10 Funktionen

Definition 16 Funktion

Eine Funktion ordnet jedem Element einer **Definitionsmenge genau ein** Element einer **Wertemenge** zu.

Funktion oder nicht?

- Zuordnung von Schuhmodellen eines Versandhauses zu Preisen.
- Zuordnung von Noten zu Schülern einer Klasse.
- Zuordnung von natürlichen Zahlen zu deren Quadratzahlen.
- Zuordnung der Zeit zur Position eines Smartphones.
- Zuordnung eines Facebook-Profils zu dessen Friends.
- Zuordnung der Schüler einer Klasse zu deren Lieblingsfarbe.

In der Mathematik interessieren wir uns in erster Linie für Funktionen, die Zahlen wieder Zahlen zuordnen. Insbesondere solche, die durch eine Formel beschrieben werden können.

10.1 Notation

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{W} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

wobei

- f der **Name der Funktion** ist (normalerweise ein beliebiger Kleinbuchstabe)
- $\mathbb{D}$ ist die Definitionsmenge
- $\mathbb{W}$ ist die Wertemenge
- x ist das **Argument**, wobei x aus $\mathbb{D}$ kommt. Die Wahl des Buchstabens ist irrelevant.
- $f(x)$ ist der **Wert** von f an der **Stelle** x. $f(x)$ ist ein Element von $\mathbb{W}$.

Funktionen können oft auch als «Maschinen» aufgefasst werden, die aus einer Zahl eine andere berechnen.
Beispiele:

$$a: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+5 \end{array} \qquad m: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & 3r \end{array} \qquad s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R}^\star \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array} \qquad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ v & \mapsto & v^2 \end{array}$$

Diese Funktionen können auch abgekürzt wie folgt geschrieben werden:

$$a(x) = x+5 \qquad m(r) = 3r \qquad s(t) = \frac{1}{t} \qquad q(v) = v^2$$

Es wird dabei die jeweils grösst mögliche Definitionsmenge angenommen (falls möglich $\mathbb{R}$).
Die Funktion a ist die «Maschine», die eine Zahl als Eingabe bekommt (auch **Argument** genannt), dann 5 dazu zählt und das Resultat als Ausgabe (auch **Wert** genannt) produziert. Entsprechend multipliziert m mit 3, s bildet den Kehrwert und q quadriert.
Berechnen Sie:

a) $a(2) =$
b) $m(7) =$
c) $s(5) =$
d) $q(-1) =$
e) $a\left(\frac{2}{3}\right) =$
f) $m\left(-\frac{3}{4}\right) =$
g) $s\left(\sqrt{2}\right) =$
h) $a(x-2) =$
i) $m(u+v) =$
j) $q(c+d) =$
k) $a(m(4)) =$
l) $m(a(4)) =$
m) $q(m(s(-0.5))) =$
n) $a(s(q(\sqrt{7}))) =$

10.2 Spezielle Funktionen

In der Mathematik gibt es viele wichtige Funktionen. Einige davon kennen Sie bereits.

10.2.1 Wurzel- und Betragsfunktion

Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot}$ ordnet jedem **positiven** reellen Argument x diejenige **positive** reelle Zahl $\sqrt{x}$ zu, die quadriert das Argument ergibt:

$$\begin{array}{rccc} \sqrt{\cdot}: & \mathbb{R}_0^+ & \rightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Beachten Sie: Für negative Zahlen ist die Wurzelfunktion nicht definiert. Die Wurzelfunktion liefert **immer positive** Zahlen (oder Null).
Die Gleichung $x^2 = 2$ hat **zwei Lösungen**, nämlich $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$. Die Wurzelfunktion liefert, wie alle Funktionen, jedoch nur **einen Wert**, nämlich eine positive Zahl.

Die **Betragsfunktion** $|\cdot|$ kann wie folgt definiert werden:

$$\begin{array}{rccl} |\cdot|: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Überprüfen Sie die Definition, indem Sie positive und negative Zahlen für x einsetzen.

Aufgabe 166 Erklären Sie, warum $|x| = \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

10.3 Nutzen von Funktionen

Mit Funktionen können z.B. physikalische Abläufe beschrieben werden, wie z.B. die z-Koordinate (in m) und Geschwindigkeit v (in m/s) eines Massepunktes im freien Fall bei Vernachlässigung der Luftreibung. Das Argument t ist die Zeit (in Sekunden):

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad v(t) = gt$$

wobei $g = -9.81$ die Erdbeschleunigung in m/s^2 ist.

Aufgabe 167 Mit Hilfe der obigen Funktionen z und v, berechnen Sie die Fallstrecke und Endgeschwindigkeit nach 1, 2 und 3 Sekunden Fallzeit.

10.4 Graph einer Funktion

Aufgabe 168 a) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit einer horizontalen t-Achse (anstatt x) und einer vertikalen s-Achse (anstatt y). Zum Zeitpunkt Null fährt die Trogenerbahn am Bahnhof St. Gallen ab. Zeichnen Sie, möglichst realistisch, zu jedem Zeitpunkt t die zurückgelegte Strecke ein (bis zur Haltestelle Spisertor).

b) Ins gleiche Koordinatensystem mit einer vertikalen v- anstatt s-Achse, zeichnen Sie die entsprechende Geschwindigkeit ein.

Es wurden die Graphen der Funktionen $s(t)$ und $v(t)$ gezeichnet. Beachten Sie, dass diese Funktionen nicht vernünftig mit Formeln dargestellt werden können. Beachten Sie, dass $v(t)$ angibt, wie steil $s(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt ist.

Definition 17

Der Graph einer Funktion f ist die Punktemenge aller Punkte $(x, f(x))$ mit $x \in \mathbb{D}$.

Aufgabe 169 Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktionen in je ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie vorgängig Definitions- und Wertebereich, um nur den benötigten Teil des Koordinatensystems zu zeichnen.

a) $a(r) = \sqrt{r}$ b) $b(q) = q^2$ c) $c(s) = |s|$

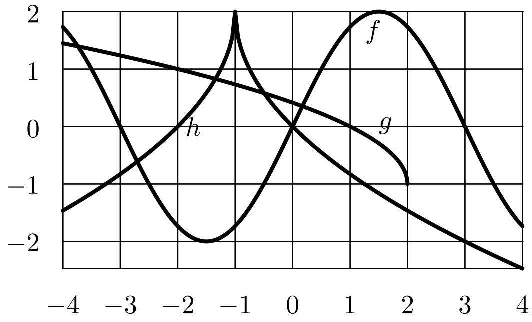
d) $d(t) = t$ e) $e(u) = -u$ f) $f(v) = \frac{1}{2}v - 1$

g) $g(w) = \sqrt{9 - w^2}$ h) $h(y) = \sqrt{-y}$ i) $i(x) = -|x - 1| + 1$

Für Funktionen, die durch Formeln dargestellt werden können, muss natürlich nicht für alle x-Werte die Funktion berechnet werden. Die Art der Formel lässt auf die Art der Kurve schliessen. Mehr dazu später.

Aufgabe 170

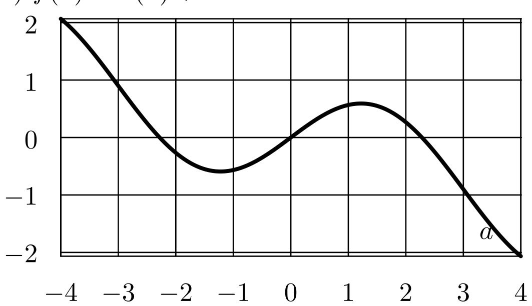
Für ganzzahlige Argumente lesen Sie die Funktionswerte der Funktionen f, g, und h aus deren Graphen ab. *Hinweis: Eine Formel für die Funktionen ist hier nicht gefragt!*



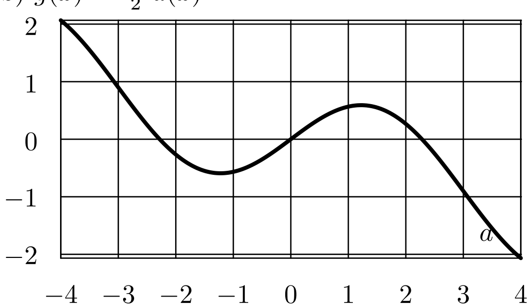
Aufgabe 171

Gegeben ist der Graph der Funktion a. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

