2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Zufallsversuche und Ereignisse

Ein Spiel oder ein Vorgang, bei dem das Resultat nicht im Voraus bekannt oder bestimmt ist, wird **Zufallsversuch** oder **Zufallsexperiment** genannt. Die bekanntesten Beispiele sind Glücksspiele wie Würfeln, Roulette oder Lotto. Ursprünglich wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt, um solche Glücksspiele zu verstehen. Im Laufe der Zeit hat sich jedoch gezeigt, dass die Theorie in vielen anderen Situationen in Natur und Sozialwissenschaften, Medizin und Technik angewendet werden kann. Das Geschlecht eines Embryos, das Wetter in Zürich in der kommenden Woche, die Anzahl Betriebsstunden bis zum ersten Ausfall eines Motors und viele andere Grössen sind in mancher Hinsicht vergleichbar mit dem Resultat eines Glücksspiels. In diesem Kapitel werden zunächst einfache Glücksspiele betrachtet.

2.1.1 Beispiel: Roulette, Teil 1

Das amerikanische Rouletterad ist eine drehbare Scheibe in einer Schüssel mit 38 Nummernfächern. Wen die Scheibe in rasche Drehung versetzt und eine Kugel in die Schüssel geworfen wird, dann ist im Voraus nicht bekannt, in welchem Fach die Kugel schliesslich liegen bleibt. Jede Zahl von 0 bis 36 und die Doppelnull 00 ist also ein mögliches Ereignis oder Resultat eines Roulettespiels. Die Ereignisse werden in der Menge S, dem sogenannten Ergebnisraum, zusammengefasst.

$$S = \{0, 00, 1, 2, ..., 36\}$$

Ergebnisraum S
Allgemein wird davon ausgegangen, dass bei einem Zufallsversuch die möglichen **Resultate** oder **Ergebnisse** des Versuchs vor dessen Durchführung angegeben werden können. Diese Ergebnisse bilden den **Ergebnisraum** S.

Bei der Durchführung des Versuchs tritt eines der möglichen Ergebnisse aus S ein. Im folgenden werden hauptsächlich Situationen behandelt, in denen S endlich ist. Somit können die Ergebnisse durchnummeriert werden: Wenn es n mögliche Ergebnisse gibt, werden diese als $s_1, s_2, ..., s_n$ notiert. Der Ergebnisraum ist dann $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$.

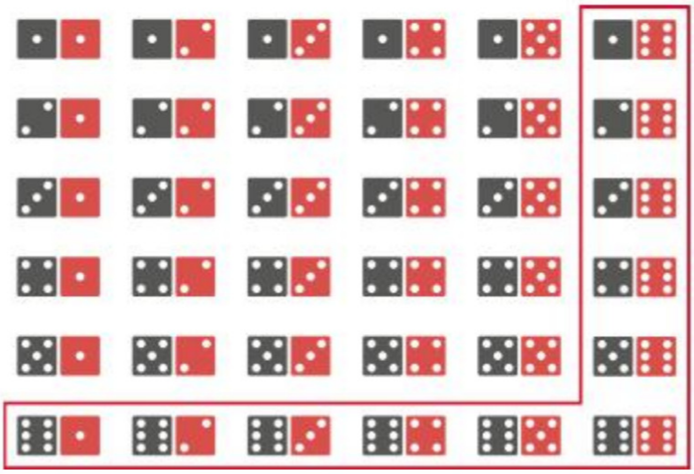
Schwarzer und roter Würfel, Teil 1

Es werden gleichzeitig ein schwarzer und ein roter Würfel geworfen. Jede Augenzahl zwischen 1 und 6 beim schwarzen Würfel kann in Kombination mit jeder Augenzahl des roten Würfels auftreten. Es gibt als 36 mögliche Ergebnisse. Formal kann man die Ergebnisse als Paare von Zahlen zwischen 1 und 6 notieren: Die erste Zahl ist die Augenzahl des schwarzen und die zweite die Augenzahl des roten Würfels. Das Paar $(1, 2)$ entspricht also dem Ergebnis „1 beim schwarzen und 2 beim roten Würfel“, während $(2,1)$ das Ergebnis „2 beim schwarzen und 1 beim roten Würfel“ bezeichnet.

Somit ist der Ergebnisraum bei diesem Spiel:

$$S = \{(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (6,5), (6,6)\}$$

In der untenstehenden Abbildung ist das Ereignis „Mindestens eine Sechs“ rot umrandet.



Beispiel: Roulette, Teil 2

Beim Roulette gibt es verschiedene Wettmöglichkeiten. Man kann z.B. auf Rot setzen. Erscheint dann eine rote Zahl, so erhält man den Einsatz zurück und erhält den gleichen Betrag zusätzlich als Gewinn, andernfalls ist der Einsatz verloren. Wenn man auf Rot setzt, ist es nicht mehr von Interesse, bei welcher Zahl die Kugel gelandet ist, sondern nur, ob diese Zahl rot ist. Aus der Roulette-Abbildung ist ersichtlich, dass es darauf ankommt, ob durch Zufall ein Ergebnis aus der folgenden Menge eintritt oder nicht.

$$E = \{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36\}$$

Allgemein kann in einem Zufallsversuch von Bedeutung sein, ob das Ergebnis in einer beliebigen Teilmenge der Ergebnisraums liegt.

Ereignis
In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden Teilmengen E des Ergebnisraums als **Ereignisse** bezeichnet. Das Ereignis E ist eingetreten, wenn das Ergebnis des Versuches zu E gehört.

Ereignisse werden häufig in Worten beschrieben und die zugehörigen Teilmenge E kann dann formal notiert werden.

