6 Gleichungen

Dieses Kapitel basiert zu grosen Teilen auf den Unterrichtsunterlagen von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen, die ihrerseits auf dem Fundus der Fachgruppe Mathematik basieren.

Aufgabe 120 In einer Prüfung gibt der Lehrer für 0 Punkte die Note 1 und für jeden weiteren Punkt 0.3 Notenpunkte. Welche Punktzahl gibt Note 4?

Lösungsschema:

1. Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!): ✎ p ist die gesuchte Anzahl Punkte.
2. Übersetzen der Textinformation und Aufstellen der Gleichung: ✎ Mit p Punkten erhält man die Note $1+0.3p$. Wir wollen also dass $1+0.3p=4$.
3. Auflösen der Gleichung: ✎

$$\begin{aligned} 1+0.3p &= 4 && \mid -1 \\ 0.3p &= 3 && \mid :0.3 \\ p &= 10 \end{aligned}$$

4. Antwort: ✎ Mit $p=10$ Punkten erhält man die Note 4.

6.1 Grundlegendes zu Gleichungen und ihren Lösungen

Eine Gleichung ist eine **Aussage**. Für Aussagen gibt es drei Möglichkeiten:

- Immer wahr. Z.B. $2+3+x=5+x$ oder $6\cdot 7=42$.
- Immer falsch. Z.B. $x+1=x$ oder $1=0$.
- Nur für gewisse Einsetzungen wahr. Z.B. $2x+3=6$ ist nur wahr für $x=\frac{3}{2}$.

Lösungen einer Gleichung sind alle möglichen Einsetzungen, die eine wahre Aussage ergeben. Alle möglichen Lösungen werden in der **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ zusammengefasst.

Manchmal möchte man die möglichen Einsetzungen einschränken, z.B. auf natürliche Zahlen. In solchen Fällen wird eine **Grundmenge** $\mathbb{G}$ angegeben, z.B. $\mathbb{G}=\mathbb{N}$. Wird nichts angegeben, gilt die Abmachung $\mathbb{G}=\mathbb{R}$ (alle reellen Zahlen).

Beispiele:	$2x+3=6$	$\mathbb{G}_1=\mathbb{Z}$	$\mathbb{L}_1=\{\}=\varnothing$, keine Lösung
		$\mathbb{G}_2=\mathbb{Q}$	$\mathbb{L}_2=\{\frac{3}{2}\}$, bzw. $x=\frac{3}{2}$
		$\mathbb{G}_3=\mathbb{R}$	$\mathbb{L}_3=\{\frac{3}{2}\}$, bzw. $x=\frac{3}{2}$

Fehlt die Angabe der Grundmenge, so wird immer $\mathbb{R}$ verwendet.

Beispiele:	$x+1=1$	$\mathbb{L}_1=\{0\}$, $x=0$
	$x+1=x$	$\mathbb{L}_2=\{\}=\varnothing$, keine Lösung
	$(x-1)^2=x^2-2x+1$	$\mathbb{L}_3=\mathbb{G}=\mathbb{R}$, jede Zahl ist Lösung
	$x^2=25$	$\mathbb{L}_4=\{-5,+5\}$, $x=\pm 5$

Um die Lösung einer Gleichung zu bestimmen, versucht man normalerweise, die Unbekannte zu *isolieren*.

6.2 Lineare Gleichungen

Definition 14 Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die man in die Form

$$\boxed{a \cdot x = b} \qquad (\text{mit } a,\ b \in \mathbb{R})$$

bringen kann, heisst **lineare Gleichung**. *Hinweis: Eine lineare Gleichung kann auch als Polynom vom Grad 1 aufgefasst werden, das gleich Null gesetzt wird:* $ax - b = 0$.

Beispiel: $(x-1)^2 = (x+2)\cdot(x-2)$ ✎

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 && \mid -x^2 \\ -2x + 1 &= -4 && \mid -1 \\ -2x &= -5 && \mid : (-2) \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Satz 3

Lineare Gleichungen $a \cdot x = b$ haben entweder **eine** Lösung, **keine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen.

$a \neq 0$	b beliebig	$a \cdot x = b$	$x = \frac{b}{a}$	$\mathbb{L} = \frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	keine Lösung	$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$
$a = 0$	$b = 0$	$0 \cdot x = 0$	jede Zahl ist Lösung	$\mathbb{L} = \mathbb{G} = \mathbb{R}$

⚒ **Aufgabe 121** Lösen Sie nach x auf:

a) $\frac{4x-5}{3} - \frac{2x-3}{6} = \frac{x}{2} - 1$ b) $4x(x-1) = (2x-1)^2 - 1$ c) $\frac{8x-3}{8} - \frac{8+3x}{3} = 0$

d) Für welche Werte des Parameters p hat die Gleichung $p(x+3) = 5(p-x)$ genau eine Lösung?

