11 Gleichungssysteme

Beispiel: Für welche Werte von x und y sind beide der folgenden Gleichungen wahr?

$$\begin{cases} x + y = 60 & (G_1) \\ x - y = 40 & (G_2) \end{cases}$$

11.1 Lösungsmethoden

Es gibt verschiedene Lösungsmethoden für Gleichungssysteme. Einige sind universell, andere funktionieren nur für lineare Gleichungssysteme (d.h. Polynome ersten Grades).

11.1.1 Universelle Lösungsmethode: Auflösen und Einsetzen

- Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen.
- Resultat in alle anderen Gleichungen einsetzen (und damit eine Variable eliminieren).
- Man löst das neue Gleichungssystem, das eine Variable und eine Gleichung weniger hat.
- Am Schluss setzt man die Lösungen «rückwärts» ein.

Diese Methode ist universell, ist aber manchmal etwas umständlich. Es lohnt sich, die jeweils «einfachste» Gleichung nach der «einfachsten» Variablen aufzulösen.

Beispiel: $$\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$$ ✎

Aus dieser Lösungmethode folgert man, dass es genau so viele Gleichungen wie Unbekannte braucht: In jedem Schritt wird eine Unbekannte **eliminiert** und man erhält ein System mit einer Gleichung weniger.

Merke

Damit ein Gleichungssystem überhaupt eine eindeutige Lösung haben kann, braucht es gleich viele Gleichungen wie Unbekannte. **Aber** auch in diesem Fall ist es möglich, dass das System keine oder unendlich viele Lösungen hat.

Merke

Der TR kann auch Gleichungssysteme lösen. Dazu werden die Gleichungen mit **and** verknüpft und die Liste der Variablen zwischen **{}** geschrieben. Beispiel:

```
solve(x+y=60 and x-y=40, {x,y})
```

11.1.2 Linearkombination von Gleichungen

Addiert (bzw. subtrahiert) man zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) eines Systems (voneinander), erhält man eine neue Gleichung, die von den Lösungen ebenfalls erfüllt wird.
Das ist besonders dann nützlich, wenn dabei eine Variable eliminiert wird.

Beispiel: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$ ✎

Der Vorteil dieser Methode ist, dass die zu lösenden Gleichungen meist einfacher sind. Der Nachteil ist, dass diese Methode nur bei linearen Gleichungen immer funktioniert.

Achtung: Wendet man diese Methode zur Variablenelimination bei 4 oder mehr Gleichungen an, muss darauf geachtet werden, dass aus jeweils n Gleichungen höchstens $n-1$ neue Gleichungen erzeugt werden. Z.B. wenn die Gleichungen (G_1) mit (G_2) und (G_2) mit (G_3) kombiniert wurde, darf nicht auch noch (G_1) mit (G_3) kombiniert werden.

11.2 Unterbestimmte Gleichungssysteme

Beispiel: Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen von folgendem unterbestimmten Gleichungssystem. Finden Sie eine geometrische Interpretation der Lösungen:

$$x + 2y = 4 \quad (G_1)$$

✎

Löst man ein unterbestimmtes Gleichungssystem durch Auflösen und Einsetzen, erhält man am Schluss eine Gleichung mit mehr als einer Variablen. Nach einer kann aufgelöst werden, alle restlichen können frei gewählt werden (im Definitionsbereich der entsprechenden Funktion). Geometrisch ergibt sich dann eine eventuell mehrdimensionale Punktemenge:

Anzahl Variablen	**Anzahl Gleichungen**	**Allgemeine Lösungsmenge**
2	1	Gerade (bzw. Kurve) in der Ebene
3	1	Ebene (bzw. Fläche) im Raum
3	2	Gerade (bzw. Kurve) im Raum
4	2	Ebene (bzw. Fläche) im 4-dimensionalen Raum
4	3	Gerade (bzw. Kurve) im 4-dimensionalen Raum

11.3 Spezialfälle von Gleichungssystemen

Beispiel 1: $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (G_1) \\ -8x + 6y = 1 & (G_2) \end{cases}$

Beispiel 2: $\begin{cases} -4x - 10y = 8 & (G_1) \\ 6x + 15y = -12 & (G_2) \end{cases}$

Zeichnen Sie jeweils die beiden Lösungsmengen von (G_1) und (G_2) in einem Koordinatensystem (am besten auf die Rückseite dieses Blatts).