Beispiel: Schwarzer und roter Würfel, Teil 2

Als Beispiel wird das Ereignis „Mindestens eine Sechs“ betrachtet. Alle Ergebnisse mit mindestens einer Sechs wurden bereits in der Grafik zu Teil 1 rot umrandet und die zugehörige Teilmenge wird formal aufgeschrieben als:

$$E = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Beispiel: Schwarzer und roter Würfel, Teil 3

Beim Werfen eines roten und eines schwarzen Würfels sind z.B. die beiden Eregnisse $E_1 =$ „Der schwarze Würfel zeigt eine Sechs“ und $E_2 =$ „Der rote Würfel zeigt eine Sechs“ von Interesse. Wie bereits beschrieben, entspricht die erste Zahl der Augenzahl des schwarzen Würfels und die zweite Zahl der Augenzahl des roten Würfels. Daraus folgt:

$$E_1 = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$$E_2 = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$

Somit bezeichnet $E_1 \cap E_2 = (6,6)$ des Ereignis „Doppelsechs“ und $E_1 \cup E_2$ das Ereignis „Mindestens eine Sechs“. Das Gegenereignis von E_1 ist „Die Augenzahl beim schwarzen Würfel ist keine Sechs“ oder, positiv formuliert, „Die Augenzahl beim schwarzen Würfel ist kleiner als Sechs“. Das Gegenereignis $\overline{E_1 \cup E_2}$ von „Mindestens einer Sechs“ ist „Keine Sechs“.

Besondere Ereignisse
Das Ereignis, das aus allen möglichen Ergebnissen besteht, als der ganze Ergebnisraum S, heisst das **sichere Ereignis**.

Das Gegenereignis zum sicheren Ereignis ist das **unmögliche Ereignis**, das nicht eintreten kann. In der Mengenschreibweise ist es die leere Menge $\emptyset$.

Wenn zwei Eregnisse E_1 und E_2 disjunkt sind, d.h. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dann heisst das in der Sprache von Ereignissen, dass sich E_1 und E_2 **gegenseitig aussschliessen**.

Ein Ereignis, das nur aus einem einzigen Ergebnis besteht, heisst auch ein **Elementarereignis**.

Beispiel: Schwarzer und roter Würfel, Teil 4

Die beiden Ereignisse „Doppelsechs“ und „Schwarzer Würfel zeigt eine Eins“ schliessen sich gegenseitig aus.

Beispiel: Roulette, Teil 3

Das Elementarereignis 7 beim Roulette ist eine andere Art auszudrücken, dass die Kugel im Fach mit der Nummer 7 landet.

2.2 Der Laplace-Ansatz für Wahrscheinlichkeiten

In seinem erst acht Jahre nach seinem Tod erschienen Buch „Ars Conjectandi" („Die Kunst des Mutmassens") hat der Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1655-1705) Wahrscheinlichkeit definiert als „den Grad der Gewissheit, welcher sich von Gewissheit unterscheidet wie ein Teil vom Ganzen". Wie kann dieser Grad von Gewissheit bestimmt werden?

> **Bezeichnung für Wahrscheinlichkeit**
> Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird durch $P(E)$ bezeichnet (P vom lateinischen Wort „probabilitas", dt. Wahrscheinlichkeit). Für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses s wird $p(s)$ verwendet anstelle von $P(s)$.

Beispiel: Roulette, Teil 4

Jedes der 38 Ereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{38}$, denn alle 38 Fächer im Rouletterad sind exakt gleich gross und das Rad ist so konstruiert, dass der Croupier mit dem Wurf der Kugel in die Schale nicht ein bestimmtes Fach bevorzugen kann. Demzufolge sind auch die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fächer gleich. Fernen müssen alle 38 Wahrscheinlichkeiten zusammen 100 % ergeben, denn eines der 38 möglichen Ereignisse trifft sicher ein. Das Ergebnis „Rot" hat dementsprechend die Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{38} = \frac{9}{19} \approx 47{,}4\,\%$, da dieses Ereignis aus 18 verschiedenen Ergebnissen besteht.

Bei Glücksspielen wird häufig angenommen, dass alle möglichen Ergebnissen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Man spricht dann von der **Gleichverteilung** bzw. dem **Laplace-Ansatz** (Pierre-Simon Laplace, französischer Mathematiker, 1749-1827).

> **Laplace-Ansatz / Gleichverteilung**
> Der Laplace-Ansatz legt die Wahrscheinlichkeiten für einen Ergebnisraum, der aus n möglichen Ergebnissen besteht, wie folgt fest:
>
> - Jedes Ergebnis s hat Wahrscheinlichkeit $p(s) = \frac{1}{n}$
> - Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist gleich der Anzahl Ergebnisse in E dividiert durch n:
>
> $$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ereignisse}}$$
>
> Kurz: „Anzahl günstige dividiert durch die Anzahl mögliche Ereignisse."

Um Wahrscheinlichkeiten mit dem Laplace-Ansatz zu berechnen, muss man die Anzahl Elemente im Ergebnisraum S und von Teilmengen davon bestimmen. Dazu kann man die Kombinatorik zu Hilfe nehmen.

Beispiel: Schwarzer und roter Würfel, Teil 5

Es wurde bereits gezeigt, dass es beim Werfen von einem schwarzen und einem roten Würfel 36 mögliche Ergebnisse gibt. Im Laplace-Ansatz hat das Ereignis „Doppelsechs“ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$, denn es besteht nur aus dem einzigen Ergebnis $(6, 6)$. Es gibt folglich ein günstiges und 36 mögliche Ergebnisse. Ausserdem hat das Ereignis „Mindestens eine Sechs“ die Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{36}$, denn die zugehörige Menge E, die bereits bestimmt wurde, besteht aus 11 Ergebnissen.

