Aufgabe 381 Zeigen Sie mit den beiden vorherigen Gesetzen, dass auch Folgendes gilt:

a) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$ b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

✎

Aufgabe 382 Beweisen Sie den **Basiswechsel** für Logarithmen: $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.
Vorgehen: Schreiben Sie x als Potenz von b und berechnen Sie $\log_c(x)$. Lösen Sie dann nach $\log_b(x)$ auf.

✎

Der Basiswechsel wird angewandt, um Logarithmen zu beliebigen Basen numerisch auszurechnen. Es stellt sich heraus, dass der natürliche Logarithmus zur Basis $\mathrm{e} \approx 2.7182818$ am einfachsten zu berechnen ist. Daher werden alle Logarithmen von Computern wie folgt berechnet:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Merke Logarithmusgesetze

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b(x)$$

Daraus folgt

$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x) \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \qquad \log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}.$$

Vor der Ära der Taschenrechner waren Rechenschieber weit verbreitet. Die Grundform sind zwei **logarithmische Skalen**, d.h. die Zahl x hat den Abstand proportional zu $\log(x)$ von der Zahl 1 (was als Nullpunkt der logarithmischen Skala aufgefasst werden kann). Damit kann nun multipliziert werden, indem mit zwei gleichen Skalen die Abstände addiert werden:

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

Bei «modernen» Rechenschiebern sind zusätzlich noch viele weitere Skalen vorhanden, die viele weitere Berechnungen erlauben, wie z.B. Quadrieren oder trigonometrische Funktionen.

Aufgabe 383 Rechenschieber: Wer hat's erfunden?

Aufgabe 384 Was ist der Zusammenhang zwischen $\log_x(y)$ und $\log_y(x)$?
Hinweis: Zwei mögliche Ansätze: Basiswechsel oder Definition des Logarithmus und Gleichung umformen.

Aufgabe 385 Zerlegen Sie:

a) $\log\left(\frac{ab}{a+b}\right)$

b) $\log\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2-y^2}\right)$

c) $\log_a\left(\frac{a \cdot b^c}{\sqrt[n]{a}}\right)$

d) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{999}{1000}\right)$

Aufgabe 386 Fassen Sie als einen einzigen Logarithmus zusammen.

a) $\log(b) - \log(c+d)$

b) $2\log(x) + 3\log(y) - 5\log(z)$

c) $\frac{1}{3}(\log(b) + 2\log(c)) - \frac{1}{2}(5\log(d) + \log(f))$

d) $\ln(a+b) + 1$