11.3.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Die Lösung einer einzelnen Gleichung entspricht den Koordinaten aller Punkte auf einer Geraden. Die Lösung des Systems entspricht dem Schnittpunkt der Geraden. Es gibt somit 3 Fälle:

Fall 1: ✎

Fall 2: ✎

Fall 3: ✎

11.3.2 Lineare Gleichungssyteme mit 3 Variablen

Die Lösung einer einzelnen Gleichung entspricht den Koordinaten aller Punkte einer Ebene im Raum. Im Allgemeinen schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden (Heftrücken!). Für den Schnittpunkt dreier Ebenen ergeben sich folgende Fälle:

✎

⚒ Aufgabe 197

a) $\begin{cases} -3x + 8y = 26 & (G_1) \\ -9x - 8y = -50 & (G_2) \end{cases}$
b) $\begin{cases} -x + 10y = -61 & (G_1) \\ -6x - y = 61 & (G_2) \end{cases}$
c) $\begin{cases} 7x - 10y = -36 & (G_1) \\ -10x = -20 & (G_2) \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x - y = -7 & (G_1) \\ -6x - 2y = -14 & (G_2) \end{cases}$
e) $\begin{cases} -10x + 6y = -70 & (G_1) \\ -2x = -20 & (G_2) \end{cases}$
f) $\begin{cases} -6x = 30 & (G_1) \\ -5x + 10y = 25 & (G_2) \end{cases}$

⚒ Aufgabe 198

a) $\begin{cases} -10x - 4y - 5z = -85 & (G_1) \\ 3x - 5y + 9z = -74 & (G_2) \\ 7y + 9z = 25 & (G_3) \end{cases}$
b) $\begin{cases} -8x - y + 6z = -58 & (G_1) \\ 3x + 10y - 2z = 99 & (G_2) \\ -x - 2y - 2z = -25 & (G_3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x - 8y - 9z = 6 & (G_1) \\ -3y + 9z = 54 & (G_2) \\ 7x + 7y = -21 & (G_3) \end{cases}$
d) $\begin{cases} -2y - 8z = -48 & (G_1) \\ 8x + 6y + z = 69 & (G_2) \\ x + 2y + 10z = 63 & (G_3) \end{cases}$

⚒ Aufgabe 199

a) $\begin{cases} -5a - 2b + 6c - 10d = 10 & (G_1) \\ 10a + 10b - 3c + 3d = 50 & (G_2) \\ -c - 9d = 50 & (G_3) \\ 8a - 4b + 2d = -30 & (G_4) \end{cases}$
b) $\begin{cases} -b + 10c + 7d = -130 & (G_1) \\ -7a - 7b - 7c - 8d = 10 & (G_2) \\ 10a + 3b + 3d = 50 & (G_3) \\ -9a - 9b - 10c + 4d = -125 & (G_4) \end{cases}$

Aufgabe 200

a) $$\begin{cases} -a - b + 6c + 10d - 6e = -55 & (G_1) \\ 3b - 5c + 8d + 10e = 81 & (G_2) \\ -2a - b + 8c + 4d + 10e = -6 & (G_3) \\ -4a + 7b - 7c - 7d + 7e = 10 & (G_4) \\ 10a + 10b + 9c + 4d - 2e = -173 & (G_5) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 6a + 5b - 3c - 3d + 3e = 12 & (G_1) \\ 8a - 3b - 7c + 8d + 5e = -44 & (G_2) \\ -8a - 5b - c + 3d - e = 16 & (G_3) \\ -5a - 2b + 8c - 2e = -34 & (G_4) \\ -8a - 4c - 7d - 9e = 124 & (G_5) \end{cases}$$

Aufgabe 201

a) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} & = 8 \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} & = -\frac{\frac{1}{3}}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy & = -1 \\ 2x + \frac{1}{y} & = \frac{23}{42} \end{cases}$

c) Lösen Sie nach x und y auf:
$\begin{cases} ax + y & = a + 2 \\ a^2x - y & = -1 \end{cases}$

d) Lösen Sie nach x und y auf:
$\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y & = \frac{2}{a+1} \\ (a+1)x + (a+1)y & = \frac{2a}{a^2-1} \end{cases}$