2.3 Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

Was bedeutet die Wahrscheinlichkeit 47,4 % für Rot beim Roulette genau? Welche Konsequenzen hat es, dass diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 50 % ist? Kann überprüft werden, ob diese berechnete Wahrscheinlichkeit korrekt ist? Und wie können Wahrscheinlichkeiten festgelegt werden, wenn die Annahme der Gleichverteilung nicht sinnvoll ist, wie z.B. bei einem quaderförmigen Spielwürfel?

Eine empirische Antwort auf diese Fragen erhält man, wenn man den Zufallsversuch oft durchführt und zählt, wie häufig ein Ereignis E eintritt. Beispielsweise beobachtet man mehrere Durchgänge beim Roulette und zählt, wie oft „Rot“ eintritt, oder man wirft einen quaderförmigen Würfel wiederholt und notiert jedes mal das eingetretene Ergebnis.

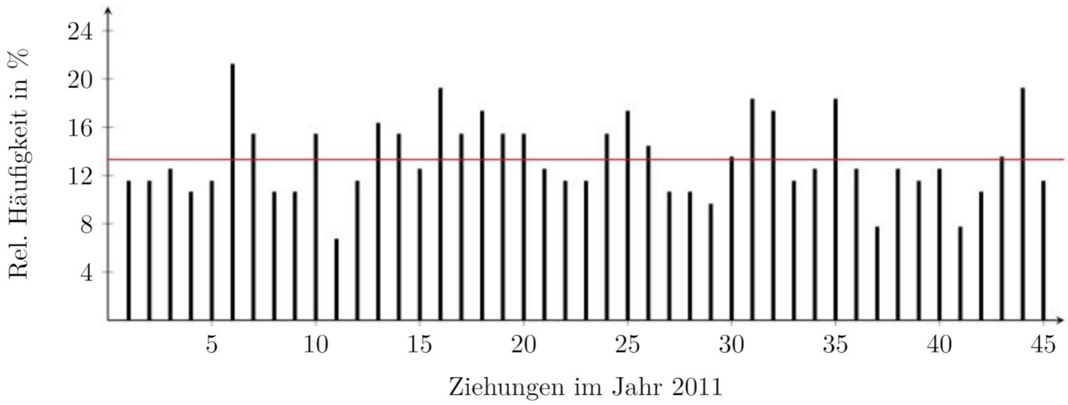
Absolute und relative Häufigkeit
Wird ein Zufallsversuch mehrmals durchgeführt, so nennt man die Anzahl Durchführungen bei denen das Ereignis E eingetreten ist, die **absolute Häufigkeit** von E.

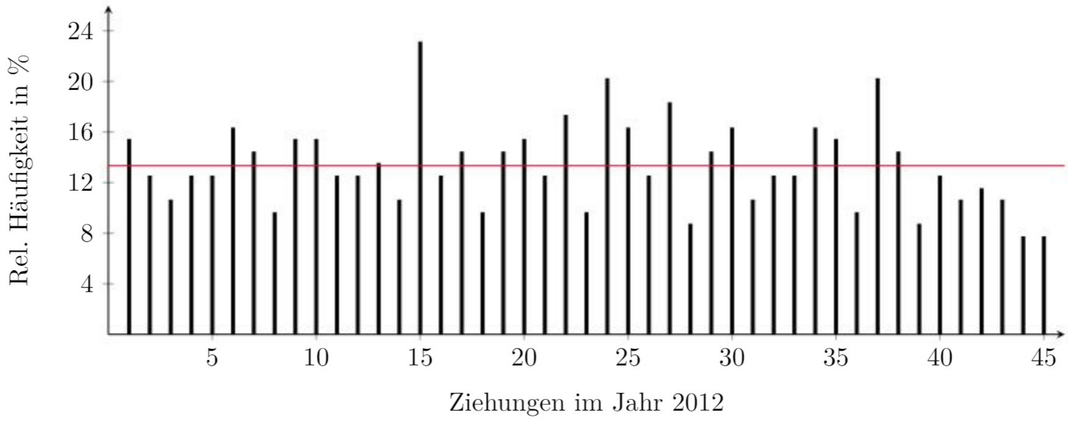
Die **relative Häufigkeit** einer Ereignisses E ist definiert, als die Anzahl Durchführungen, bei denen das Ereignis E eingetreten ist, dividiert durch die Gesamtzahl aller Durchführungen des Versuchs.

Beispiel: Gewinnzahlen im Schweizer Zahlenlotto

Zahlenlotto wird in der Schweiz seit 1970 gespielt, zuerst einmal pro Woche und seit 1997 zweimal pro Woche. Die Spielregeln wurden mehrmals geändert. Untersucht wird die Häufigkeit der Gewinnzahlen in der Periode 1986 bis 2012, in der jeweils 6 aus 45 Zahlen zufällig gezogen wurden. In den folgenden Abbildungen sind die relativen Häufigkeiten für die Jahre 2011, 2012 sowie für die gesamte Periode als sogenannte **Stabdiagramme** dargestellt. Das Stabdiagramm repräsentiert die relative Häufigkeit durch die Höhe der Stäbe.