6.3 Gleichungen mit Parametern

Parameter sind zusätzliche Variablen um gegebene aber numerisch (noch) unbekannte Grössen darzustellen, wie z.B. ein Zinssatz. Es gilt z.B. die Formel $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$.

Wenn nicht anders erwähnt, werden Unbekannte mit x, y oder z bezeichnet; die Parameter mit a, b, c usw. Ziel ist es, die Gleichungen nach der Unbekannten aufzulösen.

Merke Strategie zum Lösen von Parametergleichungen

1. Vereinfache beide Seiten der Gleichung.
2. Bringe alle Terme mit der Unbekannten x auf eine Seite, die übrigen Terme auf die andere Seite.
3. Klammere x aus und dividiere die Gleichung durch den Begleitfaktor von x.

Beispiel: $a(x-b) = 2(ax-2a-bx)$✎

$$\begin{aligned} ax - ab &= 2ax - 4a - 2bx & &| + ab - 2ax + 2bx \\ -ax + 2bx &= -4a + ab & & \\ x(-a+2b) &= a(b-4a) & &| : (-a+2b) \\ x &= \frac{a(b-4a)}{-a+2b} = \frac{a(4a-b)}{a-2b} & & \end{aligned}$$

⚒ **Aufgabe 122** Lösen Sie ohne Diskussion der Sonderfälle (d.h. die Gleichungen haben genau eine Lösung).

a) $qx - x = q^2 - 1$ b) $2(bz - cz) = z + bz - c$ c) $(y-3p)^2 = 2y(y+3p) - y(y-1)$

6.3.1 Diskussion von Sonderfällen

Parametergleichungen können für bestimmte Werte der Parameter keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Man spricht dann bei diesen Parameterwerten von einem Sonderfall der Gleichung bzw. Lösungen.

⚒ **Aufgabe 123** Lösen Sie mit Diskussion der Sonderfälle:

a) $ax + b = 3$ b) $px - 5 = 2x + q$ c) $p^2x - px = p^2 - 1$

6.4 Äquivalenz-, Gewinn- und Verlustumformungen

Definition 15 Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen sind Umformungen einer Gleichung, welche die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändern:

- **Addieren und Subtrahieren** von beliebigen Termen und Zahlen
- Multiplizieren mit Zahlen **ungleich Null** und dividieren durch Zahlen **ungleich Null**.

Die Äquivalenzumformungen werden verwendet, um Gleichungen zu vereinfachen. Es gibt aber auch "problematische" Umformungen von Gleichungen, die Sie jetzt kennen lernen werden:

6.4.1 Lernaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben der Reihe nach und füllen Sie die Lücken aus!

Aufgabe 124 Gegeben ist die Gleichung $x = 3$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung

$$\mathbb{L} = \{3\}$$

b) Quadrieren Sie beide Seiten der Gleichung und bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der neuen Gleichung!

$$x = 3 \quad | \quad (\dots)^2$$

$$x^2 = 9$$

$$\mathbb{L} = \{-3, +3\}$$

Sie haben die Aufgaben a) und b) richtig gelöst, wenn die Lösungsmenge aus b) ein Element mehr besitzt als die aus a).

Merke Quadrieren ist eine Gewinnumformung

Aus diesem Grund ist das Quadrieren einer Gleichung eine **Gewinnumformung**: Man kann dabei eine (oder mehrere) Lösung(en) gewinnen.

Merke Verlustumformung

Umgekehrt kann man bei einer **Verlustumformung** einer Gleichung eine oder mehrere Lösungen verlieren.

Man sieht das in der nächsten Aufgabe:

Aufgabe 125 Betrachten Sie die Gleichung $x^4 = 16$

a) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung an! (Vorsicht: es gibt 2 Lösungen)

$$\mathbb{L} = \{-2, +2\}$$

b) Ziehen Sie beiden Seiten der Gleichung die Wurzel und geben Sie wieder die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an.

$$x^4 = 16 \quad | \quad \sqrt{\cdot}$$

$$x^2 = 4$$

$$\mathbb{L} = \{-2, +2\}$$

c) Vergleichen Sie die Lösungsmengen aus a) und b)! Sie sind gleich .

d) Ziehen Sie nochmals auf beiden Seiten die Wurzel und geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an!

$$x^2 = 4 \quad | \quad \sqrt{\cdot}$$

$$x = 2$$

$$\mathbb{L} = \{2\}$$

Merke

Das beidseitige Wurzelziehen einer Gleichung kann eine ✎ Verlustumformung sein.

Übrigens sieht man in der Aufgabe 125, dass man nicht in jedem Fall bei einer Verlust- oder Gewinnumformung eine Lösung verliert bzw. gewinnt. Bei b) verliert man keine, bei d) verliert man eine Lösung.

