18 Folgen und Reihen

Aufgabe 18.337 Finden Sie die nächsten 4 Glieder der Folgen:

a) $7, 9, 11, 13, 15, \ldots$
b) $32, 27, 22, 17, 12, \ldots$
c) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$
d) $\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4, \ldots$
e) $1, -3, 9, -27, 81, -243, \ldots$
f) $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$
g) $\frac{32}{3}, \frac{16}{9}, \frac{8}{27}, \frac{4}{81}, \ldots$
h) $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -3, \ldots$
i) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$
j) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
k) $800, 1200, 1400, 1500, 1550, \ldots$
l) $12, 9, 7, 6, 6, 7, 9, 12, 16, \ldots$

Finden Sie falls möglich für jede Folge eine Formel, wie aus dem n-ten Glied a_n das nächste Glied a_{n+1} berechnet werden kann (eventuell kommen auch n selbst oder Glieder davor in der Formel vor).

Finden Sie ebenfalls eine Formel (bzw. Funktion), die aus dem Index (Nummer) n des Glieds direkt das n-te Glied a_n der Folge berechnet.

Von den 12 Folgen lassen sich acht in zwei Typen einteilen, die jeweils auf Formeln gleichen Typs führen. Welche?

18.1 Notation und Definitionen

Definition 18.37 Folge

Eine **Folge** $(a_n) = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sind **geordnete**, durch natürliche Zahlen **indizierte Glieder** (auch **Elemente** genannt). Die Glieder selbst sind reelle Zahlen. Anstatt a können auch andere Buchstaben verwendet werden. Traditionellerweise wird in der Mathematik das erste Glied mit 1 indiziert. Informatiker würden mit 0 beginnen (was zu «einfacheren» Formeln führt).

Definition 18.38 Arithmetische Folge

Eine Folge (a_n) heisst **arithmetisch**, wenn die **Differenz** d zweier aufeinanderfolgenden Gliedern **konstant** ist.

$$d = a_{n+1} - a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

D.h. $(a_n) = a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \ldots$
Eine arithmetische Folge ist vollständig bestimmt durch das erste Glied a_1 und der Differenz d.

Beispiel: Sei (a_n) eine arithmetische Folge mit $a_1 = 13$ und $d = -2$. Füllen Sie folgende Tabelle aus:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i										

Definition 18.39 Geometrische Folge

Eine Folge (g_n) heisst **geometrisch**, wenn der **Quotient** q zweier aufeinanderfolgenden Gliedern **konstant** ist.

$$q = \frac{g_{n+1}}{g_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^\star$$

D.h. $(g_n) = g_1, g_1 \cdot q, g_1 \cdot q^2, g_1 \cdot q^3, g_1 \cdot q^4, \ldots$
Eine geometrische Folge ist vollständig bestimmt durch das erste Glied g_1 und den Quotienten q.

Beispiel: Sei (g_n) eine geometrische Folge mit $g_1 = -\frac{1}{4}$ und $q = -\sqrt{2}$. Füllen Sie folgende Tabelle aus:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i										

Definition 18.40 Explizite Definition

Eine Folge ist **explizit** definiert, wenn eine Formel zur direkten Berechnung des n-ten Gliedes angeben wird.
Beispiel einer arithmetischen Folge: ✎

Beispiel einer geometrischen Folge: ✎

Definition 18.41 Rekursive Definition

Eine Folge ist **rekursiv** definiert, wenn eine Formel zur Berechnung eines Gliedes aus dem oder den **Vorgängerelementen** und eventuell dem Index des Gliedes angegeben wird. Zusätzlich ist es nötig, das oder die **ersten Glieder vorzugeben**.

Beispiel einer arithmetischen Folge: ✎

Beispiel einer geometrischen Folge: ✎

Fibonacci-Folge (Aufgabe 18.337i)): ✎

Definition 18.42 Implizite Definition

Eine Folge ist **implizit** definiert, wenn die ersten Glieder gegeben sind, und für den Leser klar ist, wie die Folge weitergeführt werden soll (wie z.B. in Aufgabe 18.337).

Aufgabe 18.338 Für die Definition einer Folge gibt es drei Möglichkeiten: implizit, explizit und rekursiv. Geben Sie jeweils die beiden anderen Definitionsmöglichkeiten an. Geben Sie auch an, ob die Folge artihmetisch, geometrisch oder keines von beidem ist.

a) $a_n = 8 - n$

b) $(a_n) = 3, 6, 12, 24, 48, \dots$

c) $(a_n) = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$

d) $a_n = \frac{16}{2^{n-1}}$

e) $(a_n) = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$

f) $(a_n) = \begin{cases} a_1 = 100 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 1.02 \end{cases}$

Aufgabe 18.339 Bestimmen Sie das erste Glied a_1 und die Differenz d einer arithmetischen Folge (a_n), wenn Folgendes gegeben ist (allfällige Gleichungen können mit dem TR gelöst werden):

a) $a_2 = 5$ und $a_3 = 7$.

b) $a_5 = 17$ und $a_8 = 32$.

c) a_9 und a_{13}
Resultat als Formel, die a_9 und a_{13} enthält.

d) a_n und a_m
Resultat als Formel, die a_n und a_m enthält.

e) $a_{15} + a_{20} = 300$ und $a_1 = 10$.

f) $a_3 \cdot a_4 = 24$ und $a_5 = 13$.

g) $a_3 = 4a_7$ und $a_3 + a_4 = 10$.

h) $a_{a_4} = 54$ und $a_{a_1} = 6$.

Merke

Das n-te Glied einer arithmetischen bzw. geometrischen Folge kann aus dem ersten Glied und der Differenz, bzw. dem Quotienten berechnet werden:

Arithmetisch: ✎ Geometrisch: ✎

Aufgabe 18.340 Bestimmen Sie das erste Glied g_1 und den Quotienten q einer geometrischen Folge (g_n), wenn Folgendes bekannt ist (wobei die Gleichungen von Hand zu lösen sind):

a) $g_5 = 24$ und $g_6 = 48$

b) $g_4 = 18$ und $g_6 = 162$

c) g_5 und g_{10}

d) g_n und g_m

Aufgabe 18.341 Seien (a_n) und (b_n) arithmetische Reihen mit $(a_n) = 7, 5, \ldots$ und $b_n = 5n - 4$.

a) Schreiben Sie die beiden Folgen implizit, explizit und rekursiv.

b) Sei die Folge (c_n) definiert als $c_n = a_n + b_n$. Schreiben Sie (c_n) implizit, explizit und rekursiv. Ist (c_n) arithmetisch?

c) Sei die Folge (d_n) definiert als $d_n = a_n \cdot b_n$. Schreiben Sie (d_n) implizit und explizit. Ist (d_n) arithmetisch?

d) Sei die Folge (e_n) definiert als $e_n = a_{b_n}$. Schreiben Sie (e_n) implizit, explizit und rekursiv. Ist (e_n) arithmetisch?

Aufgabe 18.342 Sei (a_n) eine arithmetische Folge.

a) Für $a_1 = 2$ und $d = -\frac{1}{2}$ zeichnen Sie die Glieder von (a_n) im Koordinatensystem, wobei der Index des Gliedes der x-Koordinate und der Wert der y-Koordinate entspricht.

b) Bestimmen Sie die lineare Funktion $f(x) = mx + q$ so, dass $f(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

c) Wie hängen i.A. die Differenz d und die Steigung m zusammen?

d) Für $d > 0$, $d < 0$ und $d = 0$, was lässt sich über die Werte a_n aussagen, wenn n immer grösser wird?

Aufgabe 18.343 Skizzieren Sie für $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = -\frac{1}{2}$, $q_3 = 2$ und $q_4 = -2$ jeweils die ersten zehn Glieder der geometrischen Folge (a_n) mit $a_1 = 1$. Zeichnen Sie die Indizes 1 bis 10 auf der x-Achse, die zugehörigen Folgeglieder auf der y-Achse. Man verwendet auch die Begriffe «gedämpft», «explosiv», «alternierend» und «monoton» um das Verhalten von Folgen zu beschreiben. Welche dieser Begriffe treffen auf diese vier Folgen zu? Nennen Sie ein Beispiel einer monotonen und explosiven Entwicklung «aus dem Leben».

Aufgabe 18.344 Gegeben sind zwei arithmetische Folgen (a_n) und (b_n) mit Differenzen d_a und d_b.

a) Zeigen Sie, dass die Folge (c_n) definiert durch $c_n = a_n + b_n$ ebenfalls arithmetisch ist und bestimmen Sie die zugehörige Differenz.

b) Sei (f_n) die Folge definiert durch $f_n = n \cdot a_n$. Kann (f_n) arithmetisch sein? Falls ja, was muss an der Folge (a_n) speziell sein?

c) Zeigen Sie, dass die Folge (e_n) definiert durch $e_n = 2^{a_n}$ geometrisch ist und bestimmen Sie den zugehörigen Quotienten q.