Da bei jeder Ziehung 6 aus 45 Zahlen gezogen werden, ist das arithmetische Mittel der relativen Häufigkeiten der 45 Zahlen gleich $\frac{6}{45} = 13{,}3\,\%$. Unter dem Laplace-Ansatz ist dies auch die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl bei einer Ziehung gezogen wird. Wie die oberen Grafiken zeigen, sind die Unterschiede zwischen den relativen Häufigkeiten der 45 Zahlen in einem Jahr mit etwas mehr als 100 Ziehungen recht gross. Im Jahr 2011 hat die Zahl 11 die geringste relative Häufigkeit (nur 7 %) und die Zahl 6 mit 21 % die höchste. Ebenso können die relativen Häufigkeiten der gleichen Zahl in zwei verschiedenen





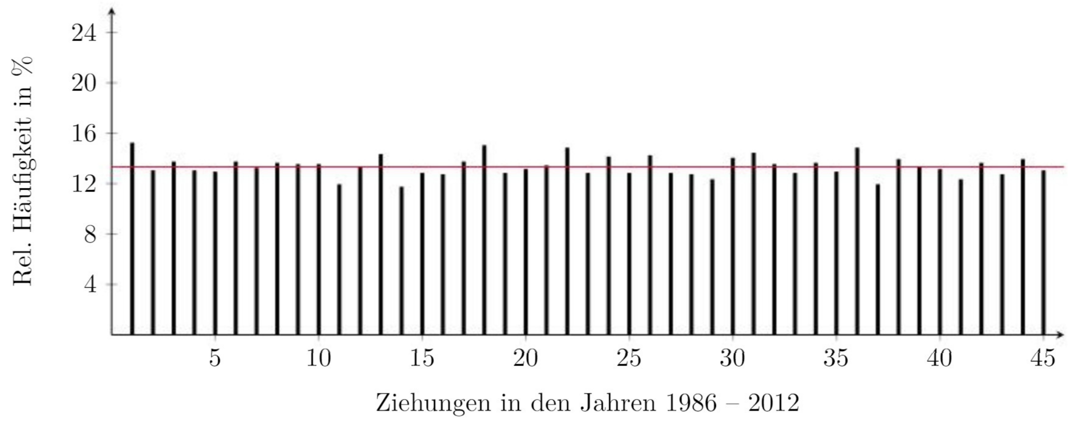
Jahren ziemlich unterschiedlich sein. Die Zahl 44 wurde z.B. 2011 20 Mal (relative Häufigkeit 19 %) gezogen, 2012 hingegen nur 8 Mal (entsprechend einer relativen Häufigkeit von weniger als 8 %). Die relative Häufigkeit der Zahl 6 hingegen war in beiden Jahren grösser als 13,3 %. Wie die dritte Grafik zeigt, gleichen sich diese Unterschiede über die ganze Periode von 27 Jahren aus: Alle relativen Häufigkeiten liegen in der Nähe von 13,3 %.

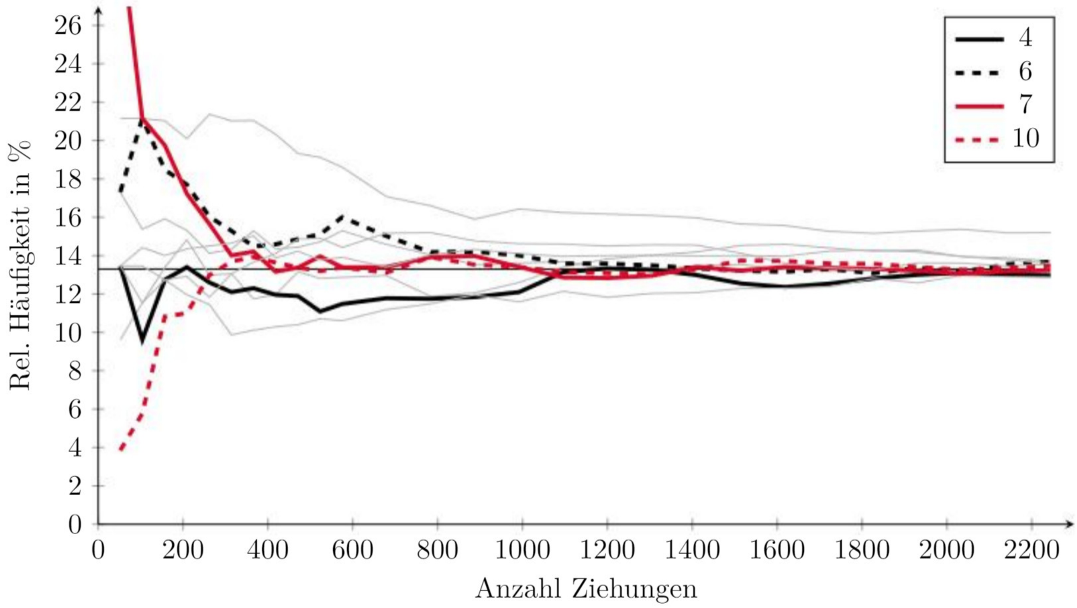
Folgende Abbildung illustriert, wie sich die relativen Häufigkeiten der Lottozahlen 1 bis 10 in Abhängigkeit der Anzahl Ziehungen von 1986 bis 2012 mit zunehmender Anzahl Ziehungen bis 13,3 % stabilisieren. Exemplarisch sind die Verläufe für die Zahlen 4, 6, 7 und 10 hervorgehoben.

Beispiel: Roulette, Teil 5

Damit bedeutet also die Wahrscheinlichkeit von 47,4 % für „Rot“ beim Roulette, dass sich die relative Häufigkeit von „Rot“ auf lange Sicht bei 47,4 % stabilisiert. Bei vielen Wiederholungen tritt „Rot“ also insbesondere in weniger als der Hälfte aller Fälle ein. Dies ist beispielsweise für ein Casino von Bedeutung, denn es impliziert, dass das Casino auf lange Sicht einen Gewinn machen wird.

Die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten tritt nicht nur bei Glücksspielen auf, wie das folgende Beispiel zeigt.