Aufgabe 126 Bestimmen Sie die Lösungsmengen und füllen Sie die Lücken aus:

a)

$$x - 2 = 0$$

$$\mathbb{L} = \{2\}$$

b)

$$x - 2 = 0 \quad | \quad \cdot (x+1)$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$\mathbb{L} = \{-1, 2\}$$

(Tipp: Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.)

Merke

Das Multiplizieren einer Gleichung mit einem Term, der die Variable x enthält, kann eine
✎ Gewinnumformung sein.

c)

$$(x+4)x = x+4$$

$$\mathbb{L} = \{-4, 1\}$$

(Tipp: Finden Sie die zwei Lösungen durch Pröbeln, es sind ganze Zahlen zwischen -10 und 10.)

d)

$$(x+4)x = x+4 \qquad | \quad :(x+4)$$

$$x = 1$$

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

Merke

Das Dividieren einer Gleichung durch einem Term, der die Unbekannte x enthält, kann eine
✎ Verlustumformung sein.

Beim Dividieren durch einen Term, der die Unbekannte enthält, muss sichergestellt werden, dass der Term nicht Null ist. Das führt auf eine Fallunterscheidung. Beispiel:

$$(x-3)x = (x-3)$$

Fall 1: Division nicht möglich weil $(x-3) = 0$, also $x = 3$. In diesem Fall erhält man die Gleichung $0 = 0$ und damit eine wahre Aussage. $x = 3$ ist also eine Lösung der Gleichung!

Fall 2: $(x-3) \neq 0$. In diesem Fall darf man dividieren und verliert keine Lösung (die wurde in Fall 1 bereits berücksichtigt).

$$x = 1$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{1, 3\}$.

Merke

Damit wir keine unvollständigen Lösungsmengen bekommen, müssen Verlustumformungen vermieden oder speziell behandelt werden. Gewinnumformungen jedoch lassen sich nicht vermeiden. Damit sich keine falschen Lösungen „einschmuggeln“, prüfen wir am Schluss der Aufgabe alle Lösungen der Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{3x-1} & = & \sqrt{4x+1} & | \text{ quadrieren} \qquad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x-1 & = & 4x+1 & \\ x & = & -2 & \end{array}$$

Danach setzt man die gefundenen Lösungen in die Ausgangsgleichung ein. **Man macht die Probe:**

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3\cdot(-2)-1} & = & \sqrt{4\cdot(-2)+1} \\ \sqrt{-7} & = & \sqrt{-7} \end{array}$$

ist falsch, da man von einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen darf.
$x = -2$ ist also keine Lösung der Gleichung. Sie wurde durch eine Gewinnumformung "gewonnen".
Da wir keine weiteren Lösungen gefunden haben, ist die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{3x-1} = \sqrt{4x+1}$ leer.
$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x-3} &= \frac{5x-10}{x-3} \quad \Big| \cdot (x-3) \qquad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 2x-1 &= 5x-10 \\ 9 &= 3x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Mache selbst die Probe und bestimme $\mathbb{L}$!

✎ $x = 3$ führt in der Ausgangsgleichung zu Divisionen durch Null und ist somit keine Lösung. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.

Aufgabe 127

a) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-1}$

b) $\sqrt{x-5} = \sqrt{7-x}$

c) $\sqrt{2x-6} = \sqrt{8-5x}$

d) $\sqrt{2x+1} = x+1$

Aufgabe 128

a) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{3x-10}{2x-3}$

b) $\dfrac{2x}{7x-1} = \dfrac{2-10x}{14x-2}$

c) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{5x-10}{2x-3}$

6.5 Textaufgaben aus Algebra 1 S. 66 ff

Aufgabe 129 Bestimme eine zweistellige (natürliche) Zahl mit folgender Eigenschaft: fügt man die Ziffer 3 einmal links und einmal rechts hinzu, so unterscheiden sich die entstehenden beiden Zahlen um 333.

Aufgabe 130 “Meine Tante”, sagt Simone, “ist jetze 5-mal so alt wie ich. In 7 Jahren wird sie nur noch 3-mal so alt sein. Wie alt bin ich heute?”

Aufgabe 131 Ein Teil eines Kapitals von 70 350 Franken ist zu 6 % angelegt, der andere zu 5 %. Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4 100 Franken. Wie gross sind die beiden Teile?

Aufgabe 132 Zu welcher Zeit (auf Hunderstelsekunden genau) zwischen 16 Uhr und 17 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel?

Aufgabe 133 Die Ortschaften A und B liegen 120 Bahnkilometer voneinander entfernt. Ein Zug verlässt A um 15.00 Uhr in Richtung B; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Der Gegenzug verlässt B um 15.15 Uhr; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 88 km/h. Wann ~~treffen~~ kreuzen sich die beiden Züge?