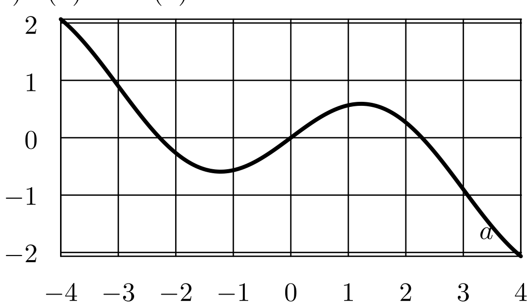
a) $f(x) = a(x) + 1$



b) $g(x) = \frac{1}{2}a(x)$

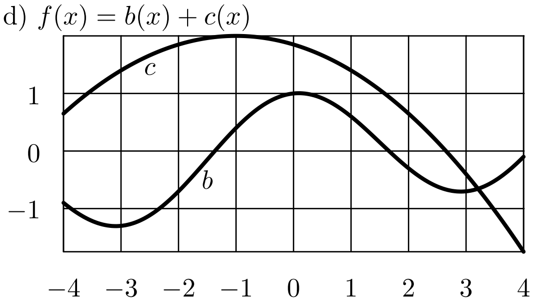


c) $h(x) = -a(x)$.

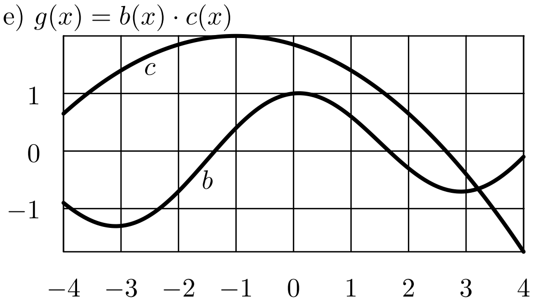


Gegeben sind die Graphen der Funktionen b und c. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

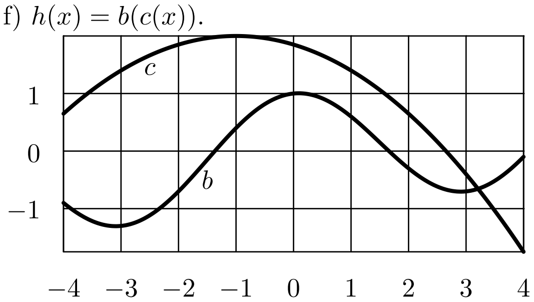
d) $f(x) = b(x) + c(x)$



e) $g(x) = b(x) \cdot c(x)$



f) $h(x) = b(c(x))$.



10.5 Transformation von Funktionsgraphen

Aufgabe 172 Gegeben sei eine Funktion z und ihr Funktionsgraph. Beschreiben Sie, wie der Funktionsgraph folgender Funktionen aussieht:

a) $a(x) = z(x) + 2$ b) $b(x) = z(x) - 1$ c) $c(x) = z(x) + v$ wobei $v \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

d) $d(x) = 2 \cdot z(x)$ e) $e(x) = \frac{1}{2} \cdot z(x)$ f) $f(x) = -z(x)$ g) $g(x) = -2 \cdot z(x)$

Merke

Wird zur **ganzen Funktion** eine positive Zahl addiert (bzw. subtrahiert), verschiebt sich der Graph entsprechend vertikal nach oben (bzw. unten).

Merke

Wird die **ganze Funktion** mit einer Zahl multipliziert, wird der Graph in y-Richtung entsprechend gestreckt (und zusätzlich gespiegelt, wenn die Zahl negativ ist).

10.6 Lineare Funktionen

Aufgabe 173 Beschreiben Sie möglichst präzise den Graphen der Funktion $f(x) = x$. Finden Sie einleuchtende Argumente warum der Graph die Form hat, die er hat.

Aufgabe 174 Zeichnen Sie folgende Funktionsgraphen mit möglichst wenig Aufwand. Sie sollen dabei höchstens einen Punkt berechnen.

a) $a(x) = 3x$ b) $b(x) = \frac{1}{3}x$ c) $c(x) = -x$ d) $d(x) = -\frac{1}{2}x$

e) $e(x) = x - 1$ f) $f(x) = -x + 1$ g) $g(x) = 2x - 2$ h) $h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Definition 18

Die **Steigung einer Geraden** im Koordinatensystem ist eine reelle Zahl, die angibt, um wieviele y-Einheiten die Gerade pro x-Einheit ansteigt.

Aufgabe 175 Zeichnen Sie in ein einziges Koordinatensystem Ursprungsgeraden mit Steigungen $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2 und ± 4. Beschriften Sie die Geraden mit deren Steigungen.

Aufgabe 176 Gegeben sind zwei Punkte mit unterschiedlichen x-Koordinaten $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$. Berechnen Sie die Steigung der Geraden durch A und B.
Warum müssen die x-Koordinaten unterschiedlich sein?

Aufgabe 177 Bestimmen Sie die Steigung einer Geraden, die mit der x-Achse einen Winkel von

a) $0°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $60°$ e) $90°$

bildet.

Definition 19

Eine **lineare Funktion** ist eine Funktion f, die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$f(x) = mx + q$$

Aufgabe 178

a) Begründen Sie, warum der Graph einer linearen Funktion eine Gerade ist.

b) Welcher Eigenschaft der Geraden entspricht m?

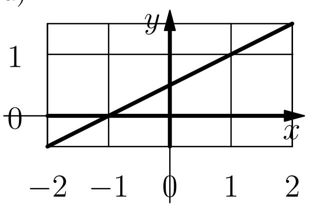
c) Wenn der Graph einer linearen Funktion gegeben ist, wo kann man q ablesen?

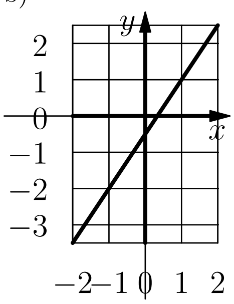
Definition 20

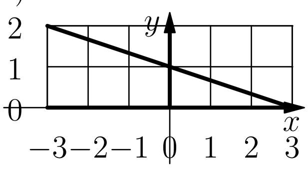
Bei einer linearen Funktion $f(x) = mx + q$ ist
m ✎ und q ✎

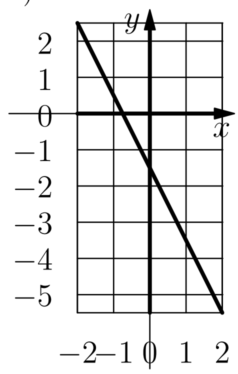
Aufgabe 179 Finden Sie Beispiele aus dem Alltag für lineare Funktionen.

Aufgabe 180 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der folgenden linearen Funktionen:

a)


b)


c)


d)


Aufgabe 181 Zeichnen Sie die Funktionsgraphen und bestimmen Sie alle linearen Funktionen,

a) die die Zahl 1 auf 3 und die Zahl 4 auf 2 abbilden.

b) die das Intervall $[-1, 1]$ vollständig auf das Intervall $[0, 4]$ abbilden.

c) die das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[1, 6]$ abbilden.

d) die das Intervall $[1, 6]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden.

e) die das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[a, b]$ abbilden (mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$).

f) die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden (mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$).

g) die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[c, d]$ abbilden.

Aufgabe 182 Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = 2x - 1$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.

b) Zeichnen Sie die Senkrechte zum Graphen von f durch den Punkt $(-2, 2)$ und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung in der Form $g(x) = mx + q$.

c) Wie gross ist die Steigung einer Senkrechten zu einer Geraden mit Steigung $m = \frac{4}{3}$?

Aufgabe 183 Gegeben ist eine Gerade g mit Steigung m. Berechnen Sie die Steigung $m_\perp$ einer Senkrechten zu g.

Aufgabe 184 Gegeben sind zwei lineare Funktionen $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ und $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

a) Zeichnen Sie beide Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem. **Einheitslänge: 6 Häuschen.**

b) Lesen Sie die ungefähren Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden ab.

c) Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunktes. *Hinweis: Im Schnittpunkt sind die Funktionswerte beider Funktionen gleich.*

Merke

Die Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f und g erhält man, indem man die Gleichung

$$f(x) = g(x)$$

nach x (der x-Koordinate eines Schnittpunktes) auflöst. Sind f und g lineare Funktionen, ist die Gleichung selbst linear und kann einfach gelöst werden.