Aufgabe 202

Folgende Aufgaben sind aus Algebra 1 S. 181-186

Hinweis: Notieren Sie zuerst immer Ihre Unbekannten, mit **Angabe der Masseinheit**. Bei den Gleichungen, notieren Sie sich jeweils, was Sie in welcher Masseinheit ausrechnen.

a) *A108 S. 183*
Ein Goldschmied besitzt zwei Sorten Gold. Legiert er 50 g der ersten Sorte mit 100 g der zweiten, so erhält er 14-karätiges Gold. Wenn er zu dieser Legierung noch 150 g der ersten Sorte hinzufügt, so wird die neue Legierung 16-karätig. Welchen Goldgehalt besitzt jede Sorte?
Hinweis: 24 Karat entspricht reinem Gold.

b) *A114 S. 184*
Herr Merz fährt in 48 min auf einer Autostrasse von A nach D und in 55 min zurück. Das Teilstück BC ist in beiden Richtungen nur mit 40 km/h befahrbar, im Übrigen kann Herr Merz auf der Hin- und der Rückfahrt eine mittlere Geschwindigkeit von 90 km/h bzw. 70 km/h einhalten. Wie lang sind AD und BC?

c) *A118 S. 184*
Von zwei Eisenbahnstationen, deren Entfernung d Meter beträgt, gehen gleichzeitig zwei Züge ab, jeder mit konstanter Geschwindigkeit.Wenn sie einander entgegenfahren, treffen sie sich nach a Minuten, wenn sie aber in derselben Richtung fahren, nach b Minuten. Wie viele Meter legt jeder Zug pro Minute zurück?
Lösen Sie mit $a = 4, \quad b = 20, \quad d = 8600.$

d) Lösen Sie Aufgabe c) allgemein. *Das Resultat ist eine Formel, die a, b und d enthält.*

e) *122 S. 184*
Zwei Zuleitungen füllen zusammen ein Gefäss, wenn die erste 6 h lang geöffnet ist und die zweite 4 h lang. Verwechselt man die Öffnungzeiten, so läuft ein Sechstel des Gefässinhaltes über. Welchen Bruchteil des Gefässinhaltes liefert jede Leitung pro Stunde? In wie vielen Stunden wird das Gefäss durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch beide zusammen?

Aufgabe 203

Gegeben sind 3 Punkte $A = (-2, -1)$, $B = (0, 2)$ und $C = (2, 1)$. Gesucht sind die Koeffizienten a, b, c einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass der Graph von f durch die drei Punkte A, B, C geht. Wenn Sie die Funktion bestimmt haben, skizzieren Sie deren Graphen.

Aufgabe 204

Es soll eine Notenskala bestimmt werden, so dass 0 Punkte die Note 1, 10 Punkte die Note 4 und 20 Punkte die Note 6 ergeben. Begründen Sie, warum diese Notenskala nicht eine lineare Funktion sein kann. Finden Sie die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, die ein solche Skala ergibt. Zeichnen Sie dann den Graphen dieser Funktion.

11.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 197 ex-lineare-gleichungssysteme-2var

a) y eliminieren: $(G_1)+(G_2)$: $\quad -12x=-24 \quad\Leftrightarrow\quad x=2$.
Eingesetzt in $(G_1):\quad -6+8y=26 \quad\Leftrightarrow\quad 8y=32 \quad\Leftrightarrow\quad y=4$.
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen, z.B. (G_1) nach x auflösen: $x=\frac{1}{3}(8y-26)$. Eingesetzt in (G_2):
$-9\cdot\frac{1}{3}(8y-26)-8y=-50 \quad\Leftrightarrow\quad -24y+78-8y=-50 \quad\Leftrightarrow\quad -32y=-128 \quad\Leftrightarrow\quad y=4$
Und damit $x=\frac{1}{3}(32-26)=2$.

b) y eliminieren: $(G_1)+10(G_2):\quad -x-60x=-61+610 \quad\Leftrightarrow\quad -61x=-61(1-10) \quad\Leftrightarrow\quad x=-9$
Eingesetzt in (G_2): $-6\cdot(-9)-y=61 \quad\Leftrightarrow\quad 54=61+y \quad\Leftrightarrow\quad y=-7$
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, z.B. (G_2) nach y aufzulösen und in (G_1) einzusetzen:
$(G_2):\quad y=-6x-61$, eingesetzt in (G_1):
$-x+10(-6x-61)=-61 \quad\Leftrightarrow\quad -61x-610=-61 \quad\Leftrightarrow\quad -x-10=-1 \quad\Leftrightarrow\quad x=-9$
Und damit $y=y=-6\cdot(-9)-61=54-61=-7$.