6.6 Einfache nicht lineare Gleichungen

Merke

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist:

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1 = 0 \quad \text{oder} \quad T_2 = 0$$

Aufgabe 134

a) $(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1) = 0$

b) $(x+4)(x^2-4) = 0$

c) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

d) $x\cdot(x+6) = -9$

6.7 Repetitionsaufgaben

6.7.1 Ortsbogen

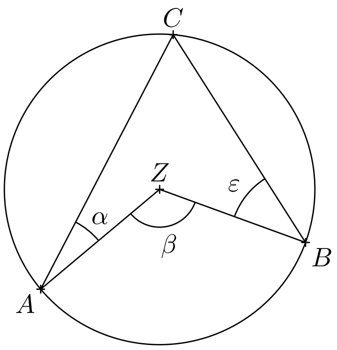
Aufgabe 135 Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ mit folgenden Grössen:

a) Sei $W_c = c \cap w_\gamma$ der Schnittpunkt der Seite c mit der Winkelhalbierenden w_γ. Gegeben sind $c = 6$, $\overline{AW_c} = 2$ und $\gamma = 50^\circ$.

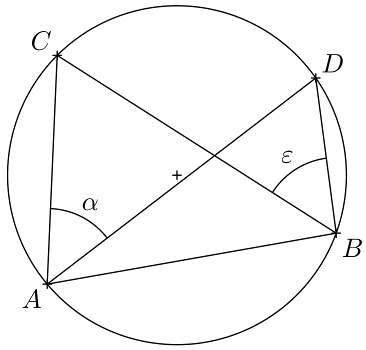
b) Die Schwerlinie $s_c = CM_c$ ist die Verbindung vom Punkt C mit dem Mittelpunkt M_c der Seite $c = [AB]$. Gegeben sind $c = 6$, $\gamma = 70^\circ$ und die Beziehung $\sphericalangle AM_cC = 2\sphericalangle CM_cB$.

Aufgabe 136 Berechnen Sie jeweils den Winkel ε aus den gegebenen Winkeln α und β.

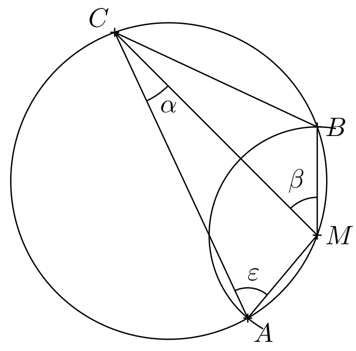
a)



b)



c)



6.7.2 Binomische Formeln

Siehe Aufgaben 117, 118 und 119 online im Kapitel 5, "Polynome und Formeln".

6.7.3 Gleichungen

Aufgabe 137 Lösen Sie mit Diskussion der Spezialfälle

a) $a(x-1) = 6(b+7x)$ b) $a(x-3) = xb - 2$ c) $p(xp+1) = 2(1+2x)$

Aufgabe 138 Lösen Sie folgende Gleichungen, ohne Diskussion der Spezialfälle.

a) $\sqrt{1-2x} = x - 1$ b) $\frac{2x-1}{2-x} - \frac{8-4x}{2x-1} = 0$ c) $a(x-2) = b^2x$

d) $\sqrt{\sqrt{x}+1} = 2$ e) $\sqrt{\sqrt{x}+1} = 0$ f) $\frac{3x-2a}{x-a} = \frac{3a-2x}{x-a}$

Aufgabe 139 Kreieren Sie eine (auch gerne etwas kompliziertere Gleichung), die folgende Bedingungen erfüllt:

a) Die Lösung ist 42 und x kommt unter einer Wurzel vor.

b) Die Lösung ist 42 und x kommt im Nenner eines Bruchs vor.

c) Die Lösungen sind 1 und 2.

d) Die Gleichung hat genau eine Lösung, ausser wenn der Parameter $a = 23$ ist.

e) Die Unbekannte x kommt unter einer Wurzel vor, die Gleichung hat keine Lösung, man erhält nach dem quadrieren aber die Lösung 42.

6.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige "Tricks", zu offene Aufgabenstellung, etc). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 121 ex-komplexere-lineare-gleichungen

a)

$$\begin{aligned}
\frac{4x-5}{3}-\frac{2x-3}{6} &= \frac{x}{2}-1 && |\cdot 6\\
2(4x-5)-(2x-3) &= 3x-6\\
8x-10-2x+3 &= 3x-6\\
6x-7 &= 3x-6 && |-3x+7\\
3x &= 1 && |:3\\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
4x(x-1) &= (2x-1)^2-1\\
4x^2-4x &= 4x^2-4x+1-1 && |-4x^2+4x\\
0 &= 0\\
\mathbb{L} &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{8x-3}{8}-\frac{8+3x}{3} &= 0 && |\cdot 24\\
3(8x-3)-8(8+3x) &= 0\\
24x-9-(64+24x) &= 0\\
24x-9-64-24x &= 0\\
-73 &= 0\\
\mathbb{L} &= \varnothing
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
p(x+3) &= 5(p-x)\\
px+3p &= 5p-5x && |+5x-3p\\
px+5x &= 2p\\
x(p+5) &= 2p
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $(p+5)\neq 0$, also wenn $p\neq -5$.