Aufgabe 185 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, -1)$ und $B = (3, 1)$ sowie die Steigung $m = \frac{3}{2}$ der Geraden b durch den Punkt A. Gesucht sind die Koordinaten des Punktes C auf b, so dass das $\triangle ABC$ rechtwinklig ist.

a) Konstruieren Sie das Dreieck und lesen Sie die ungefähren Koordinaten von C ab.

b) Berechnen Sie die exakten Koordinaten von C.

Aufgabe 186 Gegeben sind zwei Punkte $A = (-3, 1)$ und $B = (2, -2)$. Finden Sie die Koordinaten der Punkte C und D oberhalb von AB so, dass $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 187 Finden Sie ganzzahlige Koordinaten für die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks so, dass die Hypotenuse parallel zur x-Achse ist und das Dreieck *nicht* gleichschenklig ist.

Bestimmen Sie dann die Koordinaten der Eckpunkte der Quadrate über den Dreiecksseiten.

Betrachten Sie das Quadrat über der Seite b. Das Quadrat soll kontinuierlich (als Animation) in ein Parallelogramm überführt werden, wobei die Seite b fix bleibt und die andere Seite am Schluss senkrecht auf die Hypotenuse steht (wie im dritten Beweis des Satzes von Pythagoras). Finden Sie zwei lineare Funktionen, die als Eingabe Zahlen im Intervall $[0, 1]$ nehmen, und als Ausgabe die x- bzw. y-Koordinate eines Punktes des Parallelogramms produzieren, d.h. für 0 das Quadrat, für 1 das Parallelogramm.

Hintergrund: In POV-Ray gibt es eine Variable `clock`*, die von 0 bis 1 läuft und das Erzeugen von Animationen erlaubt. Mit den obigen Funktionen kann diese Animation programmiert werden.*

10.7 Repetition

Funktion: Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ (meistens reelle Zahlen) ein Element einer Wertemenge $\mathbb{W}$ (meistens wieder reelle Zahlen) zu.

Diese Zuordnung kann auch als Maschine aufgefasst werden, die für eine Eingabe (Element aus der Definitionsmenge) eine Ausgabe (Element der Wertemenge) produziert.

Wir werden fast ausschliesslich Funktionen antreffen, die durch einfache Funktionsgleichungen (Formeln) dargestellt werden können. Die Funktionsgleichung gibt an, wie aus der Eingabe (meist durch die Variable x dargestellt) die Ausgabe berechnet werden kann.

Beispiele: $a(x) = 2x - 3$, $b(x) = \sqrt{x^2+1}$, $c(x) = |x+2|$

Funktionsgraph: Sind Definitions- und Wertemenge Zahlen, kann der Funktionsgraph einer Funktion f im x/y-Koordinatensystem gezeichnet werden. Für jede mögliche Eingabe x wird ein Punkt (x, y) gezeichnet, wobei die y-Koordinate die Ausgabe der Funktion ist, also $y = f(x)$. Die Koordinaten der Punkte des Graphen sind also $(x, f(x))$ für alle möglichen Werte von x.

Transformation von Graphen: Wird zu einer Funktion eine konstante Zahl **addiert**, bzw. subtrahiert, **verschiebt** sich der Graph entsprechend in y-Richtung nach oben, bzw. nach unten.

Wird die ganze Funktion mit einer konstanten Zahl **multipliziert**, wird der Graph in y-Richtung **gestreckt** oder gestaucht (und zusätzlich gespiegelt, wenn die Zahl negativ ist).

Lineare Funktion: Eine Funktion ist linear, wenn die Funktionsgleichung auf die Form $f(x) = m \cdot x + q$ gebracht werden kann. Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

m ist die **Steigung** und gibt an, um wieviele y-Einheiten die Gerade pro x-Einheit ansteigt (bzw. fällt für negative m). Für zwei beliebige unterschiedliche Punkte auf der Geraden (und das **Steigungsdreieck** darunter) gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wobei Δx bzw. Δy die vorzeichenbehafteten **Differenzen** der x- bzw. y-Koordinaten der beiden Punkte sind.

Die Steigung $m_\perp$ einer Geraden, die rechtwinklig auf eine Gerade mit Steigung m steht, ist

$$m_\perp = -\frac{1}{m}.$$

q ist der **y-Achsenabschnitt** (Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse), weil $f(0) = q$, also ist $(0, q)$ ein Punkt der Geraden.

Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen: Für die x-Koordinaten der Schnittpunkte gilt, dass bei beiden Funktionen f und g die gleiche y-Koordinate heraus kommt. Man erhält diese Koordinaten durch Lösen folgender Gleichung:

$$f(x) = g(x).$$

Die y-Koordinaten der Schnittpunkte erhält man durch Einsetzen der gefundenen x-Koordinaten in eine der beiden Funktionen.

10.7.1 Standardaufgaben

Aufgabe 188 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 1)$, $B = (1, -2)$ und $C = (3, 1)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die Geraden $a = BC$, $b = AC$ und $c = AB$.

b) Gilt $a \perp c$?

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Höhe h_a (Gerade durch A rechtwinklig zu a).

d) Bestimmen Sie den Höhenfusspunkt H_a $(= a \cap h_a)$.

Aufgabe 189 Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktionen in je ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie vorgängig Definitions- und Wertebereich, um nur den benötigten Teil des Koordinatensystems zu zeichnen.

a) $a(r) = -\sqrt{r}$ b) $b(q) = \sqrt{-q}$ c) $c(s) = -|s|$

d) $d(t) = \frac{1}{2}t - 2$ e) $e(u) = \sqrt{|u|}$ f) $f(v) = |v| - 2$

g) $g(w) = w^2 - 2$ h) $h(y) = 2 - y^2$ i) $i(x) = |1 - |x||$

10.7.2 Vertiefungs- und Reflexionsaufgaben

Aufgabe 190 Von einer unbekannten Funktion f weiss man, dass $f(-1) = -1$, $f(0) = -2$ und $f(2) = 2$.

a) Auf wie viele Arten kann der Graph von f vervollständigt werden? Zeichnen Sie eine Variante.

b) Ausgehend von Ihrer Variante, zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $g(x) = f(x) + 2$, $h(x) = -f(x)$ und $k(x) = f(x + 2)$.

c*) Finden Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f. Wer findet mehr als eine mögliche Formel?

Aufgabe 191 Gegeben sind zwei lineare Funktionen $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = 2x + 1$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen.

b) Messen Sie den Abstand der beiden Geraden (in Einheiten, nicht in cm!).

c) Berechnen Sie den exakten Abstand der beiden Geraden.

d*) Berechnen Sie den Abstand zweier Geraden mit Steigung m und Unterschied der Achsenabschnitte Δq.

Aufgabe 192 Wahr oder falsch? Begründen Sie und korrigieren Sie falls möglich falsche Aussagen in sinnvolle wahre Aussagen.

a) Für zwei beliebige Punkte in der x/y-Ebene gibt es immer eine lineare Funktion, deren Graph durch diese Punkte geht.

b) Haben zwei Geraden die gleiche Steigung, sind sie parallel.

c) Haben zwei Geraden den gleichen y-Achsenabschnitt q, schneiden sich die Geraden auf der x-Achse.

d) Gegeben ist eine lineare Funktion $f(x) = mx+q$. Ersetzt man sowohl m wie auch q durch ihre Gegenzahlen, wird der Graph an der y-Achse gespiegelt.

e) Die Steigung einer horizontalen Geraden ist nicht definiert.

f) Die Steigung der Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen ist 1.

g) Die Steigung einer vertikalen Geraden ist 2.

h) Das Produkt der Steigungen zweier rechtwinkligen Geraden ist -1.

i) Erhöht man die Steigung einer Geraden um 2, verschiebt sich die Gerade um 2 Einheiten in y-Richtung.

j) Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $h(x) = 2 \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.

k) Gegeben sind zwei lineare Funktionen f und g. Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist ebenfalls eine lineare Funktion.

l) Wenn f und g lineare Funktionen sind, dann ist auch $h(x) = f(g(x))$ eine lineare Funktion.

m) Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $g(x) = f(x) \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.

n) Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x+2$ schneiden sich in den Punkten $(-1, 1)$ und $(2, 4)$.

o) Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ und $g(x) = (x - 1)^2 + 1$ schneiden sich in genau einem Punkt.

p) Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ und $g(x) = 1 - 2x$ schneiden sich in zwei Punkten.

q) Die Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ zweier nicht-linearen Funktionen f und g ist nie linear.

r) Das Produkt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ zweier linearen Funktionen f und g ist nie linear.

s) Der Abstand zweier Geraden ist gleich dem Unterschied der y-Achsenabschnitte.

t) Für beliebige x-Werte liegt der Punkt $(f(x), x)$ auf dem Graphen der Funktion f.

u) Dr. Blöchligers Notenskala ist eine lineare Funktion der Punktzahl.

v) Die Zeit, die benötigt wird, um von einem Ort zu einem anderen zu gelangen, ist eine lineare Funktion der Entfernung der beiden Orte.