18.1.1 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Definition 18.43 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Gegeben sind zwei reelle Zahlen c und d. Man definiert:

arithmetisches Mittel: $a = \dfrac{c+d}{2}$ geometrisches Mittel: $g = \sqrt{c \cdot d}$

Aufgabe 18.345

a) Berechnen Sie das arithmetische und geometrische Mittel von 2 und 8.

b) Berechnen Sie das arithmetische und geometrische Mittel von 4 und 36.

c) Beweisen Sie, dass bei einer arithmetischen Reihe jedes Glied das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist.

d) Beweisen Sie, dass bei einer geometrischen Reihe jedes Glied das geometrische Mittel seiner Nachbarglieder ist.

e) Finden Sie je eine geometrische Interpretation für das arithmetische und geometrische Mittel.

Hinweis: Rechtecke und Quadrate mit entsprechender Eigenschaft.

f) Verallgemeinern Sie das arithmetische und geometrische Mittel auf 3 Werte und finden Sie entsprechende Interpretationen.

18.2 Reihen und das Summenzeichen $\sum$

Definition 18.44 Summenzeichen $\sum$

Das Summenzeichen steht für eine **Summe** mit vielen Summanden, die von einer **Laufvariablen** abhängen. Für die Laufvariable wird oft der Buchstabe i oder j verwendet. Für die Laufvariable wird eine **untere** und **obere Grenze** als **ganze Zahl** (kann auch negativ sein) angegeben.

$$\sum_{i=1}^{42} f(i)$$

Ist die untere Grenze grösser als die obere, ist die Summe **leer** und wird als 0 definiert. So ist z.B. $\displaystyle\sum_{i=42}^{23} i = 0$.

Achtung: $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} i^2+1 = 1^2+2^2+3^2+1 \neq \sum_{i=1}^{3}\left(i^2+1\right) = (1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1).$

Aufgabe 18.346 Schreiben Sie folgende Summen implizit ohne irgendetwas auszurechnen.

Beispiel: $\displaystyle\sum_{i=12}^{23}\sqrt{i+2} = \sqrt{12+2}+\sqrt{13+2}+\sqrt{14+2}+\ldots+\sqrt{22+2}+\sqrt{23+2}.$

a) $\displaystyle\sum_{x=4}^{18}(x^2-5)$

b) $\displaystyle\sum_{p=-2}^{2}\left(p^3+\frac{1}{p}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{q=15}^{20}\sqrt{10}-\pi$

d) $\displaystyle\sum_{t=-5}^{-1}1$

e) $\displaystyle\sum_{b=3}^{11}(a_{b-2})$

f) $\displaystyle\sum_{t=0}^{2}\left(\sum_{k=t-1}^{t+2}k^2\right)$

Aufgabe 18.347 Gegeben sind n verschiedene reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Schreiben Sie den Mittelwert $\overline{x}$ (arithmetisches Mittel) aller Werte mit dem Summenzeichen.

$$\overline{x} = ✎$$

Analog zum Summenzeichen $\sum$ gibt es das Produktzeichen $\prod$. Schreiben Sie damit das geometrische Mittel $\overline{x}_{\text{geom}}$ aller Werte:

$$\overline{x}_{\text{geom}} = ✎$$

Aufgabe 18.348 Finden Sie eine effiziente Methode um folgende Summen zu berechnen: Die Summe

a) der natürlichen Zahlen von 1 bis und mit 1000.
b) der natürlichen Zahlen von 100 bis und mit 200.
c) der natürlichen Zahlen von 1 bis und mit n.
d) der natürlichen Zahlen von n bis und mit m (mit $n < m$).
e) der geraden Zahlen von 2 bis und mit 204.
f) der ungeraden Zahlen von 101 bis und mit 303.
g) der ersten 10 Glieder einer arithmetischen Folge, wenn a_1 und d gegeben sind.
h) der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge, wenn a_1 und d gegeben sind.

Schreiben Sie die Summen jeweils auch noch mit dem Summenzeichen.

Definition 18.45 Reihe

Gegeben ist eine Folge (a_n).
Die **zugehörige Reihe** (s_n) ist die Folge der **Teilsummen** der Glieder von (a_n).
Implizit: ✎

Rekursiv: ✎

Explizit: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Aufgabe 18.349 Sei (a_n) eine arithmetische Folge, von der a_1 und d bekannt sind. Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{n} a_i$ mit Hilfe folgender Tabelle:

$$\begin{array}{rccccccccc}
\sum_{i=1}^{n} a_i = & a_1 & + & a_1+d & + & \ldots & + & a_1+(n-2)d & + & a_1+(n-1)d \\
+\sum_{i=1}^{n} a_i = & a_1+(n-1)d & + & a_1+(n-2)d & + & \ldots & + & a_1+d & + & a_1 \\
\hline
2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i = & & + & & + & & + & & + &
\end{array}$$

Daraus folgt:

Merke

Die Summe der ersten n Elemente einer arithmetischen Folge (a_n) ist

✎

In Worten: ✎

Aufgabe 18.350 Berechnen Sie die fehlenden Grössen folgender arithmetischen Folgen und Reihen:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a_1	1.2	404			1.8	207
a_n		-9	107	0		
n	20			61		46
d	2.1	-7	5.2		0.05	
s_n			123	2196	4059	207

Quelle: Erhard Rhyn, Analysis, A16, S. 3

Definition 18.46 Arithmetische Reihe

Ein **arithmetische Reihe** (s_n) ist die Teilsummenfolge einer arithmetischen Folge (a_n). D.h.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i =$$

Aufgabe 18.351 Auf welcher Art von Kurve liegen die Punkte (n, s_n), wenn (s_n) eine arithmetische Reihe ist? Beispiel: $a_1 = -2$, $d = 1$.

Aufgabe 18.352 Sei (g_n) eine geometrische Folge, von der g_1 und q bekannt sind. Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{n} g_i$:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc}
\sum_{i=1}^{n} g_i = & g_1 & + & g_1 \cdot q & + & g_1 \cdot q^2 & + & \ldots & + & \ldots & + & g_1 \cdot q^{n-2} & + & g_1 \cdot q^{n-1} & & \\
-q \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i = & & & -g_1 \cdot q & - & g_1 \cdot q^2 & - & g_1 \cdot q^3 & - & \ldots & - & \ldots & - & g_1 \cdot q^{n-1} & - & g_1 \cdot q^n \\
\hline
(1-q) \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i = & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Daraus folgt:

Merke

Die Summe s_n der ersten n Elemente einer geometrischen Folge (g_n) ist

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} g_i = \qquad (1)$$

Aufgabe 18.353 Berechnen Sie die fehlenden Grössen folgender geometrischen Folgen und Reihen:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
g_1	1	6		4	40	
g_n		13122		5.8564	-625	0.16
n	8		12	5	4	6
q	2	3	-3			0.2
s_n			398580			

Quelle: Erhard Rhyn, Analysis, A21, S. 3

Arithmetische Reihen Uhr

Funktionsweise

Immer wenn der Streifen voll ist, läutet die Schulglocke. Je nach Länge der Pause oder der Lektion laufen die einzelnen Lichter verschieden schnell. Dabei ist die Geschwindigkeit jeweils konstant.

- 150 LEDs mit WS2812B Chip, 5 m lang
- $2^{24} \approx 16$ Millionen Farben pro LED
- ESP8266 Mikroprozessor
- 5 V, 10 A Netzteil
- Wandlerboard 3.3 V (Prozessor) $\rightarrow$ 5 V (LEDs)

Bedienung

Wenn die Uhr nicht läuft, kann der Reset-Knopf gedrückt werden (auf dem Mikroprozessor unten links). Die Verbindung zum WLAN wird aufgebaut, die Zeit ermittelt und dann der entsprechende Zustand der Uhr hergestellt.

Zeitsynchronisation

Der ESP8266 verbindet sich mit dem St. Galler Wireless, ohne sich dort anzumelden. Im HTTP-Header der Login-Seite wird das Datum und die Uhrzeit in GMT (Greenwich Mean Time) geliefert.

LEDs mit WS2812B-Chip

Jede einzelne LED ist mit einem eigenen Microcontroller bestückt, der die erste erhaltene Farbinformation speichert und anzeigt und alle folgenden Informationen weiterleitet. Das Signal wird mit 800 kbit/s übertragen. Die Farbinformation ist in 3 Bytes à 8 Bits codiert.

Kosten und Programmierung

Eingekauft wurden die Einzelteile in China. LED-Streifen ca. 15.-, Netzteil ca. 15.-, ESP8266 ca. 4.-, restliche Komponenten ca. 2.-.

Programmiert wurde mit der Arduino-IDE in C++.

Aufgaben

Aufgabe 18.354

a) Wie viele «Schritte» sind nötig, bis der LED-Streifen voll ist?

b) Wie lange dauert 1 Schritt bei einer 43 Minuten Lektion?

c) Wie viel Zeit einer 43 Minuten Lektion sind um, wenn der Streifen genau halb voll ist?

d) Wie viel Zeit einer 43 Minuten Lektion bleibt noch, wenn $\frac{4}{5}$ des Streifens voll sind?