Beispiel: Knabengeburten in der Schweiz

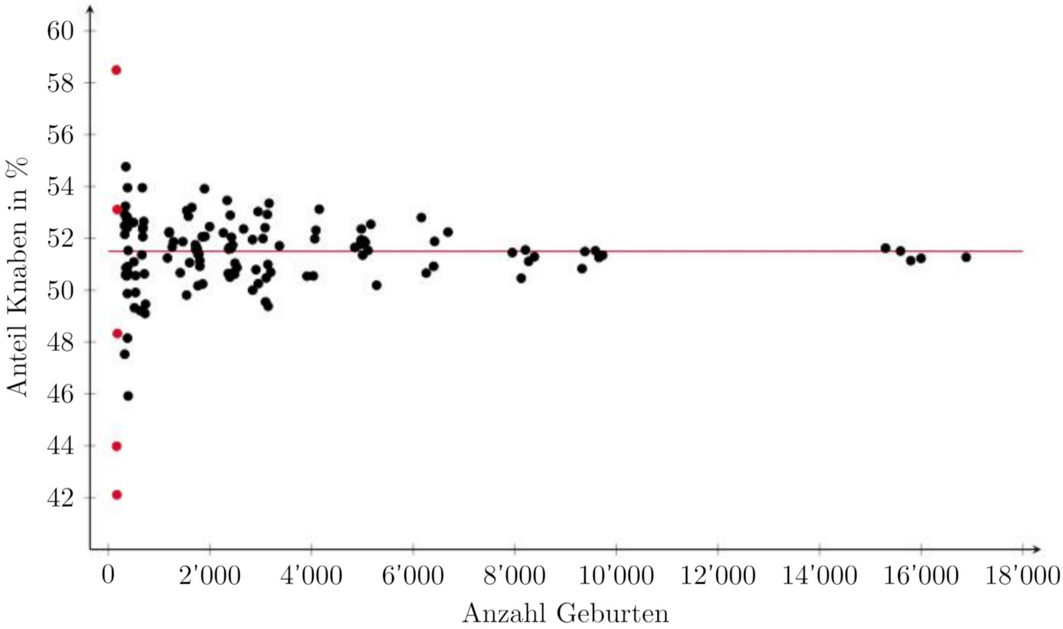
In der untenstehenden Tabelle sind die Häufigkeiten von Knabengeburten in dern Jahren 2010 bis 2014 angegeben (Quelle: Bundesamt für Statistik).

Jahr	2010	2011	2012	2013	2014
Lebendgeburten Total	80'290	80'808	82'164	82'731	83'753
Knabengeburten	41'111	41'626	42'435	42'595	43'073
Anteil Knabengeburten	51,20 %	51,51 %	51,65 %	51,49 %	51,43 %

Auch hier zeigt sich, dass die relative Häufigkeit von Jahr zu Jahr schwanken, allerdings nicht um den Wert 50 %, sondern eher um 51,5 %. In einem späteren Kapitel wird gezeigt, dass bei so vielen Wiederholungen eine Differenz von 1,5 % zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit nicht plausibel ist (testen von Hypothesen). Der Laplace-Ansatz, dass die beiden Geschlechter gleich wahrscheinlich sind, ist daher nicht gerechtfertigt.

In der folgenden Abbildung sind die relativen Häufigkeiten von Knabengeburten separat für jeden Kanton und jedes Jahr von 2010 bis 2014 dargestellt. Jeder Punkt steht für einen der 26 Kantone und eines der fünf Jahre. Die roten Punkte gehören zum Kanton

Appenzell-Innerrhoden, der die kleinsten Geburtenzahlen hat. Die horizontale Linie gibt die relative Häufigkeit an, berechnet für alle Kantone und Jahre. Anhand von diesem Beispiel wird noch deutlicher, dass die zufälligen Schwankungen umso kleiner sind, je mehr Wiederholungen betrachtet werden.



Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit
In Fällen, in denen die Wahrscheinlichkeiten nicht mit dem Laplace-Ansatz a priori, d.h. im Vornherein, bestimmt werden können, wird die empirische Tatsache benutzt, dass sich die relative Häufigkeit von Ereignissen bei vielen Wiederholungen eines Zufallsversuchs unter konstanten Bedingungen stabilisieren. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird definiert als der Wert, bei dem sich die relative Häufigkeit stabilisiert, wenn Zufallsversuch sehr oft wiederholt wird.

Mithilfe relativer Häufigkeiten können Wahrscheinlichkeiten näherungsweise bestimmt werden. Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sollten allerdings nicht gleichgesetzt werden. Wie die Beispiele der Lottozahlen und der Knabengeburten gezeigt haben, nehmen die Schwankungen der relativen Häufigkeiten zwar ab, aber sie verschwinden nicht ganz. Die Wahrscheinlichkeit entspricht der **erwarteten** relativen Häufigkeit. Die relative Häufigkeit, die man bei vielen Wiederholungen des Zufallsversuchs beobachtet, ist immer nur eine Approximation der Wahrscheinlichkeit.

2.4 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

Wertebereich von Wahrscheinlichkeiten
Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines beliebigen Ereignisses E liegt zwischen 0 und 1:

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad \text{für jedes Ereignis } E$$

Die Wahrscheinlichkeit gibt an, wie sicher man ist, dass das Ereignis E eintreten wird. Dabei bedeutet $P(E) = 0$, dass E sicher nicht eintritt. $P(E) = 1$ heisst hingegeben, dass man sicher ist, dass E eintritt. Interessant sind die Fälle, bei denen die Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegt.

Additionsregel I
Wenn sich zwei Ereignisse E_1 und E_2 gegenseitig ausschliessen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 oder E_2 eintritt, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten von E_1 und E_2:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Diese Regel leuchtet unmittelbar ein: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Würfel eine 5 oder eine 6 zeigt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit für eine 5 plus der Wahrscheinlichkeit für eine 6, also $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Im Laplace-Ansatz folgt diese Regel, weil sich die Anzahlen der günstigen Fälle addieren. Wenn Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten approximiert werden, folgt sie, weil sich die Häufigkeiten der beiden Ereignisse addieren. Sie ist damit eine Konsequenz aus dem Additionsprinzip der Kombinatorik.

Wahrscheinlichkeit von Gegenereignissen
Ein Ereignis E und sein Gegenereignis $\overline{E}$ schliessen sich gegenseitig aus und die Vereinigung $E \cup \overline{E}$ ist das sichere Ereignis S. Also folgt aus der Additionsregel:

$$1 = P(S) = P(E) + P(\overline{E}) \quad \text{und daher} \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Wird die Additionsregel mehrfach angewendet, dann folgt, dass die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses E berechnet werden kann, indem die Wahrscheinlichkeiten von allen Ergebnissen die zu E gehören, addiert werden. Im Fall des sicheren Ereignisses $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ folgt also:

$$1 = P(S) = p(s_1) + p(s_2) + ... + p(s_n)$$

Es gibt auch eine Additionsregel für Ereignisse, die sich nicht gegenseitig ausschliessen.

Additionsregel II
Für zwei beliebige Ereignisse E_1 und E_2 gilt:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$$

Die Subtraktion ist notwendig, weil sonst Ergebnisse, die im Durchschnitt $E_1 \cap E_2$ liegen, zweimal berücksichtigt werden.

Beispiel: Schwarzer und roter Würfel, Teil 4

Die beiden Ereignisse $E_1 =$ „Sechs beim schwarzen Würfel“ und $E_2 =$ „Sechs beim roten Würfel“ werden betrachtet. Die Vereinigung $E_1 \cup E_2$ ist das Ereignis „Mindestens eine Sechs“. Diese beiden Ereignisse schliessen sich nicht gegenseitig aus, da der Durchschnitt $E_1 \cap E_2$ das Ereignis „Doppelsechs“ ist. Also berechnet sich gemäss Additionsregel II die Wahrscheinlichkeit für „Mindestens eine Sechs“ folgendermassen:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

Die Wahrscheinlichkeit für „Mindestens eine Sechs“ kann auch anhand des Gegenereignisses berechnet werden. Das Gegenereignis von „ Mindestens eine Sechs“ ist das Ereignis „Keine Sechs“. Die Anzahl günstiger Fälle für dieses Gegenereignis ist mit Hilfe der früheren Abbildung einfacher zu bestimmen, sie ist gleich $5 \cdot 5 = 25$. Also folgt mit der Regel für das Gegenereignis:

$$P(\text{Mindestens eine Sechs}) = 1 - P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

2.5 Aufgaben

1. In einer Urne befinden sich 26 Kugeln, die mit den Buchstaben a bis z beschriftet sind. Eine Kugel wird gezogen. Die Ereignisse $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ und $C = \{n, o, ..., x, y, z\}$ sind gegeben.
   a) Beschreibe die Ereignisse A, B und C in Worten.
   b) Beschreibe das Ereignis $\overline{C}$ in Worten.
   c) Welche Ergebnisse umfasst das Ereignis $A \cap B$?
   d) Welche Ergebnisse umfasst das Ereignis $\overline{A} \cap \overline{B}$?
   e) Welche Ergebnisse umfasst das Ereignis $(\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$?

2. Wie viele Ereignisse können die folgenden Ergebnisräume S definiert werden?
   a) $S = \{1, 2, 3\}$
   b) $S = \{1, 2, 3, 4\}$
   c) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   d) $S = \{1, ..., n\}$
   e) $S = \{s_1, ..., s_n\}$

3. Eine Urne enthält 100 Kugeln, auf denen die Zahlen $1, 2, 3, ..., 100$ stehen. Du ziehst zufällig eine dieser Kugeln. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse und dazu jeweils die zu den Ereignissen gehörenden Mengen an.
   a) E_1: Die gezogene Zahl hat genau zwei Ziffern.
   b) E_2: Die gezogene Zahl ist grösser als 80.
   c) E_3: Die gezogene Zahl ist durch 7 teilbar.
   d) E_4: Die gezogene Zahl ist durch 3 teilbar.
   e) E_5: Die gezogene Zahl ist durch 3 oder durch 7 teilbar.

4. Nimm an, dass von den 400'000 Einwohnern in Zürich 25'000 reich sind, 2000 berühmt, davon sind 1500 sowohl reich als auch berühmt. Es wird zufällig ein Einwohner von Zürich aus dem Einwohnerregister ausgewählt.
   a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die gewählte Person nicht berühmt ist?
   b) Wie wahrscheinlich ist es, dass die gewählte Person weder reich noch berühmt ist?
   c) Wie wahrscheinlich ist es, dass die gewählt Person berühmt, aber nicht reich ist?

5. Du würfelst zweimal nacheinander. Beschreibe jeweils das Gegenereignis und berechne dessen Wahrscheinlichkeit.
   a) Du würfelst mindestens einmal eine Fünf.
   b) Du würfelst höchstens einmal eine Fünf.
   c) Du würfelst genau einmal eine Fünf.

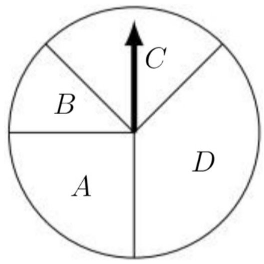
6. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnst du beim amerikanischen Roulette, wenn du
   a) auf die schwarzen Felder setzt?

b) auf die ersten zwölf Zahlen setzt?

c) auf vier angrenzende Felder setzt?

7. Du setzt beim Roulette in Las Vegas gleichzeitig auf „Rot“ und auf „Gerade Zahl“. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass du mit beiden Einsätzen gewinnst? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass du beide Einsätze verlierst?

8. Bei dem dargestellten Glücksrad wird der Zeiger gedreht. Schätze für A, B, C und D jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass der Zeiger im entsprechenden Sektor stehen bleibt.



9. Im Zufallsversuch, bei dem ein roter und ein schwarzer Würfel geworfen werden, werden verschiedene Ereignisse betrachtet. Welche der folgenden Ereignispaare E_1 und E_2 schliessen sich gegenseitig aus? Berechne jeweils $P(E_1)$, $P(E_2)$ und $P(E_1 \cup E_2)$.

   a) $E_1 =$ „Roter Würfel zeigt eine 3“, $E_2 =$ „Schwarzer Würfel zeigt eine 3“

   b) $E_1 =$ „Augensumme ist gleich 3“, $E_2 =$ „Schwarzer Würfel zeigt eine 3“

   c) $E_1 =$ „Augensumme ist gleich 5“, $E_2 =$ „Augenzahl ist bei beiden Würfeln gleich“

   d) $E_1 =$ „Mindestens eine 6“, $E_2 =$ „Höchstens eine 6“

10. Die vier Jasskarten Under, Ober, König und Ass werden gut gemischt.

    a) Erstelle eine Liste aller möglicher Anordnungen der vier Karten.

    b) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Karten nach dem Mischen in der ursprünglichen Reihenfolge Under, Ober, König, Ass sind?

    c) Wie wahrscheinliche ist es, dass das Ass zuunterst ist?

    d) Wie wahrscheinlich ist es, dass mindestens eine der vier Karten an der ursprünglichen Stelle ist?

11. Gehe in dieser Aufgabe davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Geburtstag an jedem Tag im Kalenderjahr gleich ist (Gleichverteilung). Den 29. Februar kannst du dabei vernachlässigen.

    a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte Personen nicht am gleichen Tag Geburtstag haben?

    b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

    c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von vier Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben?

    d) Formuliere das Gegenereignis zu c) und berechne dessen Wahrscheinlichkeit.

    e) Wie viele Personen müssen in einer Gruppe sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Gruppe zwei Personen gibt, welche am gleichen Tag Geburtstag haben, über 50 % liegt?

f) Ist die Annahme einer Gleichverteilung gerechtfertigt? Wie könntest du das überprüfen?

12. Es gibt vier Blutgruppen 0, A, B, AB sowie den Rhesusfaktor, der positiv oder negativ sein kann. Die Tabelle zeigt die Anteile der verschiedenen Blutgruppen und Rhesusfaktoren in der Schweiz:

Blutgruppe	0+	A+	B+	AB+	0-	A-	B-	AB-
Anteil		40 %	7 %	3,5 %	6 %	7 %	1 %	0,5 %

a) Ergänze die fehlende Angabe in der Tabelle.

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine zufällig ausgewählte Person aus der Schweiz Blutgruppe A hat?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Rhesusfaktor einer zufällig ausgewählten Person negativ ist?

13. Formuliere die folgenden Regeln in der Sprache von Ereignissen und erläutere sie mithilfe eines Venn-Diagramms.

a) $\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$

b) $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

Diese Regeln werden auch Gesetzte von De Morgan (Augustus de Morgan, englischer Mathematiker, 1806-1871) genannt.

14. Visualisiere das Gesetz $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ mithilfe eines Venn-Diagramms. Illustriere diese Regel an einem Beispiel (z.B. beim Würfeln von einem schwarzen und einem roten Würfel).

15. Wenn E_1 eine Teilmenge von E_2 ist, d.h. $E_1 \subset E_2$, warum gilt dann $P(E_1) \leq P(E_2)$? Illustriere diese Regel an einem Beispiel.

16. E_1 und E_2 sind zwei Ereignisse in einem Zufallsversuch, die beide Wahrscheinlichkeit 95 % haben.

a) Was ist der grösste mögliche Wert von $P(E_1 \cap E_2)$?

b) Was ist der kleinste mögliche Wert von $P(E_1 \cap E_2)$?

c) Beschreibe anhand von Mengenoperationen die Eigenschaften, die E_1 und E_2 haben müssen, damit $P(E_1 \cap E_2)$ maximal bzw. minimal ist.

2.6 Lösungen

1. a) A: Vokale, B: Die ersten fünf Buchstaben des Alphabets, C: Die letzten 13 Buchstaben des Alphabets

b) $\overline{C}$: Einer der ersten 13 Buchstaben des Alphabets

c) $A \cap B = \{a, e\}$

d) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$

e) $(\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = \{b, c, d, f, g, i, j, k, l, m\}$

2. a) 8 b) 16 c) 64 d) 2^n e) 2^n

3. a) $E_1 = \{10, ..., 99\} \quad \Rightarrow \quad P(E_1) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$
   b) $E_2 = \{81, ..., 100\} \quad \Rightarrow \quad P(E_2) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
   c) $E_3 = \{7, 14, 21, ..., 98\} \quad \Rightarrow \quad P(E_3) = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$
   d) $E_4 = \{3, 6, 9, ..., 99\} \quad \Rightarrow \quad P(E_4) = \frac{33}{100}$
   e) $E_5 = E_2 \cup E_4 \quad \Rightarrow \quad P(E_5) = P(E_3) + P(E_4) - P(E_3 \cup E_4) = \frac{43}{100}$

4. a) $\frac{199}{200}$
   b) Von den 2000 berühmten Personen sind 500 nicht reich, also sind insgesamt $400'000 - 25'500 = 374'500$ Personen weder reich noch berühmt: $\frac{749}{800}$
   c) Von den 2000 berühmten Einwohnern sind 500 nicht reich: $\frac{1}{800}$

5. a) P(„Du würfelst keine Fünf“) $= \frac{25}{36}$
   b) P(„Du würfelst eine Doppelfünf“) $= \frac{1}{36}$
   c) P(„Du würfelst keine Fünf oder eine Doppelfünf“) $= \frac{13}{18}$

6. a) $\frac{9}{19}$
   b) $\frac{6}{19}$
   c) $\frac{2}{19}$

7. P(„Zweimal Gewinnen“) $= \frac{4}{19}$; P(„Zweimal Verlieren“) $= \frac{5}{19}$. Acht Zahlen sind sowohl rot als auch gerade; acht Zahlen sind sowohl schwarz als auch ungerade, dazu kommen noch die Null und die Doppelnull.