Aufgabe 193 Gegeben sind 4 Funktionen:
$f(x) = x^2 - 2x, \qquad g(x) = \sqrt{5-x}, \qquad h(x) = |x-2|, \qquad k(x) = \frac{3}{x}.$
Bestimmen Sie die Definitionsbereiche für diese Funktionen. Für g und h bestimmen Sie ebenfalls die Wertebereiche.
Berechnen Sie und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $f(7)$ b) $g(1)$ c) $h(-2)$ d) $k(-1)$

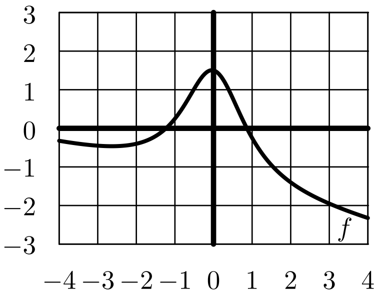
e) $h(f(1))$ f) $k(g(-31))$ g) $g(-h(f(-1)))$ h) $g(-(f(4)+h(4)))$

i) $k(a) \cdot f(a)$ j) $f(a+b) + k(\frac{1}{a+b}) + h(1)$

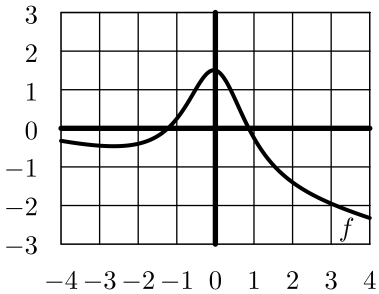
k) $f(a+1) \cdot k(a-1)$ l) $h(x^2+2)$

Aufgabe 194 Gegeben sind zwei Funktionen f und g durch ihre Graphen. Skizzieren Sie dann die Graphen der gesuchten Funktion h:

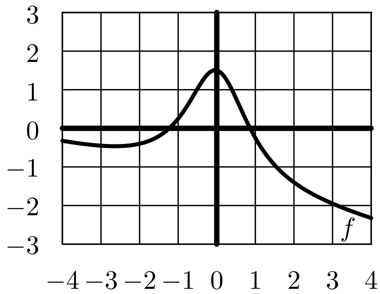
a) $h(x) = f(x) + \frac{3}{2}$



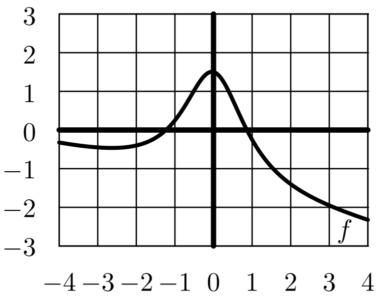
b) $h(x) = -2 \cdot f(x)$



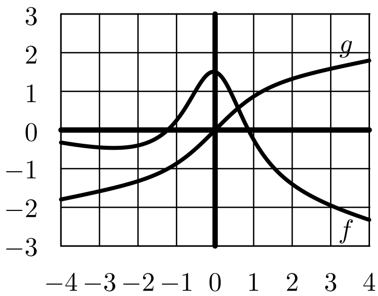
c) $h(x) = f(-x)$



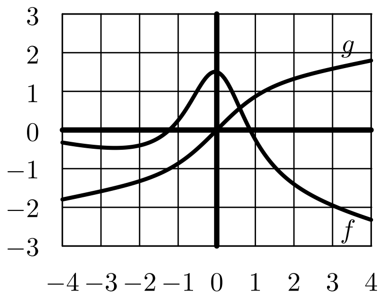
d) $h(x) = f(x-1)$



e) $h(x) = f(x) + g(x)$



f) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$



Aufgabe 195 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x + q$, wobei q jeweils einen der drei Werte -2, -1 und 0 annehmen soll.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g für die drei Werte von q. Wie viele Schnittpunkte erwarten Sie in den drei Fällen?

b) Bestimmen Sie Mit Hilfe des Taschenrechners die Schnittpunkte der Funktionsgraphen.

c*) Formen Sie die drei Schnittpunktsgleichungen so um, dass die Anzahl der Lösungen ersichtlich wird.

Aufgabe 196 Gegeben sind die zwei Funktionen $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{|x|}$ und $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

a) Was ist der Definitions- und Wertebereich der Funktion g?

b) Mit Hilfe des TR, skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $-g(x)$ im gleichen Koordinatensystem. Wählen Sie die Einheitslänge mindestens 4cm (10 Häuschen).

c) Skizzieren Sie dann (zuerst von Hand) die Graphen der Funktionen $h_1(x) = f(x) + g(x)$ und $h_2(x) = f(x) - g(x)$ mit roter Farbe.

10.8 Lösungen

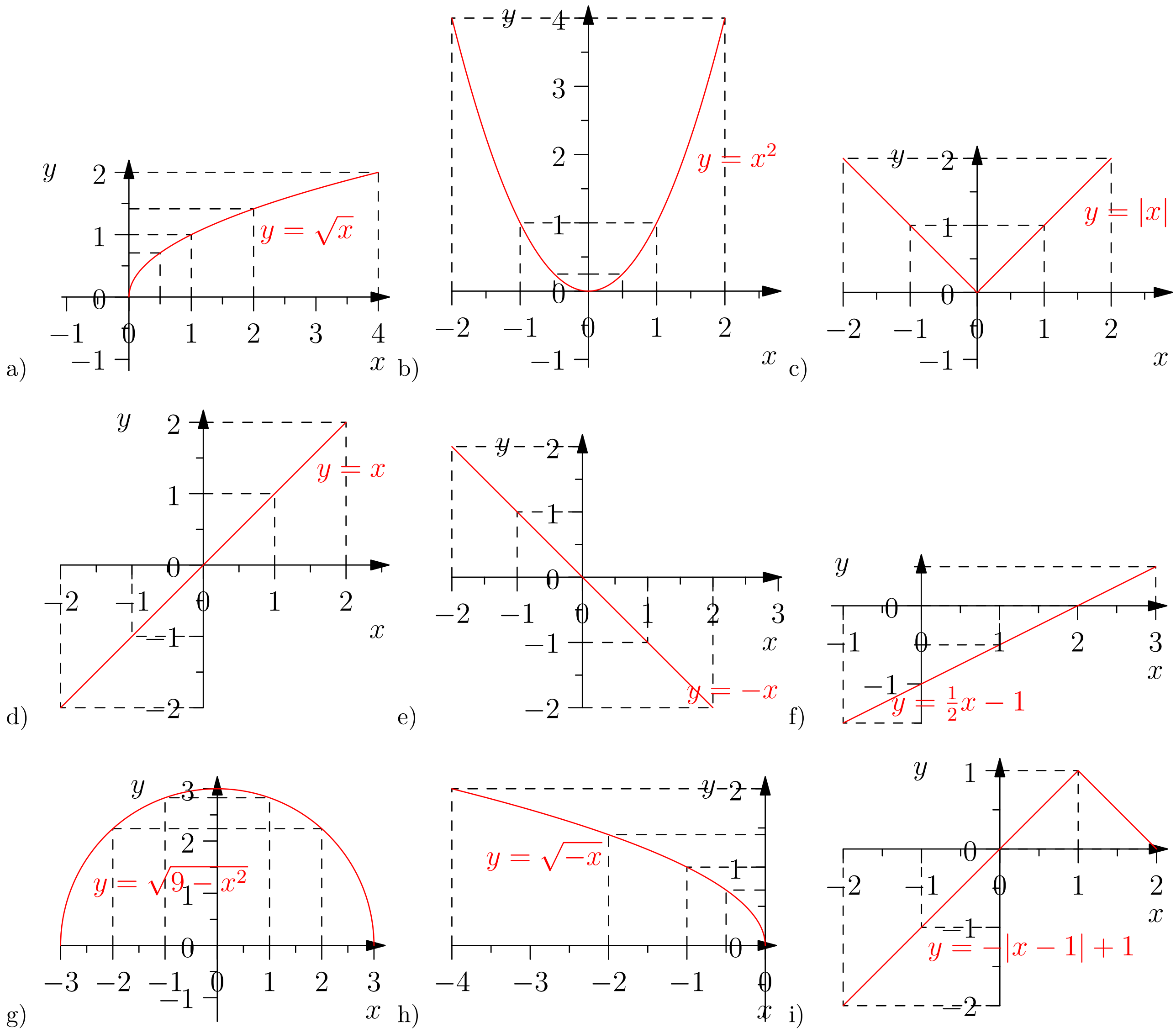
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 169 ex-funktionen-zeichnen