Aufgabe 18.355

a) Wie viel Information (in Bits und Bytes) ist für ein komplettes Update des Streifens nötig?

b) Wie lange dauert ein Update des Streifens?

c) Wie viele Updates pro Sekunden des Streifens könnten gemacht werden?

d) Wie lange ist also die kürzeste Pause, die auf der Uhr dargestellt werden kann?

Aufgabe 18.356

a) Welche LEDs leuchten nach 50% der Lektion?

b) Bestimmen Sie eine Funktion $d(t)$, die für eine Zeit t, gemessen als Anteil einer Lektion (Zahl in $[0, 1]$), den «Füllstand» des Streifens als Anteil des ganzen Streifens (Zahl in $[0, 1]$) liefert.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion und markieren Sie die Vielfachen von 5 min mit Papier-Pfeilen an der Wand.

Aufgabe 18.357

Anstatt konstanter Geschwindigkeit betrachte man konstante Beschleunigung (d.h. die Lichter würden fallen). Sei a die Beschleunigung, in Position/s^2. Die Position p eines fallenden Lichts zur Zeit t ist $p(t) = \left\lfloor \frac{1}{2} a \cdot t^2 \right\rfloor$ wobei $\lfloor\cdot\rfloor$ für Abrunden auf die nächste Ganzzahl steht.

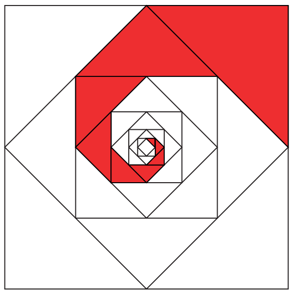
a) Berechnen Sie die Zeit $T(a)$, die benötigt wird, um den Streifen zu füllen in Abhängikeit von a. Geben Sie das Resultat als Summe an und rechnen Sie diese mit dem TR aus. (Siehe Katalog für das Summenzeichen).

b) Wie gross muss die Beschleunigung a für eine 43 Minuten Lektion sein? Welcher Beschleunigung in m/s^2 entspricht dies?

c) Wie gross ist der Radius eines Asteroiden mit Dichte 4000 kg/m^3, auf dem diese Beschleunigung herrscht?

18.3 Vertiefende Aufgaben zu Folgen und Reihen

Aufgabe 18.358 Die nachfolgende äussere Figur habe eine Seitenlänge von 8 cm.



a) Wie gross ist die schraffierte Fläche? Das heisst, die Fläche dieser neun Dreiecke?

b) Wie gross ist die Fläche dieser Dreiecke, wenn diese unendlich oft fortgesetzt würden?

c) Wie lange wäre der Umfang ebendieser unendlich fortgesetzter Figur?

Quelle: Erhard Rhyn, Analysis, A107, S. 12

Aufgabe 18.359 Die Koch'sche Schneeflocke ist wie folgt definiert:

- Man startet mit einem gleichseitigen Dreieck (3 Strecken) mit Seitenlänge $s = 1$ (Schritt 1).
- Man wiederholt folgenden Schritt:
  - Jede Strecke wird in 3 gleich lange Strecken unterteilt (Punkte A, B, C, D). Der mittlere Teil BC wird entfernt und durch zwei Strecken BE und EC ersetzt, wobei $\triangle BEC$ gleichseitig ist. E wird so gewählt, dass die Spitze E «nach aussen zeigt».

a) Skizzieren Sie die Figuren nach dem ersten, zweiten, dritten und vierten Schritt.

b) Berechnen Sie den Umfang, d.h. die Gesamtlänge aller Strecken der ersten vier Figuren. Finden Sie dann eine Formel, um den Umfang U_n der Figur nach n Schritten zu berechnen.

c) Berechnen Sie die Flächeninhalte der ersten vier Figuren. Finden Sie dann eine Formel, um den Flächeninhalt A_n nach n Schritten zu berechnen.

d) Wenn die Anzahl Schritte n immer grösser wird, was passiert mit dem Umfang und dem Flächeninhalt? Finden Sie ein ähnliches Phänomen aus dem «Alltag»?

Aufgabe 18.360 Für jede Zahl $c \in \mathbb{N}^+$ sei

$$(a_n) = \begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & \text{wenn } a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die ersten 20 Glieder der Folge (a_n) für $c \in \{1, 3, 9\}$. Was stellen Sie für unterschiedliche Werte von c fest?

b) Untersuchen Sie die Folge für den Wert von $c = 27$. Nehmen Sie dabei einen Computer mit Excel oder einer Programmiersprache (z.B. POV-Ray) oder den TR zur Hilfe. Mit dem TR können Folgen so definiert werden:

Wechseln Sie in den «Graph»-Modus (wo auch Funktionen gezeichnet werden können). Löschen Sie allfällige Graphen dort.

Drücken Sie «menu 3 7 1»

Definieren Sie:

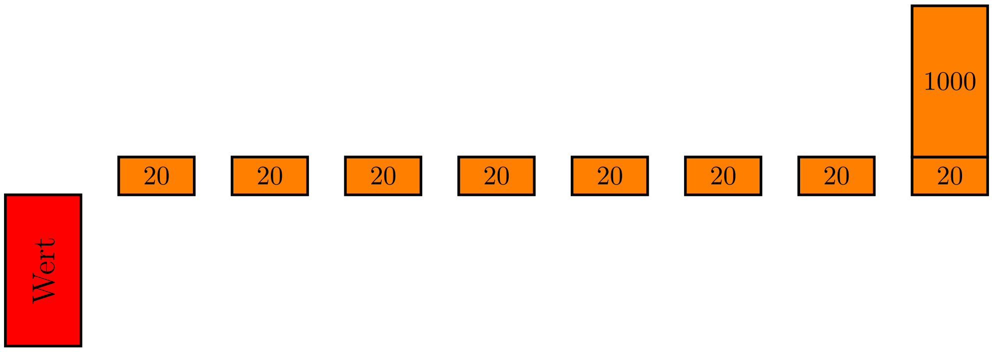
```
u1(n)=ifFn(mod(u1(n-1),2)=0,u1(n-1)/2,u1(n-1)· 3+1)
```

Mit Anfangswert 27.
Bestätigen Sie mit «enter» und passen Sie dann den Zoom an mit «menu 4 A».
Untersuchen Sie die Werte mit «menu 5 1»
Passen Sie die Anzahl Glieder mit «menu 3 7 1 ↑» an und bestätigen Sie mit «enter».

Aufgabe 18.361

«Bonds» oder auf Deutsch «Obligationen» sind sogenannt festverzinsliche Wertanleihen. Unternehmen und Staaten nehmen Geld auf, indem sie Bonds herausgeben. Bondhändler – oder auch sogenannte fixed-income trader – sind häufig Topverdiener bei Banken: Sie kaufen und verkaufen die Bonds von Staaten und Unternehmen.

Das Prinzip eines Bonds ist sehr einfach: Wir illustrieren das anhand einer Verschuldung von Fr. 1000 mit einem jährlichen Coupon von Fr. 20 und einer Laufzeit von 8 Jahren. Der Coupon ist Schuldzins: Jedes Jahr wird der Coupon fällig und am Schluss der Laufzeit noch der Nennwert von Fr. 1000. Die Zahlungsströme eines achtjährigen Bonds sehen also wie folgt aus:



Der Preis oder Wert eines Bonds ist nun der Wert aller dieser zukünftigen Zahlungsströme. Zu diesem Zweck brauchen wir den sogenannten *Zeitwert* des Geldes. Wenn Fr. 100 heute verfügbar sind und aktuell Zinsen von beispielsweise 3% vorherrschen, dann haben wir ein Jahr später: Fr. $100 \cdot (1 + 0.03) =$ Fr. 103, genau gleich – ohne Währungseinheit – gilt nach zwei Jahren $100\cdot(1+0.03)^2 \approx 106.09$, nach 3 Jahren $100\cdot(1+0.03)^3 \approx 109.27$ und damit nach n Jahren $100 \cdot (1 + 0.03)^n$.

Man kann nun die gleiche Frage in umgekehrter zeitlicher Richtung stellen: Wie viel Geld x brauche ich heute, um in einem Jahr Fr. 100 zu haben? In zwei Jahren Fr. 100? In n Jahren Fr. 100. Es muss also gelten $x\cdot(1+0.03) = 100$ für ein Jahr, also $x = \dfrac{100}{1 + 0.03} \approx 97.09$. Das heisst, heute Fr. 97.09 sind gleich viel Wert wie Fr. 100 in einem Jahr. Für zwei Jahre ist $x \cdot (1 + 0.03)^2 = 100$ also $x = \dfrac{100}{(1 + 0.03)^2} \approx 94.26$ und allgemein nach n Jahren gilt, dass $x = \dfrac{100}{(1 + 0.03)^n}$ ist.