Lösung zu Aufgabe 122 ex-gleichungen-mit-parametern-ohne-diskussion

a)

$$\begin{aligned} qx - x &= q^2 - 1 \\ x(q-1) &= (q+1)(q-1) && \mid :(q-1) \\ x &= q+1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2(bz - cz) &= z + bz - c \\ 2bz - 2cz &= z + bz - c && \mid -z - bz \\ 2bz - 2cz - z - bz &= -c \\ z(2b - 2c - 1 - b) &= -c \\ z(b - 2c - 1) &= -c && \mid :(b-2c-1) \\ z &= -\frac{c}{b-2c-1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (y-3p)^2 &= 2y(y+3p) - y(y-1) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= 2y^2 + 6py - (y^2 - y) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= y^2 + 6py + y && \mid -y^2 - 6py - y - 9p^2 \\ -12py - y &= -9p^2 \\ y(-12p - 1) &= -9p^2 && \mid :(-12p-1) \\ y &= \frac{9p^2}{12p+1} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 123 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion

a)

$$\begin{aligned} ax + b &= 3 \\ ax &= 3 - b \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $a \neq 0$. Lösung $x = \frac{3-b}{a}$.
Fall 2: Spezialfall $a = 0$. Man hat die Gleichung $0 = 3 - b$.
  Fall 2.1: $b \neq 3$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
  Fall 2.2: $b = 3$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned} px - 5 &= 2x + q && \mid -2x + 5 \\ px - 2x &= q + 5 \\ x(p-2) &= q + 5 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p - 2 \neq 0$. Lösung $x = \frac{q+5}{p-2}$.
Fall 2: Spezialfall $p - 2 = 0$, also $p = 2$. Man hat die Gleichung $0 = q + 5$.
  Fall 2.1: $q \neq -5$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
  Fall 2.2: $q = -5$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} p^2x - px &= p^2 - 1 \\ x(p^2 - p) &= p^2 - 1 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2 - p \neq 0$, d.h. $p(p-1) \neq 0$, d.h. $p \neq 0$ und $p \neq 1$.
qquad Lösung $x = \frac{p^2-1}{p^2-p} = \frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)} = \frac{p+1}{p}$.
Fall 2: Spezialfall $p = 0$. Man hat die Gleichung $0 = -1$, also $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $p = 1$. Man hat die Gleichung $0 = 0$, also $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 127 ex-lineare-wurzel-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= \sqrt{4x-1} && |(\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x+1 &= 4x-1 && |-3x+1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{3 \cdot 2 + 1} = \sqrt{4 \cdot 2 - 1}$, also $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ und damit $\mathbb{L} = \{2\}$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} &= \sqrt{7-x} && |(\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ x-5 &= 7-x && |+x+5 \\ 2x &= 12 && |:2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{6-1} = \sqrt{7-6}$, also $\sqrt{1} = \sqrt{1}$ und damit $\mathbb{L} = \{6\}$.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-6} &= \sqrt{8-5x} && |(\cdot)^2 \\ 2x-6 &= 8-5x && |+5x+6 \\ 7x &= 14 && |:7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{4-6} = \sqrt{8-10}$, also $\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$. Da Wurzeln nicht aus negativen Zahlen gezogen werden können, ist $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

d)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2x} &= x+1 && |(\cdot)^2 \\ 1+2x &= x^2+2x+1 && |-2x-1 \\ 0 &= x^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1+2 \cdot 0} = 0+1$, also $\sqrt{1} = 1$, also $1 = 1$, wahre Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 128 ex-lineare-bruch-gleichungen a)

$$\begin{aligned} \frac{5x}{2x-3} &= \frac{3x-10}{2x-3} && \mid \cdot (2x-3) \qquad \text{Achtung } 2x-3 \neq 0 \\ 5x &= 3x-10 && \mid -3x \\ 2x &= -10 && \mid :2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Probe: $(2 \cdot (-5) - 3) = -13 \neq 0$, also $\mathbb{L} = \{-5\}$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{2x}{7x-1} &= \frac{2-10x}{14x-2} && \mid \cdot 2 \cdot (7x-1) \qquad \text{Achtung } 7x-1 \neq 0 \\ 2 \cdot 2x &= 2-10x && \mid +10x \\ 14x &= 2 && \mid :14 \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Probe: $7 \cdot \frac{1}{7} - 1 = 0$, also ist $x = \frac{1}{7}$ keine Lösung der Ursprungsgleichung und damit $\mathbb{L} = \varnothing$.

c)

$$\begin{aligned} \frac{5x}{2x-3} &= \frac{5x-10}{2x-3} && \mid \cdot (2x-3) \qquad \text{Achtung } 2x-3 \neq 0 \\ 5x &= 5x-10 && \mid -5x \\ 0 &= -10 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$

Lösung zu Aufgabe 129 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-128

Unbekannte Zahl: z, Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$.