c) $x=2,\quad y=5$

d) Elimination von x: $2(G_1)-(G_2):\quad 0=0$. D.h. man kann $y\in\mathbb{R}$ beliebig wählen. x ergibt sich aus dieser Wahl wenn man z.B. (G_1) nach x auflöst: $x=\frac{7-y}{3}$.

e) $x=10,\quad y=5$

f) $x=-5,\quad y=0$

Lösung zu Aufgabe 198 ex-lineare-gleichungssysteme-3var

a) x=7, y=10, z=-5
b) x=7, y=8, z=1
c) x=3, y=-6, z=4
d) x=5, y=4, z=5

Lösung zu Aufgabe 199 ex-lineare-gleichungssysteme-4var

a) a=0, b=5, c=-5, d=-5
b) a=5, b=10, c=-5, d=-10

Lösung zu Aufgabe 200 ex-lineare-gleichungssysteme-5var

a) a=1, b=-10, c=-9, d=2, e=5
b) a=-4, b=3, c=-7, d=-4, e=-4

Lösung zu Aufgabe 201 ex-lineare-gleichungssysteme-mit-umformungen-und-bruechen

a) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} &= 8 \quad |\cdot(x+y) \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} &= -\frac{\frac{1}{3}}{y} \quad |\cdot xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 &= 8(x+y) \quad |:4 \\ \frac{2}{13}\cdot y &= -\frac{1}{3}\cdot x \quad |\cdot 39 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 1 &= 2x+2y \quad (G_1) \\ 6y &= -13x \quad (G_2) \end{cases}$

(G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{13}{6}x$ (G_1'). Eingesetzt in (G_1):

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + 2\cdot\left(-\frac{13}{6}x\right) \\ 1 &= \frac{6}{3}x - \frac{13}{3}x \\ 1 &= -\frac{7}{3}x & \Big|: -\frac{7}{3} \\ -\frac{3}{7} &= x \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1'): $y = -\frac{13}{6}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{13}{14}$.
Lösung: $x = -\frac{3}{7}$, $y = \frac{13}{14}$.

b) $\begin{cases} xy &= -1 \quad (G_1) \\ 2x+\frac{1}{y} &= \frac{23}{42} \quad (G_2) \end{cases}$ (G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{1}{x}$ (G_1'). Eingesetzt in (G_2):

$2x + \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - x = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{23}{42}$

In (G_1') eingesetzt: $y = -\frac{1}{\frac{23}{42}} = -\frac{42}{23}$.

Lösung: $x = \frac{23}{42}4$, $y = -\frac{42}{23}$.

c) $\begin{cases} ax+y &= a+2 \quad (G_1) \\ a^2x - y &= -1 \quad (G_2) \end{cases}$ y elminieren: $(G_1)+(G_2)$: $ax + a^2x = a+2-1 \quad \Leftrightarrow$

$x(a+a^2) = a+1 \quad |:(a+a^2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a+1}{a+a^2} = \frac{a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a}$

Eingesetzt in (G_1): $a\cdot\frac{1}{a} + y = a+2 \quad \Leftrightarrow \quad y = a+1$

Lösung: $x = \frac{1}{a}$, $y = a+1$.

d) $\begin{cases} (a-1)x+(a+1)y &= \frac{2}{a+1} \quad (G_1) \\ (a+1)x+(a+1)y &= \frac{2a}{a^2-1} \quad (G_1) \end{cases}$ y eliminieren: $(G_1)-(G_2)$:

$$\begin{aligned} (a-1)x-(a+1)x &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1} \\ x((a-1)-(a+1)) &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x(a-1-a-1) &= \frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x\cdot(-2) &= \frac{2(a-1)-2a}{(a+1)(a-1)} & |:(-2) \\ x &= \frac{1}{(a+1)(a-1)} \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1): $(a-1)\cdot\frac{1}{(a+1)(a-1)} + (a+1)y = \frac{2}{a+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)y = \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+1} \quad |:(a+1)$
$y = \frac{1}{(a+1)^2}$.