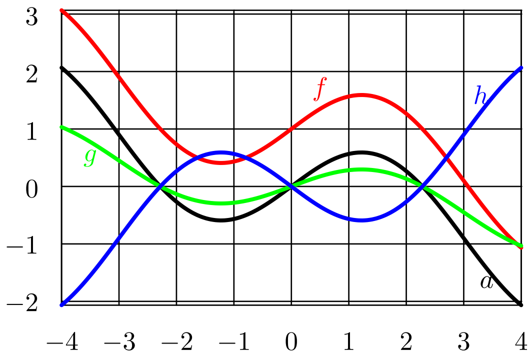
Lösung zu Aufgabe 170 ex-funktionen-ablesen

Die ungefähren Funktionswerte sind:

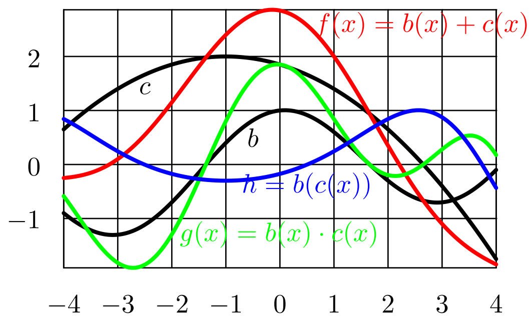
$f(-4)$	≈ 1.7	$g(-4)$	≈ 1.4	$h(-4)$	≈ -1.5
$f(-3)$	≈ 0	$g(-3)$	≈ 1.2	$h(-3)$	≈ -0.8
$f(-2)$	≈ -1.7	$g(-2)$	≈ 1	$h(-2)$	≈ 0
$f(-1)$	≈ -1.7	$g(-1)$	≈ 0.7	$h(-1)$	≈ 2
$f(0)$	≈ 0	$g(0)$	≈ 0.4	$h(0)$	≈ 0
$f(1)$	≈ 1.7	$g(1)$	≈ 0	$h(1)$	≈ -0.8
$f(2)$	≈ 1.7	$g(2)$	≈ -1	$h(2)$	≈ -1.5
$f(3)$	≈ 0	$g(3)$	nicht definiert	$h(3)$	≈ -2
$f(4)$	≈ -1.7	$g(4)$	nicht definiert	$h(4)$	≈ -2.5

Lösung zu Aufgabe 171 ex-funktionen-ablesen-addieren-multiplizieren

a), b), c)



d), e), f)



Lösung zu Aufgabe 172 ex-funktionen-transformieren

a) Graph von z um 2 Einheiten nach oben verschieben.

b) Graph von z um 1 Einheit nach unten verschieben.

c) Graph von z um $|v|$ Einheiten nach oben (wenn $v \geq 0$) oder unten (wenn $v < 0$) verschieben.

d) Graph von z um Faktor 2 in y-Richtung strecken. D.h. alle Punkte auf dem Graphen sind danach doppelt so weit von der x-Achse entfernt.

e) Graph von z um Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung strecken. D.h. alle Punkte auf dem Graphen sind danach halb so weit von der x-Achse entfernt.

f) Graph von z wird an der x-Achse gespiegelt.

g) Graph von z wird an der x-Achse gespiegelt und mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt. (Bzw. einfach mit Faktor -2 an der x-Achse gestreckt.

Lösung zu Aufgabe 174 ex-lineare-funktionen-zeichnen

Ausgehend vom Graphen der Funktion $i(x) = x$ (die Winkelhalbierende zwischen der positiven x- und y-Achse), können die Graphen durch Streckung (und gegebenenfalls anschliessender Verschiebung) als Geraden gezeichnet werden.

a) Graph von i mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt. Ergibt eine Gerade durch den Nullpunkt, die um 3 y-Einheiten pro x-Einheit ansteigt.

b) Gerade durch den Nullpunkt, steigt um 1 y-Einheit pro 3 x-Einheiten an.

c) Graph von i an der x-Achse gespiegelt. Ergibt die «andere Winkelhablierende».

d) Graph von c mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt. Gerade durch den Nullpunkt, fällt um 1 y-Einheit pro 2 x-Einheiten.

e) Graph von i um 1 Einheit nach unten verschoben.

f) Graph von c um 1 Einheit nach oben verschoben.

g) Gerade durch den Punkt $(0, -2)$, die pro x-Einheit um 2 y-Einheiten ansteigt.

h) Gerade durch den Punkt $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, die pro 3 x-Einheiten um eine y-Einheit abfällt.

Lösung zu Aufgabe 177 ex-spezielle-steigungen

Hinweis: In der Lösung hier werden nur positive Steigungen berechnet. Spiegelt man die Geraden an der x-Achse bleibt der Winkel gleich, die Steigung wird aber negativ. D.h. zu allen Aufgaben ist auch die entsprechend negative Steigung eine Lösung.

a) Die Steigung ist 0.

b) Man zeichnet ein 30°-60°-90°Stütz-Dreieck, z.B. so, dass die Hypotenuse 1 ist. Dann sind die Katheten $\frac{1}{2}$ (y-Differenz) und $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x-Differenz). Die Steigung ist somit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Steigung 1.

d) Wie in b), einfach x und y vertauschen, also ist die Steigung $\sqrt{3}$.

e) Die Steigung ist nicht definiert. Eine vertikale Gerade ist nicht der Graph einer Funktion. Die Steigung wäre quasi ∞.

Lösung zu Aufgabe 180 ex-lineare-funktionen-ablesen

a) y-Achsenabschnitt $q = \frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{1}{2}$ (z.B. mit den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$. Also $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

b) y-Achsenabschnitt $q = -\frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{3}{2}$ (z.B. mit den Punkten $(-1, -2)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$. Also $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

c) y-Achsenabschnitt $q = 1$. Steigung $m = -\frac{1}{3}$ (z.B. mit den Punkten $(0, 1)$ und $(3, 0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$. Also $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

d) y-Achsenabschnitt $q = -\frac{3}{2}$. Steigung $m = -2$ (z.B. mit den Punkten $(-1, \frac{1}{2})$ und $(1, -\frac{7}{2})$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2}$. Also $f(x) = -2x - \frac{3}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 181 ex-intervalle-abbilen

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

b) $f(x) = 2x + 2$ und $f(x) = -2x + 2$

c) $f(x) = 5x + 1$ und $f(x) = -5x + 6$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(x - 1)$ und $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}(6 - x)$

e) $f(x) = (b - a) \cdot x + a$ und $f(x) = (a - b) \cdot x + b$

f) $f(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot x - \frac{a}{b-a}$ und $f(x) = \frac{x-b}{a-b} = -\frac{1}{b-a} \cdot x + \frac{b}{b-a}$

g) $f(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d - c) + c$ und $f(x) = \frac{b-x}{b-a} \cdot (d - c) + c$

Aufgabe g) kann wie folgt aufgefasst werden:

1. Erst das Intervall verschieben: $f_1(x) = x - a$. Damit bildet man das Intervall $[a, b]$ auf $[0, b - a]$ ab.
2. Das verschobene verkleinert man auf das Intervall $[0, 1]$, indem man durch seine Länge dividiert, also $f_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Damit bildet man auf $[0, 1]$.

3. Man vergrössert das Intervall auf die endgültige Länge, durch Multiplikation mit $(d-c)$, also $f_3(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d-c)$.
4. Zu letzt verschiebt man das Intervall an die endgültige Lage, durch Addition von c: $f_4(x) = f(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d-c) + c$.

Die zweite Funktion erhält man fast gleich, ausser dass man im ersten Schritt zusätzlich zum Verschieben das Intervall noch umdreht mit $f_1(x) = b - x$.

Lösung zu Aufgabe 182 ex-rechtwinklige-geraden

a)

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

c) Für eine Gerade mit Steigung $\frac{4}{3}$ kann ein Stützdreieck mit Katheten $\Delta x = 3$ und $\Delta y = 4$ gezeichnet werden. Dieses Dreieck wird um 90 Grad gedreht. Das neue Stützdreieck der Senkrechten hat die Katheten vertauscht, wobei eine noch das Vorzeichen wechselt. Die neue Steigung ist also $-\frac{3}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 184 ex-schnittpunkt

Wenn x die x-Koordinate des Schnittpunktes ist, gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) && \\ -\frac{1}{3}x - 1 &= \frac{3}{2}x + 1 && \mid \cdot 6 \\ -2x - 6 &= 9x + 6 && \mid +2x - 6 \\ -12 &= 11x && \mid : 11 \\ -\frac{12}{11} &= x && \end{aligned}$$

Eingesetzt in eine der Funktionen: $f\left(-\frac{12}{11}\right) = \frac{12}{33} - 1 = -\frac{7}{11}$. Zur Kontrolle (nicht wirklich nötig) eingesetzt in g: $g\left(-\frac{12}{11}\right) = -\frac{36}{22} + 1 = -\frac{7}{11}$.
Und damit sind die Koordinaten des Schnittpunktes: $\left(-\frac{12}{11}, -\frac{7}{11}\right)$

Lösung zu Aufgabe 185 ex-rechtwinkliges-dreieck-konstruieren

Vorgehen: Zuerst werden die Funktionsgleichungen der Geraden b und $a = BC$ bestimmt. Dann wird der Schnittpunkt bestimmt.

Geradengleichung von b (Steigung $\frac{3}{2}$): $b(x) = \frac{3}{2}x + q_b$. Es gilt $A \in b$: Setzt man die x-Koordinate von A in die Funktion b ein, erhält man die y-Koordinate von A:

$$\begin{aligned} b(-2) &= -1 && \\ \frac{3}{2} \cdot -2 + q_b &= -1 && \\ -3 + q_b &= -1 && \mid +3 \\ q_b &= 2 && \end{aligned}$$

Die Gerade a ist rechtwinklig zu b, hat also die Steigung $-\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. Es gitl $B \in a$, also

$$\begin{aligned} a(3) &= 1 && \\ -\frac{2}{3} \cdot 3 + q_a &= 1 && \\ -2 + q_a &= 1 && \mid +2 \\ q_a &= 3 && \end{aligned}$$

Es ist also der Schnittpunkt der Geraden $a(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ und $b(x) = \frac{3}{2}x + 2$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x + 3 &= \frac{3}{2}x + 2 && \left| -2 + \frac{2}{3}x \right. \\ 1 &= \frac{13}{6}x && \left| \cdot \frac{6}{13} \right. \\ \frac{6}{13} &= x \end{aligned}$$

Die y-Koordinate des Schnittpunktes erhält man durch Einsetzen (in a oder b):

$$a\left(\frac{6}{13}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{13} + 3 = \frac{35}{13}$$

Kontrolle (eigentlich unnötig):

$$b\left(\frac{6}{13}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{13} + 2 = \frac{35}{13}$$

Damit sind die Koordinaten von $C = \left(\frac{6}{13}, \frac{35}{13}\right) \approx (0.4615, 2.6923)$.

Lösung zu Aufgabe 186 ex-koordinaten-quadrat

Das Stützdreieck unter $[AB]$ hat die Katheten $\Delta x = 5$ und $\Delta y = -3$. Dreht man das Stützdreieck um 90° und hängt es bei A und B an, erhält man die Punkte C und D, d.h. $C = (2+3, -2+5) = (5,3)$ und $D = (-3+3, 1+5) = (0,6)$.

Lösung zu Aufgabe 187 ex-koordinaten-rechtw-dreieck

In der POV-Ray Datei sind am Anfang folgende Variablen definiert:

- x_a (in POV-Ray `xa`): Die x-Koordinate vom Punkt A.
- x_b (in POV-Ray `xb`): Die x-Koordinate vom Punkt B.
- m_b (in POV-Ray `mb`): Die Steigung der Seite b.

Aus diesen Variablen werden sukzessive alle weiteren Grössen berechnet.

Geraden b und a und der Punkt C

Die Gerade b hat folgende Funktionsgleichung:

$$f_b(x) = m_b \cdot x + q_b$$

wobei q_b im Moment noch unbekannt ist. Da der Punkt $A = (x_a, 0)$ auf b liegt, gilt folgende Gleichung (die dann nach q_b aufgelöst wird):

$$\begin{aligned} f(x_a) &= 0 \\ m_b \cdot x_a + q_b &= 0 && \left| -m_b \cdot x_a \right. \\ q_b &= -m_b \cdot x_a \end{aligned}$$

Damit lässt sich in POV-Ray die Variable q_b wie folgt definieren:

```
#declare qb = -mb*xa;
```

Die Steigung der Gerade a lässt sich aus der Steigung der Geraden b berechnen, da diese rechtwinklig aufeinander stehen. Es gilt für rechtwinklige Steigungen m und $m_\perp$:

$$m_\perp = -\frac{1}{m}$$

also

$$m_a = -\frac{1}{m_b}$$

oder in POV-Ray Code ausgedrückt:

```
#declare ma = -1/mb;
```

Für den Achsenabschnitt q_a verfährt man genau gleich wie bei q_b. Es gilt:

$$q_a = -m_a \cdot x_b$$

Für den Schnittpunkt $C = a \cap b$ mit x-Koordinate x_c gilt:

$$\begin{aligned} f_a(x_c) &= f_b(x_c) & & \\ m_a \cdot x_c + q_a &= m_b \cdot x_c + q_b & & \mid -q_a - m_b \cdot x_c \\ x_c(m_a - m_b) &= q_b - q_a & & \mid : (m_a - m_b) \\ x_c &= \frac{q_b - q_a}{m_a - m_b} & & \end{aligned}$$

also

```
#declare xc = (qb-qa)/(ma-mb);
```

Die y-Koordinate y_c von C erhält man durch Einsetzen:

$$x_c = f_a(x_c) = m_a \cdot x_c + q_a$$

also

```
#declare yc = ma*xc+qa;
```

Punkte A_b und C_b

Man zeichnet das Steigungsdreieck für die Gerade b an den Punkten A und C. Man dreht das Dreieck um 90° um A im Gegenuhrzeigersinn. Man subtrahiert also von der x-Koordinate von a den y-Unterschied zwischen A und C, d.h. $x_a - (y_c - 0)$. Zur y-Koordinate von A wird der x-Koordinatenunterschied zwischen A und C addiert, d.h. $0 + (x_c - x_a)$. Als POV-Ray Code:

```
#declare Ab=<xa-yc, xc-xa, 0>;
```

Die Gleichen Koordinatenunterschiede werden den Koordinaten von C hinzugerechnet, also:

```
#declare Ab=<xc-yc, yc+xc-xa, 0>;
```

Punkte `Abtop`, `Cbtop` und `Cbbottom`

Zuerst ermittelt man die Funktionsgleichung der Parallen b_2 zu b durch A_b.Die Steigung ist die gleiche, nämlich m_b. Der Achsenabschnitt kann entweder wie am Anfang berechnet werden, oder man sieht ein, dass der vertikale Abstand genau der Seite c entspricht. Man erhält auf beide Weisen $q_{b_2} = q_b + (xb - xa)$ oder in POV-Ray Code:

```
#declare q2b=qb+(xb-xa);
```

Man kennt die x-Koordinaten (x_a, bzw. x_c). Durch einsetzen in die Funktionsgleichung f_b erhält man die y-Koordinaten. Oder man sieht ein, dass der Abstand der Punkte A und $A_{b_{\text{top}}}$ gleich der Seite c ist, also sind die y-Koordinaten $0 + (x_c - x_a)$, bzw. $y_c + (x_c - x_a)$. In POV-Ray Code:

```
#declare Abtop=<xa,xc-xa,0>;
```

und

```
#declare Cbtop=<xc,yc+xc-xa,0>;
```

Die Koordinaten von $C_{b_{\text{bottom}}}$ sind x_c für x und c für y wobei $c = x_c - x_a$. Also

```
#declare Cbbottom=<xc,xc-xa,0>;
```

Lösung zu Aufgabe 188 ex-geraden-durch-punkte

a) Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: $m_a = \frac{3}{2}$, $m_b = 0$, $m_c = -1$.