Ziffer 3 links hinzufügen ergibt: $300 + z$

Ziffer 3 rechts hinzufügen ergibt: $10z + 3$

Unterschied der Zahlen ist 333, also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 300 + z - (10z+3) &= 333 \\ 297 - 9z &= 333 && \mid -297 \\ -9z &= 36 && \mid :(-9) \\ z &= -4 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$ (die Lösung ist nicht natürlich).

$$\begin{aligned} 10z + 3 - (300+z) &= 333 \\ 9z - 297 &= 333 && \mid +297 \\ 9z &= 630 && \mid :9 \\ z &= 70 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{70\}$. Da keine Gewinnumformungen gemacht wurden, ist die Probe mathematisch nicht nötig. Um Rechenfehler zu entdecken, ist die Probe aber doch sinnvoll: 703-370=333.

Lösung zu Aufgabe 130 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-138

Simones Alter heute: x [Jahre]. In 7 Jahren: $x + 7$.

Alter Simones Tante heute: $5x$ [Jahre]. In 7 Jahren: $5x + 7$.

$$\begin{aligned} 3(x+7) &= 5x+7 \\ 3x + 21 &= 5x+7 && \mid -3x-7 \\ 14 &= 2x && \mid :2 \\ 7 &= x \end{aligned}$$

Simone ist heute 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 131 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-144

1. Teil des Kapitals: x [Franken]. Jahreszins: $0.06x$.
2. Teil des Kapitals: $70350 - x$. Jahreszins $0.05(70350 - x)$.

$$\begin{aligned} 0.06x + 0.05(70350 - x) = 41000.01x + 3517.5 &= 4100 && \mid -3517.5 \\ 0.01x &= 582.5 && \mid : 0.01 \\ x &= 58250 \end{aligned}$$

Der zu 6% verzinste Teil beträgt 58250 Franken, der zu 5% verzinste Teil 12100 Franken.

Lösung zu Aufgabe 132 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-163

Gesuchte in Uhrzeit in Minuten nach 16 Uhr: x [min]
Winkel des Minutenzeigers: $6x$ [°] (12 Uhr = 0°)
Winkel des Stundenzeigers: $120 + \frac{1}{2}x$ [°] (16 Uhr = 120°, pro Stunde 30°, also pro Minute 0.5°.)
Unterschied der Winkel muss 90 [°] sein. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 6x - (120 + \frac{1}{2}x) &= 90 \\ \frac{11}{2}x - 120 &= 90 && \mid +120 \\ \frac{11}{2}x &= 210 && \mid : \frac{11}{2} \\ x &= \frac{420}{11} \approx 38.182 \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:38:10.91.

$$\begin{aligned} 120 + \frac{1}{2}x - 6x &= 90 \\ -\frac{11}{2}x + 120 &= 90 && \mid -90 + \frac{11}{2}x \\ 30 &= \frac{11}{2}x && \mid : \frac{11}{2} \\ \frac{60}{11} &= x \approx 5.455 \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:05:27.27.

Lösung zu Aufgabe 133 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-165

Fahrzeit der Züge bis zum Kreuzen: x [h]
Zurückgelegte Strecke von A: $72x$ [km]
Zurückgelegte Strecke von A: $88x$ [km]

$$\begin{aligned} 72x + 88x &= 120 \\ 160x &= 120 && \mid : 160 \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Die Züge kreuzen sich nach $\frac{3}{4}$ Stunden, also um 15.45 Uhr.
Die zweite Zeile der Gleichungsumformung kann wie folgt interpretiert werden: Vom Führerstand des einen Zuges sieht es aus, als ob der andere sich mit 160 km/h (der Summe der Geschwindigkeiten) nähert. In dieser Perspektive muss der andere Zug 120 km mit 160 km/h zurücklegen, also braucht er $\frac{3}{4}$ Stunden.

Lösung zu Aufgabe 134 ex-spezielle-nichtlineare-gleichungen a)

$$(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned} 2x+7&=0 & \text{oder} && 5x-8&=0 & \text{oder} && x^2+1&=0 \\ x&=-\frac{7}{2} &&& x&=-\frac{8}{5} &&& x^2&=-1 \\ \mathbb{L}_1&=\{-\frac{7}{2}\} &&& \mathbb{L}_2&=\{-\frac{8}{5}\} &&& \mathbb{L}_3&=\varnothing \end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-\frac{7}{2},-\frac{8}{5}\}$

b)

$$(x+4)(x^2-4)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned} x+4&=0 & \text{oder} && x^2-4&=0 \\ x&=-4 &&& x^2&=4 \end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-4,-2,2\}$.

c)

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+x&=0 \\ x(x-1)^2&=0 \end{aligned}$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$x=0 \qquad \text{oder} \qquad x-1=0$$

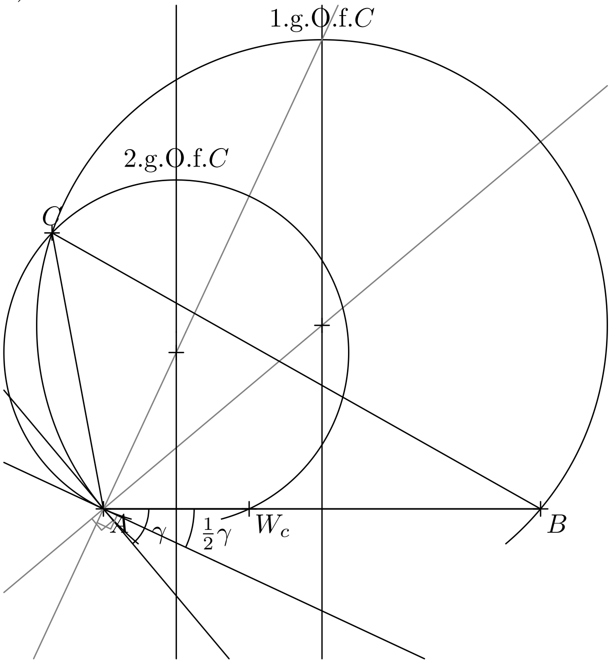
Und damit: $\mathbb{L}=\{0,1\}$.

d)

$$\begin{aligned} x\cdot(x+6)&=-9 && \mid +9 \\ x^2+6x+9&=0 \\ (x+3)^2&=0 \\ x&=-3 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 135 ex-ortsbogen-konstruktionen

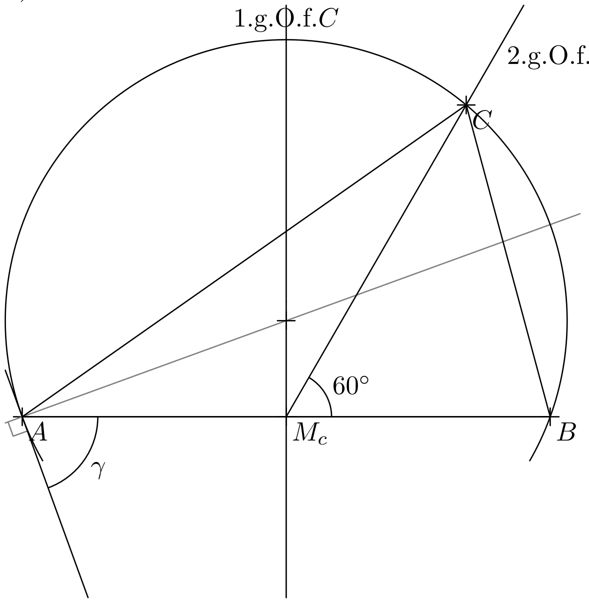
a)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ → 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu $\frac{1}{2}\gamma$ über $[AW]$ → 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung. (Die zweite, an c gespiegelte Lösung nicht mitgezählt).

b)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ → 1.g.O.f.C
2. Winkel 60° bei M_c abtragen → s_c, 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung. (Die zweite, an c gespiegelte Lösung nicht mitgezählt).

Lösung zu Aufgabe 136 ex-ortsbogen-winkel-berechnen

a) Die Dreiecke $\triangle AZC$ und $\triangle BCZ$ sind gleichschenklig (zwei Seiten sind Radien). Damit ist der Winkel $\sphericalangle ACB = \alpha + \varepsilon$. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewinkel über der Sehen $[AB]$, also die Hälfte vom Zentriwinkel β. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \alpha + \varepsilon &= \frac{1}{2}\beta \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\beta - \alpha \end{aligned}$$

b) $\varepsilon = \alpha$ (Peripheriewinkel über $[CD]$.

c) $\sphericalangle MCB = \alpha$ (Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen $[AM]$ und $[MB]$.

$\sphericalangle CBM = 180° - \alpha - \beta$ (Innenwinkelsumme im $\triangle MBC$).

$\sphericalangle CBM$ und ε sind Peripheriewinkel auf verschiedenen Seiten der Sehne $[MC]$. Sie ergänzen sich zu 180°. Also: $\varepsilon = 180° - \sphericalangle CBM = 180° - (180° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$.

