angst als vor Terroristen.

Aufgabe 10 *1+1=2 Punkte*

a) $N(t) = 100 \cdot 2^{t/2}$.

b) $N(t) = 10^6$ liefert $t \approx 26.5754$ h.

Aufgabe 11 *1+1+1+1=4 Punkte*

a)

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $3^5 = 243$

d) Nach n Schritten ist noch die Fläche $A_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ übrig, d.h. wenn $n \to \infty$ ist die Verbleibende Fläche 0.