Achsenabschnitte: Ein Punkt auf der Geraden in die Funktionsgleichung mit unbekanntem q einsetzen, nach q auflösen. Beispiel für die Gerade a:

$$\begin{aligned} f_a(1) &= -2 & & \\ m_a \cdot 1 + q_a &= -2 & & \\ \frac{3}{2} + q_a &= -2 & & \mid -\frac{3}{2} \\ q_a &= -\frac{7}{2} & & \end{aligned}$$

Entsprechend $q_b = 1$, $q_c = -1$ und damit

$$f_a(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \qquad f_b(x) = 1 \qquad f_c(x) = -x - 1$$

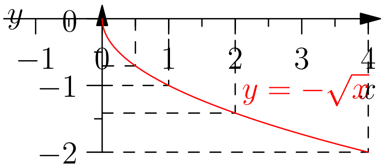
b) Nein, da $m_a \neq -\frac{1}{m_c}$

c) $f_h(x) = m_h \cdot x + q_h$ mit $m_h = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. q_h erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von A und Auflösen nach q_h. Resultat: $f_h(x) = -\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{3}$.

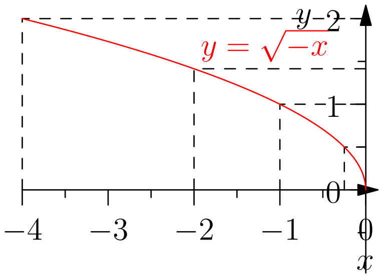
d) Auflösen der Gleichung $f_a(x) = f_h(x) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ liefert $x = \frac{19}{13}$. Eingesetzt erhält man $y = f_a(\frac{19}{13}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{13} - \frac{7}{2} = -\frac{34}{26} = -\frac{17}{13}$

Lösung zu Aufgabe 189 ex-funktionsgraphen-zeichnen

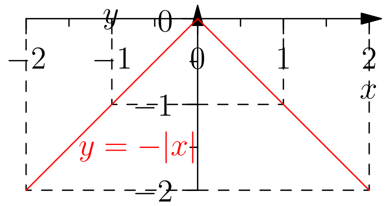
a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$



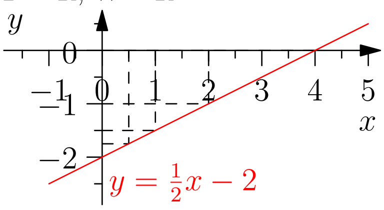
b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^-$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



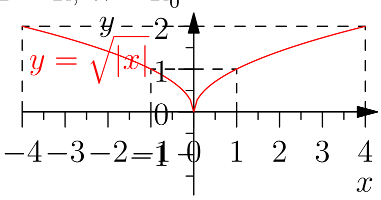
c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$



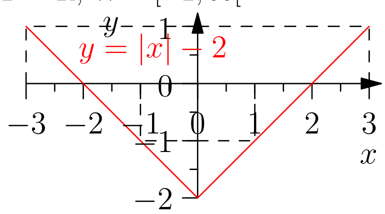
d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$



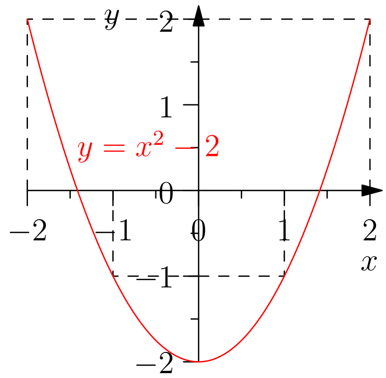
e) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



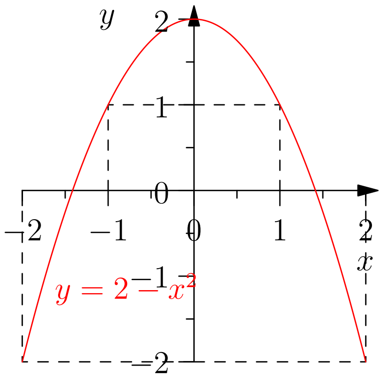
f) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [-2, \infty[$



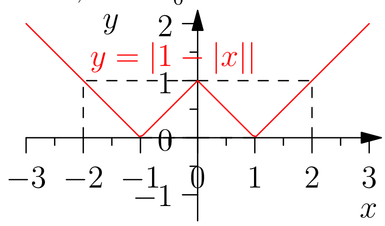
g) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [-2, \infty[$



h) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]-\infty, 2]$



i) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



Lösung zu Aufgabe 190 ex-transformation-unbekannte-funktion

a) Nur die Werte für $x = -1$, 0 und 2 sind bestimmt. Alle anderen Werte sind frei wählbar. Es gibt also unendlich viele solche Graphen (diese Unendlichekeit ist sogar noch grösser als jene der reellen Zahlen, wenn der Funktionsgraph nicht eine durchgehende Linie sein muss).

b) g: Der Graph wird um 2 Einheiten nach oben verschoben. h: der Graph wird an der x-Achse gespiegelt. k: der Graph wird um zwei Einheiten **nach links** verschoben (die Eingabe ist quasi zwei Einheiten zu früh).

c) Nice try…

Lösung zu Aufgabe 191 ex-abstand-paralleler-geraden

c) Eine Möglichkeit besteht darin, die Konstruktion rechnerisch nachzuvollziehen. Es wird also eine Rechtwinklige mit beiden Geraden geschnitten, z.B. die Gerade mit der Funktionsgleichung $k(x) = -\frac{1}{2}x$.
Man löst die Gleichungen $f(x) = k(x)$ und $g(x) = k(x)$ und erhält den Schnittpunkt mit f $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ und mit g: $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Der Abstand der beiden Punkte beträgt $\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{5^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \approx 0.89443$
d) Seien $f(x) = mx$ und $g(x) = mx - q$. Die Gleichung einer Rechtwinkligen Gerade ist $k(x) = -\frac{1}{m}x$. Der Schnittpunkt mit f ist $(0,0)$, der Schnittpunkt mit g ist $\left(\frac{q}{m+\frac{1}{m}}, -\frac{q}{m^2+1}\right)$. Der Abstand der beiden Punkte ist also $\sqrt{\left(\frac{q}{m+\frac{1}{m}}\right)^2 + \left(\frac{q}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{qm}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{q}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{q^2(m^2+1)}{(m^2+1)^2}} = \frac{q\sqrt{m^2+1}}{m^2+1} = \frac{q}{\sqrt{1+m^2}}$

Lösung zu Aufgabe 192 ex-wahr-oder-falsch

a) **Falsch**. Das gilt nicht wenn die Punkte vertikal übereinander liegen (gleiche x-Koordinate, unterschiedliche y-Koordinaten). Um die Aussage wahr zu machen, könnte man «…Punkte mit unterschiedlichen x-Koordinaten…» schreiben.
b) **Wahr**. Der einzige Streitpunkt hier ist, ob man identische (übereinanderliegende) Geraden ebenfalls als parallel bezeichnet.
c) **Falsch**. Sie schneiden sich auf der y-Achse.
d) **Falsch**. Die neue Funktion ist einfach $g(x) = -f(x)$, also an der x-Achse gespiegelt.
e) **Falsch**. Die Steigung ist Null.
f) **Wahr**. 1 y-Einheit pro x-Einheit.
g) **Falsch**. Vertikale Geraden haben keine definierte Steigung (wäre quasi unendlich).
h) **Wahr**. $m \cdot -\frac{1}{m} = -1$.
i) **Falsch**. Richtig wäre z.B. «Erhöht man den y-Achsenabschnit um 2…».
j) **Wahr**. $h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (mx + q) = 2m \cdot x + 2q$.
k) **Wahr.** $f(x) = m_f x + q_f$, $g(x) = m_g x + q_g$, also $h(x) = (m_f + m_g)x + (q_f + q_g)$.
l) **Wahr.** Wie in k) erhält man $h(x) = f(m_g x + q_g) = m_f \cdot (m_x x + q_g) + q_f = m_f m_g \cdot x + (m_f q_g + q_f)$.
m) **Falsch**. Z.B. für $f(x) = x$ und $g(x) = x$ ist $h(x) = x^2$ nicht linear.
n) **Wahr**. Überprüfen durch einsetzen der x-Koordinaten in die Funktionen.
o) **Wahr**. Die Gleichung $f(x) = g(x)$ vereinfacht sich auf eine lineare Gleichung (x^2 fällt weg) und die hat genau eine Lösung (der Koeffizient von x ist nicht Null).
p) **Falsch**. Man kann z.B. die Graphen zeichnen, oder die Gleichung $f(x) = g(x)$ umformen, um $x^2 = -1$ zu finden, was keine Lösung hat.
q) **Falsch**. Z.B. $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - x^2$. Die Summe ist $h(x) = x$ linear.
r) **Falsch**. Das Produkt genau dann ein lineare Funktion, wenn in mindestens einer Funktion die Steigung gleich Null ist (und damit der quadratische Term wegfällt).
s) **Flasch**. Das ist nur wahr, wenn die Geraden horizontal sind.
t) **Falsch**. Der Punkt $(x, f(x))$ liegt auf dem Graphen. Man könnte auch noch monieren, dass x aus dem Definitionsbereich kommen muss.
u) **Falsch**. Die Skala ist linear bis zur für die Note 6 benötigte Punktzahl. Dort macht der Graph einen Knick, Noten über 6 werden nicht gemacht. Genau genommen setzt sich die Skala aus zwei linearen Funktionen zusammen.
v) **Falsch**. Das würde eine konstante Durschnittsgeschwindigkeit (=Steigung!) voraussetzen, was nicht realistisch ist.

Lösung zu Aufgabe 193 ex-funktionen-auswerten

Definitionsbereiche: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_g =]-\infty, 5]$, $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_k = R^\star$ (alles ausser 0).
Wertebereiche: $\mathbb{W}_f = [-1, \infty]$, $\mathbb{W}_g = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W}_h = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W}_k = R^\star$.

a) 35

b) 2

c) 4

d) -3

e) $h(-1) = 3$

f) $k(6) = \frac{1}{2}$

g) $g(-h(3)) = g(-1) = \sqrt{6}$

h) $g(-(8+2)) = g(-10) = \sqrt{15}$

i) $\frac{3}{a} \cdot (a^2 - 2a) = 3(a-2)$

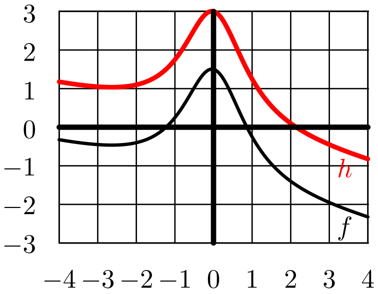
j) $(a+b)^2 - 2(a+b) + 3(a+b) + 1 = (a+b)^2 + (a+b) + 1$

k) $(a+1) \cdot (a-1) \cdot \frac{3}{a-1} = 3(a+1)$

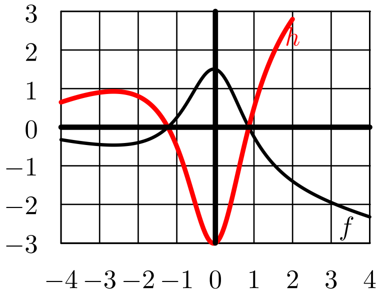
l) $|x^2| = x^2$

Lösung zu Aufgabe 194 ex-graphen-abslesen-manipulieren

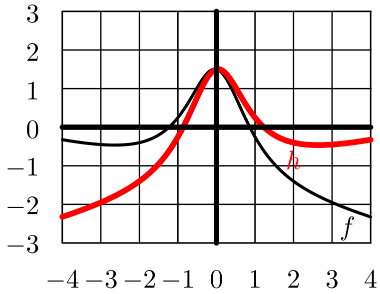
a) $h(x) = f(x) + \frac{3}{2}$



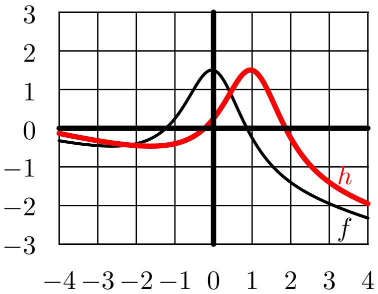
b) $h(x) = -2 \cdot f(x)$



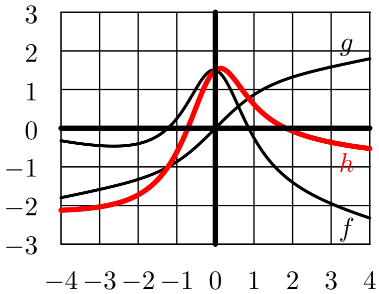
c) $h(x) = f(-x)$



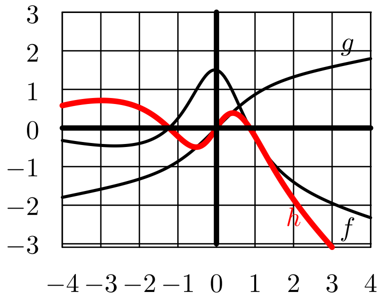
d) $h(x) = f(x-1)$



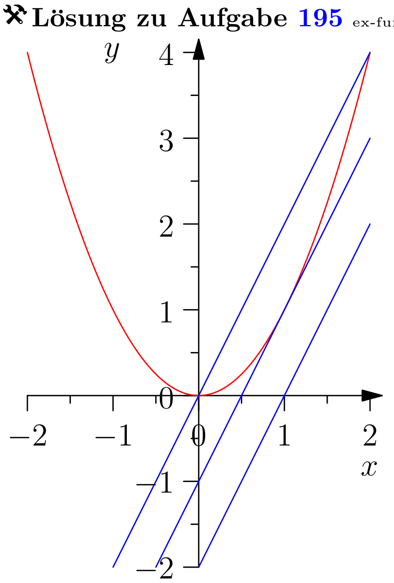
e) $h(x) = f(x) + g(x)$



f) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$



Lösung zu Aufgabe 195 ex-funktionen-tr



b) `solve(x*x=2*x-2,x)` liefert `false`, d.h. eine falsche Aussage, d.h. es gibt kein x für das diese Gleichung wahr wäre. Es gibt also keinen Schnittpunkt für $q = -2$.
Für $q = -1$ erhält man die Lösung $x = 1$ und damit den (einzigen) Schnittpunkt $(1, 1)$.
für $q = 0$ erhält man 2 Lösungen, $x = 0$ und $x = 2$, also die Schnittpunkte $(0, 0)$ und $(2, 4)$.

c) Für $q = -2$ kann die Gleichung auf die Form $x^2 - 2x + 1 = -1$ gebracht werden, wobei die linke Seite ein Binom ist, also $(x-1)^2 = -1$. Ein Quadrat kann aber nie negativ sein, darum hat diese Gleichung keine Lösung.
Für $q = -1$ kann die Gleichung auf die Form $(x-1)^2 = 0$ gebracht werden. Es gibt nur eine einzige Zahl, die quadriert 0 ergibt, nämlich 0 selbst. Also ist $x = 1$ die einzige Lösung.
Für $q = 0$ kann die Gleichung auf die Form $x(x-2) = 0$ gebracht werden. D.h. entweder ist $x = 0$ oder $(x-2) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 196 ex-funktionen-tr2

a) Die Zahl unter der Wurzel darf nicht negativ sein, also ist $\mathbb{D} = [-1, 1]$. Der Wertebereich ist $[0, 1]$.

b) und c):