Lösung zu Aufgabe 137 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion2

a)

$$\begin{aligned} a(x-1) &= 6(b+7x) \\ ax - a &= 6b + 42x & &| -42x + a \\ ax - 42x &= 6b + a \\ x(a-42) &= 6b + a \end{aligned}$$

Fall 1 Normalfall $a \neq 42$, $x = \frac{6b+a}{a-42}$.
Fall 2 Spezialfall $a = 42$. Eingesetzt: $x \cdot 0 = 6b + 42$.
  Fall 2.1: $6b + 42 = 0$, d.h. $b = -7$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
  Fall 2.2: $b \neq -7$, also $\mathbb{L} = \varnothing$

b)

$$\begin{aligned} a(x-3) &= xb-2 \\ ax-3a &= xb-2 && \mid +3a-xb \\ ax-xb &= 3a-2 \\ x(a-b) &= 3a-2 \end{aligned}$$

Fall 1 Normalfall $a \neq b$, $x = \frac{3a-2}{a-b}$.
Fall 2 Spezialfall $a = b$. Eingesetzt: $x \cdot 0 = 3a-2$.
Fall 2.1: $3a-2=0$, d.h. $a = \frac{2}{3}$. In diesem Fall: $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
Fall 2.2: $a \neq \frac{2}{3}$, also $\mathbb{L} = \varnothing$

c)

$$\begin{aligned} p(xp+1) &= 2(1+2x) \\ p^2x+p &= 2+4x && \mid -p-4x \\ p^2x-4x &= 2-p \\ x(p^2-4) &= 2-p \end{aligned}$$

Fall 1 Normalfall $p^2-4 \neq 0$, d.h. $p \neq -2$ und $p \neq +2$. In diesem Fall ist $x = \frac{2-p}{p^4-4} = \frac{-(p-2)}{(p+2)(p-2)} = -\frac{1}{p+2}$.
Fall 2 Spezialfall $p = -2$. Eingesetzt: $x \cdot 0 = 2-(-2)$, also $0 = 4$, und damit $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3 Spezialfall $p = +2$. Eingesetzt: $x \cdot 0 = 2-(+2)$, also $0 = 0$, und damit $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

⚒ Lösung zu Aufgabe 138 ex-gleichungen-vermischt

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x} &= x-1 && \mid (\cdot)^2 \quad ⚠ \\ 1-2x &= x^2-2x+1 && \mid +2x-1 \\ 0 &= x^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1-2\cdot 0} = 0-1$, also $\sqrt{1} = -1$, also $1 = -1$, falsche Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{2-x} - \frac{8-4x}{2x-1} &= 0 && \mid \cdot (2-x)(2x-1) \quad ⚠ \\ (2x-1)^2 - 4(2-x)^2 &= 0 \\ 4x^2-4x+1-(16-16x+4x^2) &= 0 \\ 12x-15 &= 0 \\ 12x &= 15 && \mid :12 \\ x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Probe: Einsetzen (mühsam) oder festellen, dass im ersten Schritt mit einer Zahl ungleich Null multipliziert wurde (jetzt wo man x kennt), und es so tatsächlich eine Äquivalenzumformung war.

c)

$$\begin{aligned} a(x-2) &= b^2x \\ ax-2a &= b^2x && \mid +2a-b^2x \\ ax-b^2x &= 2a \\ x(a-b^2) &= 2a && \mid :(a-b^2) \\ x &= \frac{2a}{a-b^2} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{x}+1} &= 2 && \mid (\cdot)^2 \\ \sqrt{x}+1 &= 4 && \mid -1 \\ \sqrt{x} &= 3 && \mid (\cdot)^2 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\sqrt{9}+1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

e)

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{x}+1} &= 0 && \mid (\cdot)^2 \\ \sqrt{x}+1 &= 0 && \mid -1 \\ \sqrt{x} &= -1 && \mid (\cdot)^2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\sqrt{1}+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 0$

Eigentlich hätte man schon eine Zeile früher aufhören können, da eine Wurzel immer eine positive Zahl ergibt und diese Aussage also immer falsch ist.

f)

$$\begin{aligned} \frac{3x-2a}{x-a} &= \frac{3a-2x}{x-a} && \mid \cdot (x-a) \quad ⚠ \\ 3x-2a &= 3a-2x && \mid +2a+2x \\ 5x &= 5a && \mid :5 \\ x &= a \end{aligned}$$

Probe: Man erhält in der Ausgangsgleichung eine Division durch Null. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.

Lösung zu Aufgabe 139 ex-gleichungen-kreieren

Die vorgeschlagenen Lösungen sind möglichst einfach gehalten. Die Gleichungen können durch Term- und Äquivalenzumformungen beliebig "verkompliziert" werden.

a) $\sqrt{x-42} = 0$ b) $\frac{42}{x} = 1$ c) $(x-1)(x-2) = 0$ d) $x(a-23) = 1$

e) $\sqrt{x} = -\sqrt{42}$