Damit ist es egal, ob man z.B. Fr. $\dfrac{100}{(1 + 0.03)^{17}} \approx 60.50$ heute hat oder eben Fr. 100 in 17 Jahren hat. Man spricht von «abzinsen», wenn man den heutigen Wert einer künftigen Geldsumme berechnet: Fr. 100 in 17 Jahren entsprechen abgezinst mit 3% also Fr. 60.50.

Der Preis oder Wert eines Bonds – die Höhe des ersten Balkens – ist nun einfach der heutige, abgezinste, Wert aller künftigen Zahlungen. Es geht also darum, den heutigen Wert aller Coupons und der Rückzahlung vom obigen Bond zu berechnen:

a) Berechnen Sie den Wert eines Coupons zum Zeitpunkt $t = 2$ zum heutigen Zeitpunkt ($t = 0$).

b) Berechnen Sie Wert eines Coupons zu einem beliebigen Zeitpunkt i zum heutigen Zeitpunkt ($t = 0$).

c) Berechnen Sie die Summe aller abgezinsten Coupons. Tipp: Es handelt sich um eine geometrische Reihe.

d) Der Wert eines Bonds entspricht nun der Summe aller abgezinsten Coupons und dem abgezinsten Wert der Rückzahlung (nämlich $\dfrac{1000}{(1 + 0.03)^8}$). Wie viel beträgt der Wert des Bonds heute?

e) Weisen Sie nach, dass für den Preis eines Bonds mit Nennwert F (im Beispiel: 1000), Coupon C (im Beispiel: 20), Zinssatz p (im Beispiel: 3%) und Laufzeit n wie folgt berechnet werden kann:

$$\frac{C - C(p+1)^{-n}}{p} + \frac{F}{(1+p)^n}$$

f) Bonds sind ein wichtiges Investitionsobjekt für viele Investoren. Über die Pensionskasse des Arbeitgeber ist die Mehrheit der Schweizerischen Bevölkerung in Bonds investiert. In ihren Bilanzen müssen diese Pensionskassen jeweils den Marktwert (wie oben berechnet) ausweisen.

Was passiert mit dem Wert eines Bonds, wenn die Zinsen (also p) steigt? Was passiert wenn p fällt?

Aufgabe 18.362 Die Fibonacci-Folge (f_n) ist wie folgt definiert:

$$(f_n) = \begin{cases} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Hinweis: Oft wird noch $f_0 = 0$ definiert.

a) Schreiben Sie die ersten 10 Glieder der Folge auf.

b) Bestimmen Sie die Quotienten $\varphi > 0$ und $\psi < 0$ der geometrischen Folgen (g_n) mit $g_1 = 1$, die die «Fibonacci-Eigenschaft» haben, d.h. dass $g_{n+2} = g_{n+1} + g_n$ ist.

c) Zeigen Sie, dass wenn eine Folge (a_n) die Fibonacci-Eigenschaft hat, dass dann auch die Folge (b_n) definiert als $b_n = \lambda a_n$ die Fibonacci-Eigenschaft hat, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine bliebige, vorgegebene Konstante ist.

d) Zeigen Sie, dass wenn zwei Folgen (a_n) und (b_n) die Fibbonaci-Eigenschaft haben, dass dann auch die Folge (c_n), definiert durch $c_n = a_n + b_n$ die Fibonacci-Eigenschaft hat.

e) Seien (g_n) und (h_n) die beiden geometrischen Folgen aus Aufgabe b). Diese sollen nun so multipliziert und dann addiert werden, dass die Fibonacci-Folge herauskommt.

Bestimmen Sie also zwei Konstanten x und y so, dass $f_n = x \cdot g_n + y \cdot h_n$ für $n = 1$ und $n = 2$.

18.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 18.337 ex-intro-klassifikation

a) 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ...

b) 32, 27, 22, 17, 12, 7, 2, -3, -8, ...

c) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...

d) $\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, 6, \frac{20}{3} \ldots$

e) $1, -3, 9, -27, 81, -243, 729, -2187, 6561, -19683, \ldots$

f) 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, , 49, 64, 81, 100, ...

g) $\frac{32}{3}, \frac{16}{9}, \frac{8}{27}, \frac{4}{81}, \frac{2}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{4374}, \frac{1}{26244}, \ldots$

h) $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -3, -\frac{9}{2}, -6, -\frac{15}{2}, \ldots$

i) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

j) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

k) 800, 1200, 1400, 1500, 1550, 1575, 1587.5 1593.75, 1596.875, ...

l) 12, 9, 7, 6, 6, 7, 9, 12, 16, 21, 27, 34, 42, 51, ...

Berechnung des nächsten Gliedes:

a) $a_{n+1} = a_n + 2$

b) $a_{n+1} = a_n - 5$

c) $a_{n+1} = a_n \cdot 2$

d) $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}$

e) $a_{n+1} = a_n \cdot (-3)$

f) $a_{n+1} = a_n + (2n - 1)$

g) $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{6}$

h) $a_{n+1} = a_n - \frac{3}{2}$

i) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

j) $a_{n+1} = a_n \cdot (-1)$

k) $a_{n+1} = a_n + 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

l) $a_{n+1} = a_n + (n - 4)$

Direkte Formel aus n:

a) $a_n = 7 + 2(n - 1)$

b) $a_n = 32 - 5(n - 1)$

c) $a_n = 2^{n-1}$

d) $a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot (n - 1)$

e) $a_n = (-3)^{n-1}$

f) $a_n = (n - 1)^2$

g) $a_n = \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

h) $a_n = 3 - \frac{3}{2} \cdot (n - 1)$

i) $a_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

j) $a_n = (-1)^{n-1}$

k) $a_n = 1600 - 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

l) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 16$

Bei den Folgen a), b), d) und h) wird immer eine konstante Zahl addiert oder subtrahiert.
Bei den Folgen c), e), g) und j) wird immer mit einer konstanten Zahl multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 18.338 ex-expl-impl-rek

a) $(a_n) = 7, 6, 5, 4, 3, \dots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n - 1 \end{cases}$. Arithmetisch.

b) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ und $(a_n) = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 2 \end{cases}$. Geometrisch.

c) $(a_n) = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ und $a_n = n^2$. Weder artihmetisch noch geometrisch. (Man nennt eine solche Folge «arithmetisch 2. Ordnung», weil die Differenzenfolge eine arithmetische Folge ist).

d) $(a_n) = 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_1 = 16 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$. Geometrisch.

e) $a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und z.B. $(a_n) = \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}(1 - a_n) \end{cases}$. Weder arithmetisch noch geometrisch.

Diese Folge ist die Folge der Teilsummen einer geometrischen Folge.

f) $(a_n) = 100, 102, 104.04, 106.1208, \dots$ und $a_n = 100 \cdot (1.02)^{n-1}$. Geometrisch.

Lösung zu Aufgabe 18.339 ex-param-arithmetisch

Generell gilt $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Setzt man die gegebenen Grössen ein, ergibt sich ein Gleichunggsystem für a_1 und d.

a) $d = a_3 - a_2 = 2$, $a_1 = a_2 - d = 3$.

b) $3d = a_8 - a_5 = 15$, also $d = 5$. Dann ist $a_1 = a_5 - 4d = -3$.

c) $d = \frac{a_{13} - a_9}{4}$ und $a_1 = a_9 - 8d = a_9 - 2(a_{13} - a_9)$.

d) $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ und $a_1 = a_n - (n-1)d = a_n - (n-1)\frac{a_m - a_n}{m - n}$

e) $a_1 + 14d + a_1 + 19d = 300$, daraus folgt $d = \frac{280}{33}$.

f) $\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) & = 24 \\ a_1 + 4d & = 13 \end{cases}$

Die Lösungen sind $a_1 = -7$ und $d = 5$ oder $a_1 = -45$ und $d = \frac{29}{2}$.

g) $\begin{cases} (a_1 + 2d) & = & 4(a_1 + 6d) \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) & = & 10 \end{cases}$

Lösung: $a_1 = \frac{220}{29}$, $d = -\frac{30}{29}$

h) Es gilt $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Für n wird nun a_4 eingesetzt, und dieses dann auch mit a_1 und d ausgedrückt:
$\begin{cases} (a_1 + (a_4 - 1) \cdot d) = a_1 + (a_1 + 3d - 1) \cdot d & = & 54 \\ a_1 + (a_1 - 1) \cdot d & = & 6 \end{cases}$

Die Lösungen sind $a_1 = 2$ und $d = 4$. Die zweite Lösung $a_1 = -\frac{2}{3}$ und $d = -4$ ist streng genommen keine Lösung, weil z.B. das Glied $a_{-\frac{2}{3}}$ berechnet wird, das in einer Folge nicht existiert. Verallgemeinert man die Folge aber auf die rellen Zahlen, erhält man ganz einfach eine lineare Funktion, und dann macht die Lösung auch Sinn.