8. $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{8}$, $C = \frac{1}{4}$, $D\frac{3}{8}$

9. a) $E_1 \cap E_2 = \{(3, 3\}$; $P(E_1) = \frac{1}{6}$, $P(E_2) = \frac{1}{6}$, $P(E_1 \cup E_2) = \frac{11}{36}$
   b) $E_1 \cap E_2 = \emptyset$; $P(E_1) = \frac{1}{18}$, $P(E_2) = \frac{1}{6}$, $P(E_1 \cup E_2) = \frac{2}{9}$
   c) $E_1 \cap E_2 = \emptyset$; $P(E_1) = \frac{1}{9}$, $P(E_2) = \frac{1}{6}$, $P(E_1 \cup E_2) = \frac{5}{18}$
   d) $E_1 \cap E_2 =$ „Genau eine Sechs“; $P(E_1) = \frac{11}{36}$, $P(E_2) = \frac{35}{36}$, $P(E_1 \cup E_2) = 1$

10. a) UOKA UOAK UKOA UKAO UAOK UAKO
    KUOA KUAO KOUA KOAU KAUO KAOU
    OUKA OUAK OKUA OKAU OAUK OAKU
    AUOK AUKO AOUK AOKU AKUO AKOU
    b) $P(UOKA) = \frac{1}{24}$
    c) $P(***A) = \frac{1}{4}$
    d) $P = \frac{15}{24}$

11. a) Anzahl günstige Ereignisse $= 365 \cdot 364$, Anzahl mögliche Ereignisse $= 365^2$, daher $P = \frac{364}{365}$
    b) $1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$
    c) Analoge Überlegung wie bei a): $P = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362}{365^4} = 98{,}4\,\%$
    d) P(„Mindestens zwei unter den vier Personen haben am gleichen Tag Geburtstag“) $= 100\,\% - 98{,}4\,\% = 1{,}6\,\%$

e) $1 - \frac{365\cdot 364\cdot \ldots \cdot (365-(n-1))}{365^n} \geq 0.5 \Leftrightarrow n \geq 23$

f) Vermutlich gibt es saisonale Schwankungen. Informationen über die Verteilung der Geburtstage im Jahr geben die statistischen Ämter.

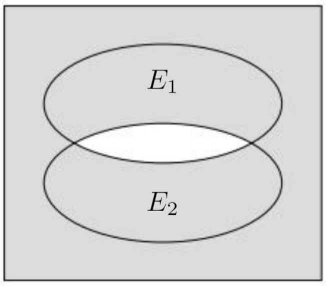
12. a) $P(0+) = 35\,\%$

b) $P(A) = 47\,\%$

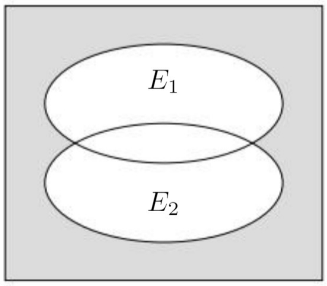
c) $P(-) = 58\,\%$

13. a) Es treten nicht beide Ereignisse gleichzeitig ein. Dazu genügt es, dass eines der beiden Ereignisse nicht eintritt.

b) Es tritt nicht mindestens eines der beiden Ereignisse E_1 und E_2 ein. Dies ist nur richtig, wenn E_1 und E_2 beide nicht eintreten.

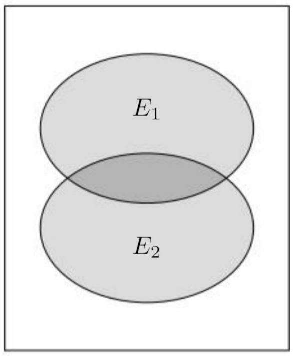


$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$



$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

14. Ergebnisse in $E_1 \cap E_2$ dürfen nicht doppelt gezählt werden.
Mögliche Beispiele:
E_1 = „Sechs beim schwarzen Würfel“,
E_2 = „Sechs beim roten Würfel“.
Dann ist $P(E_1 \cap E_1) = P($„Doppelsechs“$) = \frac{1}{36}$ und
$P(E_1 \cup E_1) = P($„mindestens eine Sechs“$) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$



15. Sei $E_3 = E_2 \cap \overline{E_1}$. Weil $E_1 \cup E_3 = E_2$ und $E_1 \cap E_3 = \emptyset$, folgt
$P(E_2) = P(E_1) + P(E_3) \geq P(E_1)$.
Beispiel Werfen zweier Würfel: E_1 = „mindestens eine Sechs“, $P(E_1) = \frac{11}{36}$
E_2 = „Augensumme grösser oder gleich 7“, $P(E_2) = \frac{21}{36}$

16. a) $P(E_1 \cap E_2) = 95\,\%$, wenn $E_1 = E_2$

b) $P(E_1 \cap E_2) = 90\,\%$, wenn $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} = \emptyset$