Lösung: $x = \frac{1}{a^2-1}$, $y = \frac{1}{(a+1)^2}$.

Lösung zu Aufgabe 202 ex-textaufgaben

a) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Goldgehalt Sorte 1: x [karat], Goldgehalt Sorte 2: y [karat].

Vergleichen wird jeweils die **Masse in Gramm** an reinem Gold:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 50\cdot\frac{x}{24}+100\cdot\frac{y}{24} & = & \frac{14}{24}\cdot 150 & \text{Mischung 1}\\ (50+150)\cdot\frac{x}{24}+100\cdot\frac{y}{24} & = & \frac{16}{24}\cdot 300 & \text{Mischung 2}\end{array}\right.$$

Lösung: $x=18$, $y=12$.

Antwort: Die erste Sorte ist 18-karätig, die zweite ist 12-karätig.

b) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Strecke AD: x [km], Strecke BC: y [km]

Berechnet wird jeweils die benötigte **Zeit in Stunden** , also Strecke geteilt durch Geschwindigkeit:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{x-y}{90}+\frac{y}{40} & = & \frac{48}{60} & \text{Hinweg}\\ \frac{x-y}{70}+\frac{y}{40} & = & \frac{55}{60} & \text{Rückweg}\end{array}\right.$$

Lösung: $x=\frac{629}{12}$, $y=\frac{47}{3}$

Antwort: Die ganze Strecke ist ungefähr 52.4 km lang, das Teilstück etwa 15.7 km.

c) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Geschwindigkeit Zug 1: x [m/min], Geschwindigkeit Zug 2: y [m/min].

Variante 1: Man betrachtet die Strecken, die die Züge zurücklegen. Im ersten Fall legen Sie zusammen die Distanz d der Bahnhöfe zurück. Im zweiten Falle beträgt die Differenz der Strecken die Distanz d der Bahnhöfe:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 4x+4y & = & 8600 & \text{Fall 1: Summe der Strecken [m]}\\ 20x-20y & = & 8600 & \text{Fall 2: Differenz der Strecken [m]}\end{array}\right.$$

Variante 2: Man kann die Situation relativ zu einem der beiden Züge zu betrachten. D.h. dessen Geschwindigkeit ist dann Null, die eigene Geschwindigkeit wird zur Geschwindigkeit des anderen Zuges addiert (bzw. davon subtrahiert).

Verglichen wird die benötigte **Zeit in min** (Strecke durch relative Geschwindigkeit):

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{8600}{x+y} & = & 4 & \text{Entgegengesetzte Richtung}\\ \frac{8600}{x-y} & = & 20 & \text{Gleiche Richtung}\end{array}\right.$$

Lösung: $x=1290$, $y=860$

Antwort: Der erste Zug legt 1290 m/min zurück, der zweite 860 m/min.

d) Variante 1:

$$\begin{cases} ax+ay &= d \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ bx-by &= d \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Variante 2:

$$\begin{cases} \frac{d}{x+y} &= a \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ \frac{d}{x-y} &= b \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{d(a+b)}{2ab}$, $y = \frac{d(b-a)}{2ab}$

e) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Fülleistung Zuleitung 1: x [Gefässe pro Stunde], Fülleistung Zuleitung 2: y [Gefässe pro Stunde]
Berechnet werden die Füllmengen (Leistung mal Zeit):

$$\begin{cases} 6x+4y &= 1 \quad \text{korrekte Einstellung} \\ 4x+6y &= \frac{7}{6} \quad \text{falsche Einstellung} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{1}{15}$, $y = \frac{3}{20}$.
Antwort: Die erste Zuleitung liefert $\frac{1}{15}$ des Gefässinhaltes, die zweite liefert $\frac{3}{20}$ des Inhaltes pro Stunde.
Die erste Zuleitung benötigt $\frac{1}{\frac{1}{15}} = 15$ h, die zweite $\frac{1}{\frac{3}{20}} = \frac{20}{3} = 6$ h 40 min um das Gefäss alleine zu füllen.
Zusammen leisten die Zuleitungen $\frac{1}{15} + \frac{3}{20} = \frac{13}{60}$ Gefässe pro Stunde. Also eine Füllzeit von $\frac{1}{\frac{13}{60}} = \frac{60}{13} \approx 4.62$ h, bzw. 4 h 37 min.