Für das effiziente Lösen mit dem TR wird zuerst die Funktion a wie folgt definiert:

$$a_1 + (n-1)d \to a(n)$$

Danach können die Gleichungen wie in der Aufgabe eingegeben werden und nach a_1 und d aufgelöst werden. Es muss einfach jeweils a_x durch $a(x)$ ersetzt werden.

Lösung zu Aufgabe 18.340 ex-param-geometrisch

a) $q = \frac{g_6}{g_5} = \frac{48}{24} = 2$. Daraus folgt $g_1 = g_5 \cdot q^{-4} = 24 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{2}$.

b) $q^2 = \frac{g_6}{g_4} = \frac{162}{18} = 9$, also $q = \pm 3$. Daraus folgt $g_1 = g_4 \cdot q^{-3} = 18 \cdot (\pm 3)^{-3} = \frac{18}{\pm 27} = \pm\frac{2}{3}$.

c) $q^5 = \frac{g_{10}}{g_5}$ und damit $q = \sqrt[5]{\frac{g_{10}}{g_5}}$ wenn $\frac{g_{10}}{g_5} > 0$ und $q = -\sqrt[5]{-\frac{g_{10}}{g_5}}$ wenn $\frac{g_{10}}{g_5} < 0$. Keine Lösung wenn $g_{10} = 0$ oder $g_5 = 0$.

$g_1 = g_5 \cdot q^{-4}$

d) $q^{m-n} = \frac{g_m}{g_n}$. Wenn daraus q berechnet werden kann, ist $g_1 = g_n \cdot q^{-(n-1)}$.

Lösung zu Aufgabe 18.341 ex-folgen-verknuepfen

a) Explizit: $a_n = 7 - (n-1) \cdot 2$ und rekursiv: $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$

Implizit: $(b_n) = 1, 6, 11, 16, 21, \ldots$ und rekursiv: $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 5 \end{cases}$

b) Implizit: $(c_n) = 8, 11, 14, 17, \ldots$. Explizit: $c_n = 8 + (n-1) \cdot 3$ und rekursiv: $\begin{cases} c_1 = 8 \\ c_{n+1} = c_n + 3 \end{cases}$ Die Folge ist arithmetisch mit Differenz 3.

c) Implizit: $(d_n) = 7, 30, 33, 16, -21, -78, \ldots$ und explizit: $d_n = a_n \cdot b_n = (5 - (n-1) \cdot 2) \cdot (5n - 4) = (-2n + 9)(5n - 4) = -10n^2 + 53n - 36$. Die Folge ist nicht arithmetisch. Sie könnte als «quadratisch» bezeichnet werden (oder genauer als arithmetisch 2. Ordnung).

Betrachtet man die Differenzfolge (Differenzen aufeinanderfolgender Glieder) erhält man 23, 3, −17, −37, −57,… also eine arithmetische Reihe mit $d = -20$ und $a_1 = 23$. Damit lässt sich eine rekursive Definition finden, entweder indem man die Differenz aus n berechnet, oder aus den *zwei* Vorgängergliedern:

$(d_n) = \begin{cases} d_1 = 7 \\ d_{n+1} = d_n + (23 - (n-1) \cdot 20) \end{cases}$ oder

$(d_n) = \begin{cases} d_1 = 7 \\ d_2 = 30 \\ d_{n+2} = d_{n+1} + (d_{n+1} - d_n) - 20 \end{cases}$ (die um 20 verringerte Differenz der Vorgängerglieder).

d) Das einfachste ist die explizite Definition, indem man die expliziten Definitionen der Folgen (a_n) und (b_n) einsetzt:

$e_n = 5 - ((5n-4) - 1) \cdot 2 = 15 - 10n = 5 - (n-1) \cdot 10$.

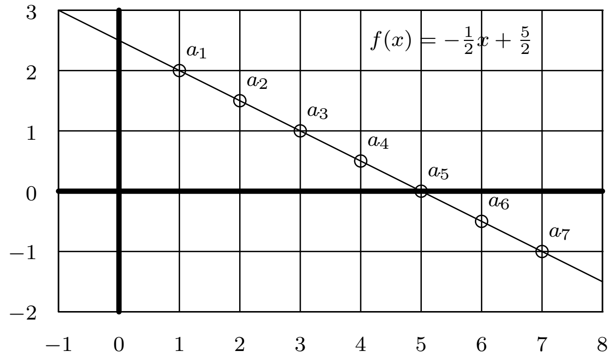
Implizit: $(e_n) = 5, -5, -15, -20, \ldots$.

Rekursiv: $\begin{cases} e_1 = 5 \\ e_{n+1} = e_n - 10 \end{cases}$.

Die Folge ist arithmetisch mit $d = -10$.

Lösung zu Aufgabe 18.342 ex-arithmetische-folge-lineare-funktion

a) und b):



c) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

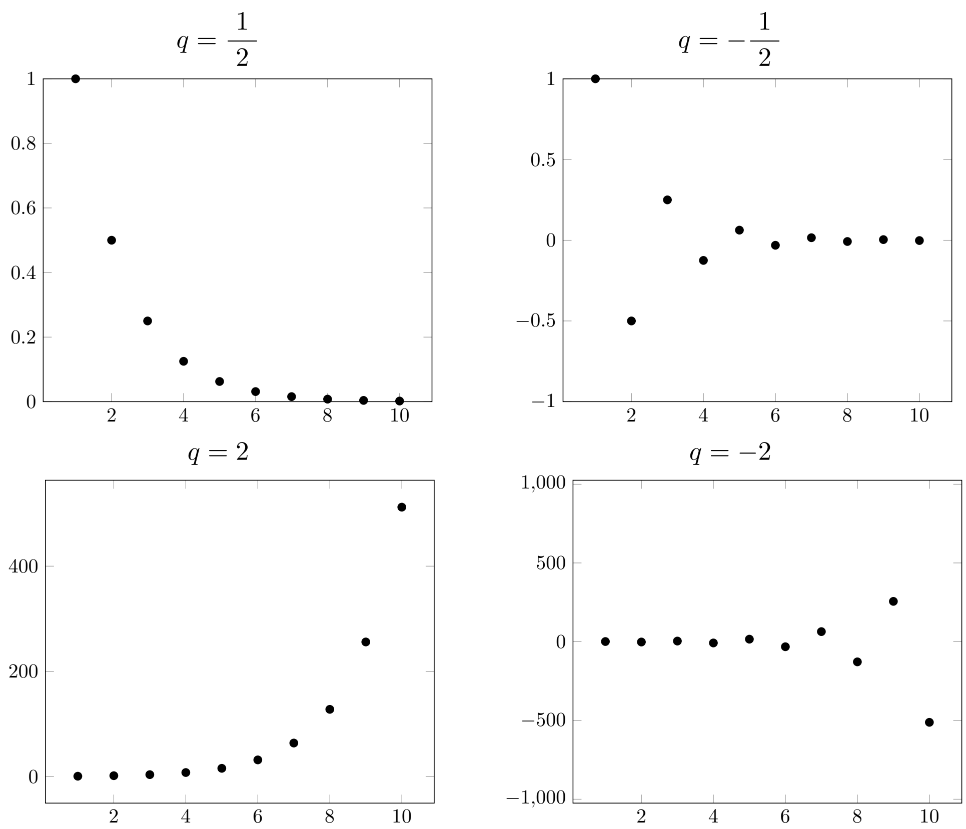
d) Die Differenz d ist gleich der Steigung m, weil wenn man zwei benachbarte Glieder anschaut, ist Δx jeweils 1.

e) Wenn $d > 0$ werden die Glieder beliebig gross.

Wenn $d < 0$ werden die Glieder beliebig klein.

Wenn $d = 0$ sind alle Glieder gleich.

Lösung zu Aufgabe 18.343 ex-visual-behavior



Für $|q| < 1$ spricht man von «gedämpften» Verhalten, für $|q| > 1$ von «explodierendem» Verhalten. Ebenso wird für $q < 0$ das Verhalten «alternierend» und für $q > 0$ «mononton» genannt. Die linke Spalte ist monoton, die rechte alternierend. Die obere Zeile ist gedämpft und die untere explosiv.

Konstantes prozentuales Wachsum ($p > 0$ und $q = 1 + p$) ist z.B. monotones und explodierendes Verhalten

Lösung zu Aufgabe 18.344 ex-folgen-verknuepfen-allgemein

a) $c_n = a_n + b_n = a_1 + (n-1)d_a + b_1 + (n-1)d_b = (a_1 + b_1) + (n-1)(d_a + d_b)$ Damit ist (c_n) arithmetisch mit Differenz $(d_a + d_b)$.

b) $f_n = n \cdot (a_1 + (n-1) \cdot d_a) = n \cdot a_1 + n^2 \cdot d_a - n \cdot d_a$. Im Allgemeinen ist (f_n) nicht arithmetisch, wegen dem n^2. (Wird n um 1 erhöht, wächst die Folge nicht konstant, sondern je schneller, je grösser n ist).

Damit die Folge arithmetisch ist, darf kein n^2 mehr vorkommen, d.h. d_a muss Null sein. Das ist der Fall, wenn die Folge (a_n) die konstante Folge (alle Glieder gleich) ist.

c) $e_n = 2^{a_1+(n-1)d_a} = 2^{a_1} \cdot 2^{d_a \cdot (n-1)} = 2^{a_1} \cdot \left(2^{d_a}\right)^{n-1}$. Damit ist (e_n) geometrisch mit erstem Glied 2^{a_1} und Quotient $q = 2^{d_a}$.

Lösung zu Aufgabe 18.345 ex-arithmetische-und-geometrische-mittelwerte

a) $\dfrac{2+8}{2} = 5$ und $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

b) $\dfrac{4+36}{2} = 20$ und $\sqrt{4 \cdot 36} = 12$.

c) Sei a ein Glied und d die Differenz der Folge. Die beiden Nachbarglieder sind also $a-d$ und $a+d$. Das arithmetische Mittel der beiden Nachbarglieder ist

$$\frac{(a-d)+(a+d)}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

was zu beweisen war.

d) Sei g ein Glied und q der Quotient der Folge. Die beiden Nachbarglieder sind also $\dfrac{g}{q}$ und $g \cdot q$. Das geometrische Mittel ist

$$\sqrt{\frac{g}{q} \cdot (g \cdot q)} = \sqrt{g \cdot g} = g$$

was zu beweisen war. Verwendet wurde die Tatsache, dass g positiv ist. Wäre $g < 0$ ist $\sqrt{g \cdot g} = |g| = -g$.

e) Sei ein Rechteck mit Seitenlängen c und d. Das arithmetische Mittel ist die Seitenlänge eines Quadrats mit gleichem Umfang. Das geometrische Mittel ist die Seitenlänge eines Quadrats mit gleicher Fläche.

f) Seien a, b, c drei Werte. Das arithmetische Mittel ist $\dfrac{a+b+c}{3}$, das geometrische Mittel ist $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$. Die Mittel sind die Seitenlängen eines Würfels mit gleicher Kantenlängesumme im arithmetischen und mit gleichem Volumen im geometrischen Fall.

Lösung zu Aufgabe 18.346 ex-summen-implizit-schreiben

a) $\displaystyle\sum_{x=4}^{18}(x^2-5) = (4^2-5)+(5^2-5)+(6^2-5)+\ldots+(17^2-5)+(18^2-5)$

b) $\displaystyle\sum_{p=-2}^{2}\left(p^3+\frac{1}{p}\right) = \left((-2)^3+\frac{1}{-2}\right)+\left((-1)^3+\frac{1}{-1}\right)+\left(0^3+\frac{1}{0}\right)+\left(1^3+\frac{1}{1}\right)+\left(2^3+\frac{1}{2}\right)$

Ja, die Summe ist wegen der Division durch Null nicht definiert.

c) $\displaystyle\sum_{q=15}^{20}\sqrt{10}-\pi = \sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{10}-\pi$ **Achtung:** von 15 bis 20 sind es 6 Summanden!

d) $\displaystyle\sum_{t=-5}^{-1} 1 = 1+1+1+1+1$ **Achtung:** von -5 bis -1 sind es 5 Summanden!

e) $\displaystyle\sum_{b=3}^{11}(a_{b-2}) = a_{3-2}+a_{4-2}+a_{5-2}+\ldots+a_{10-2}+a_{11-2}$

f) $$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{2}\left(\sum_{k=t-1}^{t+2}k^2\right) &= \left(\sum_{k=0-1}^{0+2}k^2\right) + \left(\sum_{k=1-1}^{1+2}k^2\right) + \left(\sum_{k=2-1}^{2+2}k^2\right) = \\ &= \left((-1)^2+0^2+1^2+2^2\right) + \left(0^2+1^2+2^2+3^2\right) + \left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 18.348 ex-summenformel-arithmetisch

Die einfachste, allgemeine Methode besteht darin, die Summe doppelt zu berechnen, wobei beim zweiten Mal die Folge umgedreht wird:

	1	2	3	...	998	999	1000
+	1000	999	998	...	3	2	1
Summe	1001	1001	1001	...	1001	1001	1001

Die doppelte Summe ist also $1000 \cdot 1001$ und damit ist die einfache Summe $1000 \cdot 1001/2 = 500 \cdot 1001 = 500500$.

Bei der Berechnung der Anzahl Elemente ist Vorsicht geboten. Z.B. gibt es von 100 bis und 200 nämlich 101 Zahlen!

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{1000} i = 500'500$

b) $\displaystyle\sum_{i=100}^{200} i = (101 \cdot (100+200))/2 = 15'150$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (1+n)}{2}$

d) $\displaystyle\sum_{i=n}^{m} i = \frac{(m-n+1)\cdot(m+n)}{2}$ (Anzahl Elemente ist $(m-n+1)$).

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{102} 2i = \frac{102 \cdot (2+204)}{2} = 10'506$

f) $\displaystyle\sum_{i=50}^{151} (2i+1) = \frac{102 \cdot (101+303)}{2} = 20'604$

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} (a_1 + (i-1)\cdot d) = \frac{10 \cdot (a_1 + (a_1 + 9d))}{2}$

h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)\cdot d) = \frac{n \cdot (a_1 + (a_1 + (n-1)d))}{2} = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}$

Lösung zu Aufgabe 18.350 ex-arithmetische-reihe-fehlende-groessen

a) $a_n = a_1 + (n-1)d = 1.2 + 19 \cdot 2.1 = 41.1$

$s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 20 \cdot \dfrac{1.2 + 41.1}{2} = 423$

b) $a_n = a_1 + (n-1)d$ also $n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1 = \dfrac{-9-404}{-7} + 1 = 60$

$s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 60 \cdot \dfrac{404 + (-9)}{2} = 11'850.$

c) $\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} \end{cases}$ Setzt man die gegebenen Grössen ein erhält man

$\begin{cases} 107 = a_1 + (n-1)\cdot 5.2 \\ 123 = n \cdot \dfrac{a_1 + 107}{2} \end{cases}$ Aufgelöst mit dem TR erhält man:

$a_1 = -101$ und $n = 41$.

d) $s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$. Eingesetzt: $2196 = 61 \cdot \dfrac{a_1 + 0}{2}$. Aufgelöst nach $a_1 = 72$.

$d = \dfrac{a_{61} - a_1}{61} = -\dfrac{6}{5} = -1.2.$

e) $s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$. Eingesetzt: $4059 = n \cdot \dfrac{1.8 + 1.8 + (n-1) \cdot 0.05}{2}$. Aufgelöst nach $n = 369$. Die negative Lösung $n = -440$ kann verworfen werden, da Folgen nur natürliche Zahlen als Indizes zulassen. $a_{369} = a_1 + 368 \cdot 0.05 = 20.2$.

f) $s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$. Eingesetzt: $207 = 46 \cdot \dfrac{207 + 207 + (46-1) \cdot d}{2}$. Aufgelöst nach $d = -9$. $a_{46} = a_1 + 45 \cdot (-9) = -198$.

Lösung zu Aufgabe 18.353 ex-geoemetrische-reihe-fehlende-groessen

a)
- $g_n = g_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{8-1} = 128$
- $s_n = g_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \dfrac{1-2^8}{1-2} = 255$

b)
- $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$ also $q^{n-1} = \dfrac{g_n}{g_1} = \dfrac{13122}{6} = 2187 = 3^{n-1}$. $n = 8$ erhält man durch «pröbeln», mit dem Taschenrechner oder später mit $\ln(2187)/\ln(3) + 1 = 8$
- $s_n = g_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 6 \cdot \dfrac{1-3^8}{1-3} = 19680$

c)
- $s_n = g_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ also $g_1 = s_n \dfrac{1-q}{1-q^n} = 398580 \dfrac{1-(-3)}{1-(-3)^{12}} = -3$
- $g_n = g_1 \cdot q^{n-1} = (-3) \cdot (-3)^{12-1} = 531441$

d)
- $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$ also $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{g_n}{g_1}} = \sqrt[5-1]{\dfrac{5.8564}{4}} = 1.1$
- $s_n = g_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 4 \cdot \dfrac{1-1.1^5}{1-1.1} = \dfrac{61051}{2500} = 24.4204$

e)
- $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$ also $q = \sqrt[4-1]{\dfrac{-625}{40}} = -\dfrac{5}{2} = -2.5$
- $s_n = g_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 40 \cdot \dfrac{1-(-2.5)^4}{1-(-2.5)} = -435$

f)
- $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$ also $g_1 = \dfrac{g_n}{q^{n-1}} = \dfrac{0.16}{0.2^{6-1}} = 500$
- $s_n = g_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 500 \cdot \dfrac{1-0.2^6}{1-0.2} = \dfrac{15624}{25} = 624.96$

Lösung zu Aufgabe 18.354 ex-aruhr-basics

a) Es sind $150 + 149 + 148 + \ldots + 3 + 2 + 1$ Schritte nötig, also $\dfrac{150 \cdot 151}{2} = 11325$ Schritte.

b) In Sekunden: $\dfrac{43 \cdot 60}{11325} \approx 0.228$ s, also eine knappe Viertelsekunde.

c) Der Streifen ist nach $150 + 149 + 148 + \ldots + 77 + 76 = \dfrac{75 \cdot (150 + 76)}{2} = 8475$ Schritten genau halb voll, d.h. nach $\dfrac{8475}{11325} \approx 0.748 \approx 75\%$ der Zeit. Auf die 43-Minuten Lektion macht das ungefähr 32 Minuten und 11 Sekunden.

d) Zu $\dfrac{4}{5}$ ist der Streifen voll, wenn 120 LED leuchten, bzw. 30 noch nicht leuchten. Für die letzten 30 LEDS sind noch $30 + 29 + \ldots + 2 + 1 = \dfrac{30 \cdot 31}{2} = 465$ Schritte nötig, was $\dfrac{465}{11325} \approx 0.04106 \approx 4\%$ der Zeit bedeutet. Auf die 43 Minuten Lektion sind das $43 \cdot \dfrac{465}{11325} \approx 1.766$ min, was in etwa 1 min 46 s entspricht.

Lösung zu Aufgabe 18.355 ex-aruhr-bits-und-bytes

a) Pro LED 24 Bits, also 3 Bytes. Total also 3600 bit, bzw. 350 B.

b) Es werden pro Update $150 \cdot 24 = 3600$ bit übertragen. Es wird mit 800 kbit/s übertragen, die Zeit pro Update ist also

$$\frac{3600 \text{ bit}}{800000 \text{ bit/s}} = 0.0045 \text{ s} = 4.5 \text{ ms}$$

c) Pro Sekunde können also maximal $\frac{1}{0.0045} \approx 222$ Updates gemacht werden.

d) Bei einem Update für jeden der $\sum_{i=1}^{150} i = 11'325$ Schritte werden mindestens $11'325 \cdot 0.0045 \approx 51$ s gebraucht.

Lösung zu Aufgabe 18.356 ex-aruhr-advanced

a) Die Anzahl Schritte total ist $\sum_{i=1}^{150} i = \frac{150 \cdot 151}{2} = 11325$. Wir suchen erst mal n, die Nummer der letzten LED, die hinzugekommen ist, und zwar so, dass $\sum_{i=n}^{150} i = \frac{1}{2} \cdot 11325$. Die Summe ausgerechnet ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{(150-n+1)\cdot(150+n)}{2} &= \frac{1}{2}\cdot 11325 \qquad |\text{TR} \\ n &= \frac{\sqrt{45301}+1}{2} \approx 106.9202 \end{aligned}$$

Die zweite, negative Lösung wird verworfen. Konkret heisst das jetzt, dass noch 106.9 LEDs nicht «aufgefüllt» sind und also die LEDs 107 bis und 150, d.h. 44 LEDs bereits leuchten und eine «unterwegs» ist. Bis 44 LEDs leuchten sind $\sum_{i=107}^{150} i = \frac{44 \cdot (150+107)}{2} = 5654$ Schritte vergangen. Bis zu $11325/2 = 5662.5$ Schritten fehlen noch $5662.5 - 5654 = 8.5$ Schritte. D.h. jetzt, dass die LED Nummer 8 Positionen vor der Position 107 auch noch leuchtet.

Halbzeit ist, wenn die LED 99 und die LEDs 107 bis 150 leuchten.

b) Total sind es 11325 Schritte. Nach der Zeit t als Anteil der ganzen Lektion sind also $t \cdot 11325$ Schritte passiert, wobei diese Zahl aufzurunden ist.

Wenn n der «Füllstand» ist, d.h. Anzahl LEDs, die bereits rechts leuchten, sind $(150-n+1)+(150-n+2)+\ldots+150 = \sum_{i=150-n+1}^{150} i = \frac{n\cdot(150+(150-n+1))}{2} = \frac{n\cdot(301-n)}{2}$ Schritte vergangen. Es muss also gelten:

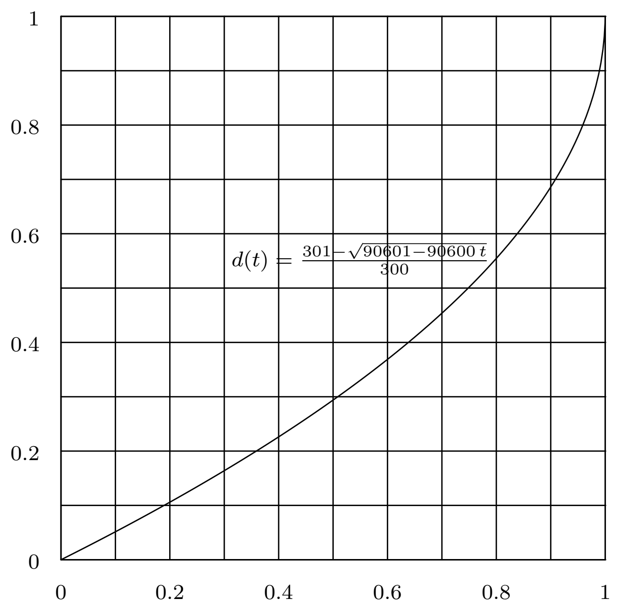
$$\begin{aligned} \frac{n\cdot(301-n)}{2} &= t\cdot 11325 \qquad |\text{TR} \\ n_1 &= \frac{301+\sqrt{90601-90600\,t}}{2} \\ n_2 &= \frac{301-\sqrt{90601-90600\,t}}{2} \end{aligned}$$

Setzt man für $t=0$ ein, sollte $n=0$ herauskommen, was nur bei der zweiten Lösung der Fall ist. Die erste kann also verworfen werden.

Der Füllstand ist also $n/150$ und somit

$$d(t) = \frac{301-\sqrt{90601-90600\,t}}{300}$$

Der Graph von $d(t)$ sieht wie folgt aus:



Für die Vielfachen x von 5 Minuten setzt man $t = x/43$ ein. Auf dem TR z.B. mit

`d({5,10,15,20,25,30,35,40})`

wenn die Funktion d einmal gespeichert wurde. Man erhält:

Zeit in min	5	10	15	20	25	30	35	40
t	0.1163	0.2326	0.3488	0.4651	0.5814	0.6977	0.8140	0.9302
$d(t)$	0.0601	0.1244	0.1937	0.2695	0.3542	0.4517	0.5706	0.7383
Position	9	18	29	40	53	67	85	110
Distanz in m	0.3007	0.6219	0.9685	1.3477	1.7709	2.2583	2.8528	3.6915

Lösung zu Aufgabe 18.357 ex-aruhr-gravity

a) Wir suchen erst die Zeit, die «ein Licht» braucht, um p Positionen zu fallen:

$$p = \frac{1}{2}a \cdot t^2$$
$$\sqrt{\frac{2p}{a}} = t \qquad \text{Die negative Lösung wird hier ignoriert.}$$

Diese Zeiten werden nun für $p = 1$ bis $p = 150$ aufaddiert, um die Gesamtzeit zu erhalten:

$$T(a) = \sum_{i=1}^{150} \sqrt{\frac{2i}{a}} \approx 1740.42 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}$$

b) Wir suchen a so, dass $T(a) = 43 \cdot 60$. Der TR liefert

$$a \approx 0.455 \ \frac{\text{Positionen}}{\text{s}^2}$$

Eine Position ist 5 m / 150 ≈ 0.033, also

$$a \approx 0.455 \cdot 0.0333 \approx 0.0152\text{m/s}^2$$

c) Unbekannte r in m (Masse des Asteroiden). Die Masse ist also

$$m = 4000\text{kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Die Gravitationskraft F auf eine kleine Testmasse m' beträgt

$$F = \Gamma \frac{m'm}{r^2}$$

und damit die Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m'} = \frac{m}{r^2} = \frac{\Gamma 4000\text{kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = 4000\text{kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3}\pi r$$

Nach r aufgelöst erhält man:

$$r = \frac{a}{4000\text{kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3}\pi}$$

Eingesetz erhält man für $r \approx 13560$ m, d.h. einen Durchmesser von ca. 27 km.

Lösung zu Aufgabe 18.358 ex-reihen-geometrische-figur

a) Bei einer Seitenlänge s kann man die Fläche ist die Fläche eines Dreiecks gegeben als $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}s \cdot \frac{1}{2}s = \frac{1}{8}s^2$. Das einbeschriebene Quadrat hat die Seitenlänge $\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}s$. Setzen wir nun $\tilde{s}$ in die Formel für die Fläche eines Dreiecks erhalten wir $\frac{1}{8}\tilde{s}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{8}s^2$. Das darauffolgende Dreieck ist also genau halb so gross wie das aktuelle Dreieck. Wir haben also eine geometrische Reihe mit $g_1 = \frac{1}{8} \cdot 8^2$ und $q = \frac{1}{2}$. Setzen wir dies in die Summenformel ein, erhalten wir: $\sum_{i=1}^{9} g_i = g_1 \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = 8 \cdot \frac{1-\frac{1}{512}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{511}{32} \approx 15.97$.

b) Mit der gleichen Überlegung wie bei a) kommt man zur Formel

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i = g_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 8 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 16$$

Die Figur hat also eine Fläche von $16\,\text{cm}^2$

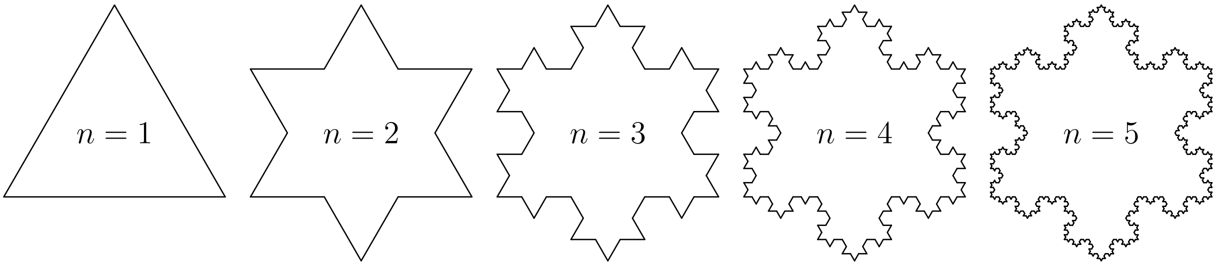
c) Die Längen bilden ebenfalls eine geometrische Folge mit $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Der Umfang des ersten Dreiecks ist g_1 und es ist $g_1 = 4 + 4 + \sqrt{4^2+4^2} = 8 + 4\cdot\sqrt{2} \approx 13.657$. Mit der Formel für die geometrische Reihe gilt dann

$$\sum_{i=1}^{\infty}(8+4\cdot\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i-1} = (8+4\cdot\sqrt{2})\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 8\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right) \approx 46.6274$$

Damit beträgt die unendliche Summe $8\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right) \approx 46.6274$

Lösung zu Aufgabe 18.359 ex-koch-schneeflocke

a) Die Anzahl Schritte wird hier mit n bezeichnet:



b) $U_1 = 3$, $U_2 = 3\cdot 4\cdot\dfrac{1}{3} = 4$, $U_3 = 3\cdot 4^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{3}$, $U_4 = 3\cdot 4^3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{9}$.

Die Anzahl Strecken wird in jedem Schritt vervierfacht, die Länge gedrittelt. Des Gesamstrecke wächst also bei jedem Schritt um den Faktor $\dfrac{4}{3}$. Allgemein

$$U_n = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

c) Die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s ist $\frac{\sqrt{3}}{2}s$ (erhält man mit dem Satz von Pythagoras). Damit ist die Fläche (mit $s = 1$):

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Die Dreiecke die im zweiten Schritt dazukommen wurden mit Faktor $\frac{1}{3}$ gestreckt, d.h. die Fläche wird mit dem Faktor $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ multipliziert. Die Anzahl Dreiecke ist 3, also

$$A_2 = A_1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot A_1 = A_1 + \frac{1}{3} \cdot A_1 = \frac{4}{3} \cdot A_1 \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} == \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Die Anzahl neuer Dreiecke beim dritten Schritt ist $3 \cdot 4$ (Anzahl Strecken nach dem zweiten Schritt), deren Fläche ist $\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A_1$, also

$$A_3 = A_2 + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A_1 = A_2 + \frac{4}{27} \cdot A_1 = A_2 + \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

Beim vierten Schritt kommen 4 mal so viele Dreiecke mit $\frac{1}{9}$ der Fläche wie beim dritten Schritt hinzu. Also

$$A_4 = A_3 + 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{81} = \frac{31\sqrt{3}}{81}$$

Diesen Prozess kann man weiterführen und als Summe schreiben:

$$A_n = A_1 + \frac{1}{3}A_1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}A_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}A_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}A_1 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3}A_1$$

Mit dem Summenzeichen (der erste Schritt ist speziell):

$$A_n = A_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}A_1 = A_1 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}\right)$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe mit $g_1 = 1$ und $q = \frac{4}{9}$. Die Teilsumme ist $s_{n-1} = g_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Und damit

$$A_n = A_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}}\right) = A_1 \cdot \left(1 + 3 \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{5}\right)$$

d) Der Umfang wird beliebig gross, d.h. strebt gegen unendlich. Die Fläche aber strebt gegen einen konstanten, endlichen Wert, weil der Term $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ gegen 0 strebt. D.h. die Fläche wird nie grösser als

$$A = A_1 \cdot \left(1 + 3\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5}A_1,$$

kommt diesem Wert aber beliebig nahe.

Ein Beispiel aus dem Alltag betrifft die Fläche und Umfang einer Insel. Die Fläche ist klar endlich. Die Länge der Küstenlinie ist es aber nicht zwingend, wenn man sich vorstellt, dass sich die Küstenlinie um jeden Stein, Sandkorn, Stäubchen, etc. windet. (Ok, beim Atom ist dann irgendwann Schluss, oder spätestens bei der Planck-Länge, wenn dann auch der Raum quantisiert und unscharf werden soll).

Lösung zu Aufgabe 18.360 ex-collatz

a) $c=1$: $(a_n) = 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$
$c=3$: $(a_n) = 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$
$c=9$: $(a_n) = 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$
Die Folge endet immer mit Wiederholungen von $1, 4, 2$.

Lösung zu Aufgabe 18.361 ex-bond-kurs

a) $\dfrac{20}{1.03^2} \approx 18.85$

b) $\dfrac{20}{1.03^i}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} \frac{20}{1.03^i} = 20 \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{1.03^i} = 20 \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{1}{1.03}\right)^i$. Damit ist $g_1 = \dfrac{1}{1.03}$ und $q = \dfrac{1}{1.03}$. Mit der Summenformel ergibt sich dann, dass

$$20 \sum_{i=1}^{8} g_i \approx 20 \cdot 7.0196 \approx 140.39$$

d) Die Summe der abgezinsten Coupons beträgt 140.39, der abgezinste Wert des Nennwerts ist $\dfrac{1000}{(1+0.03)^8} \approx$ 789.409 und damit ist der Wert $789.409 + 140.394 \approx 929.80$

e) Wie in der obigen Aufgabe mit beliebigen Coupons, Nennwert und Zins beträgt der Wert eines Bonds

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+p)^i} + \frac{F}{(1+p)^n} = C \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+p}\right)^i + \frac{F}{(1+p)^n}.$$

Der erste Summenausdruck kann mit der Summenformel aus (1) berechnet werden. Es ergibt sich dann

$$C \cdot \frac{(p+1)^{-n}\left((p+1)^n - 1\right)}{p} + \frac{F}{(1+p)^n} = C \cdot \frac{1-(p+1)^{-n}}{p} + \frac{F}{(1+p)^n}$$

f) Je kleiner der Zinssatz p ist, desto grösser ist der Wert des Bonds. Damit nimmt der Wert von Bonds bei fallenden Zinsen zu und fällt bei steigenden Zinsen. Pensionskassen haben also über die letzten Jahre von steigenden Werten bei Bonds «profitiert», weil die Zinsen gefallen sind.

Lösung zu Aufgabe 18.362 ex-binet-formel

a) $(f_n) = 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144 \ldots$

b) Gesucht ist also der Quotient q. Die Fibonacci-Eigentschaft muss natürlich auch für die Glieder $g_1 = 1$, $g_2 = q$ und $g_3 = q^2$ gültig sein, also

$$1 + q = q^2$$

Die Lösungen sind $q_1 = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $q_2 = \psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

c) Es gilt $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Zu zeigen ist, dass dann auch $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ ist. Die Idee ist, die erste Gleichung mit λ zu mulitiplizieren:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n && \mid \cdot \lambda \\ \lambda a_{n+2} &= \lambda \left(a_{n+1} + a_n\right) \\ \lambda a_{n+2} &= \lambda a_{n+1} + \lambda a_n \\ b_{n+2} &= b_{n+1} + b_n && \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

d) Addiert man die beiden Gleichungen $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ und $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ erhält man

$$\begin{aligned} a_{n+2} + b_{n+2} &= a_{n+1} + a_n + b_{n+1} + b_n \\ a_{n+2} + b_{n+2} &= (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n) \\ c_{n+2} &= c_{n+1} + c_n \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

e) Mit $g_1 = 1$, $g_2 = \varphi$, $h_1 = 1$ und $h_2 = \psi$ und $f_1 = f_2 = 1$ erhält man:

$$\begin{cases} n = 1: & x + y = 1 \\ n = 2: & x\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + y\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Die Lösungen sind $x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ und $y = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ und damit

$$f_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Diese Formel kann noch vereinfacht werden (ohne Herleitung), siehe Aufgabe 18.337 i).