Definition 66 Stetigkeit

Eine Funktion $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ ist **stetig**, wenn «der Graph der Funktion ohne Absetzen gezeichnet werden kann, d.h. wenn es keine Löcher oder Sprünge gibt».
Oder mathematisch präziser wenn gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\forall x\in[a,b]$.

Aufgabe 489 Welche Funktionen aus Aufgabe 487 sind stetig? An welchen Stellen (t-Werte) sind die unstetigen Funktionen unstetig?

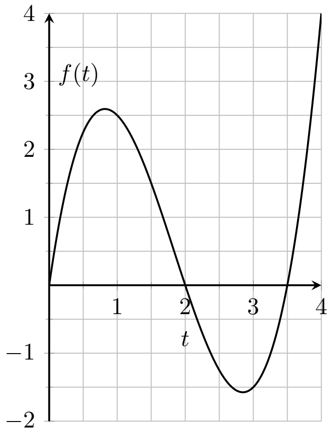
25.1 Fläche unter einem Funktionsgraphen

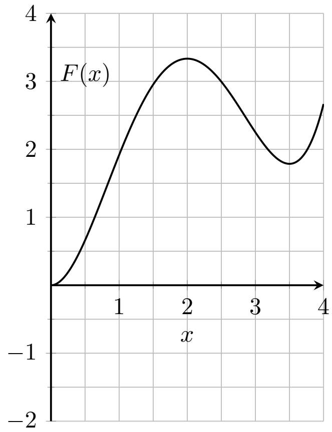
In den Aufgaben 487 und 488 haben wir effektiv Flächen unter einem Funktionsgraphen $f(t)$ bestimmt (bzw. angenähert).

Die Fläche kann einerseits näherungsweise berechnet werden, indem man die Fläche von oben und unten abschätzt. Die Grenzwerte dieser Schätzungen ergeben dann die exakte Fläche.

Alternativ können wir die Eigenschaften der Funktion $F(x)$ untersuchen, die die Fläche unter der stetigen Funktion $f(t)$ zwischen $t=0$ und $t=x$ angibt.

Aufgabe 490 Überzeugen Sie sich, dass $F(x)$ tatsächlich der Fläche unter dem Graphen $f(t)$ zwischen $t=0$ und $t=x$ entspricht. Untersuchen Sie die Graphen auch auf «diskussionswürdige» Stellen.





Ziel ist es zu zeigen, dass $f(x)=F'(x)$ ist.
Beweis: Die Ableitung ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Die Differenz $F(x+h)-F(x)$ entspricht der Fläche unter $f(t)$ zwischen $t=x$ und $t=x+h$.
Diese Fläche ist grösser als die Rechtecksfläche $f_{\min}\cdot h$ und kleiner als die Rechtecksfläche $f_{\max}\cdot h$, wobei $f_{\min}$ das Minimum von f im Intervall $[x,x+h]$ ist und $f_{\max}$ das entsprechende Maximum. Es gilt also

$$\begin{array}{ccccc}
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_{\min}\cdot h}{h} & \leq & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} & \leq & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_{\max}\cdot h}{h}\\
\lim\limits_{h\to 0} f_{\min} & \leq & F'(x) & \leq & \lim\limits_{h\to 0} f_{\max}.
\end{array}$$

Weil f stetig ist, gilt $\lim\limits_{h\to 0} f_{\min}=\lim\limits_{h\to 0} f_{\max}=f(x)$. Und damit ist

$$f(x)\leq F'(x)\leq f(x),$$

also $F'(x)=f(x)$, was zu beweisen war.