Lösung zu Aufgabe 203 ex-parabel-durch-punkte

Setzt man die x-Koordinate eines Punktes in f ein, muss dessen y-Koordinate herauskommen. Wir haben also folgendes Gleichungssystem für a, b und c:

$$\begin{cases} f(-2) &= -1 \quad \text{Punkt } A \\ f(0) &= 2 \quad \text{Punkt } B \\ f(2) &= 1 \quad \text{Punkt } C \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a-2b+c &= -1 \quad (G_1) \\ c &= 2 \quad (G_2) \\ 4a+2b+c &= 1 \quad (G_3) \end{cases}$$

(G_2) ist schon nach c aufgelöst, also einsetzen in (G_1) und (G_3):

$$\begin{cases} 4a-2b+2 &= -1 \quad (G_1') \\ 4a+2b+2 &= 1 \quad (G_3') \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a-2b &= -3 \quad (G_1') \\ 4a+2b &= -1 \quad (G_3') \end{cases}$$

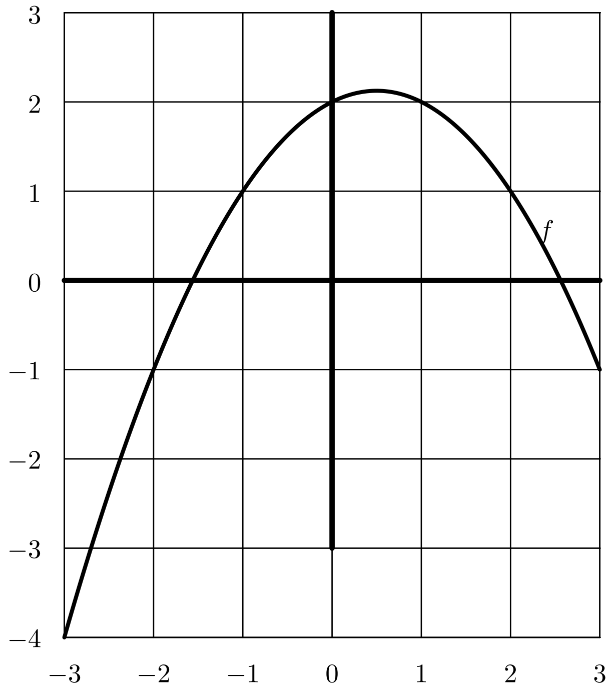
Die Unbekannte b wird eliminiert: $(G_1') + (G_3')$:

$$8a = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

Eingesetzt in (G_1'):

$$-2-2b = -3 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Und damit ist die gesuchte Funktion $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 2$.

Der Graph ist wie folgt: 

Lösung zu Aufgabe 204 ex-quadratische-notenskala

Die Punkte (0,1), (10,4), und (20,6) liegen nicht auf einer Geraden. Dies kann man belegen, indem man z.B. die Steigung der zwischen den Punkten berechnet: $\frac{3}{10} \neq \frac{2}{10}$.

Wir kennen wieder für drei Argumente (0, 10 und 20) die Funktionswerte (1, 4 und 6). Wir erhalten also folgendes System:

$$\left\{\begin{array}{rll} f(0) & = 1 & \text{Punkt } (0,1) \\ f(10) & = 4 & \text{Punkt } (10,4) \\ f(20) & = 6 & \text{Punkt } (20,4) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rll} c & = 1 & (G_1) \\ 100a + 10b + c & = 4 & (G_2) \\ 400a + 20b + c & = 6 & (G_3) \end{array}\right.$$

(G_1) ist bereits nach c aufgelöst. Eingesetzt in (G_2), (G_3):

$$\left\{\begin{array}{rll} 100a + 10b & = 3 & (G_2') \\ 400a + 20b & = 5 & (G_3') \end{array}\right.$$

b eliminieren: $2(G_2') - (G_3')$: $\quad -200a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{200}$. Eingesetzt in (G_2'):

$$-\frac{1}{2} + 10b = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 10b = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{7}{20}$$

Und damit ist die Notenfunktion $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{7}{20}x + 1$. Der Graph sieht wie folgt aus: