

**Definition 67** Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$.

✂ **Aufgabe 491** Bestimmen Sie **alle** möglichen Stammfunktionen von

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \sin(x)$.

✂ **Aufgabe 492** Seien $F(x)$ und $G(x)$ zwei unterschiedliche Stammfunktionen von $f(x)$. Zeigen Sie, dass sich $F(x)$ und $G(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden. *Hinweis: Zeigen Sie, dass $F(x) - G(x)$ nicht von x abhängt, indem Sie ableiten.*

Definition 68 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f nennt man *unbestimmtes Integral* und schreibt dafür

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

und liest «Das Integral von $f(x) dx$ ». C ist eine beliebige reelle Zahl und $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$.

Die Notation \int steht für ein S , was für «Summe» steht. Es handelt sich um eine unendliche Summe unendlich kleiner Rechtecksflächen der Höhe $f(x)$ und der «infinitesimalen» Breite dx .

Man vergleiche mit der Notation $f'(x) = \frac{df}{dx}$, die für eine unendlich kleine Differenz der Funktionswerte geteilt durch eine unendlich kleine Differenz der x -Werte steht.

In der «Nicht-Standard-Analysis» werden den reellen Zahlen sogenannte Infinitesimale hinzugefügt, die grösser als 0, aber kleiner als jede positive reelle Zahl sind. Diese Erweiterung mathematisch sauber zu definieren ist sehr anspruchsvoll und wurde erst vor 60 Jahren erstmals erreicht. Intuitiv wurde diese Sicht aber schon von Leibniz, einem der Pionieren der Differential- und Integralrechnung und «Erfinder» dieser Notation, verwendet. Für diverse physikalische und geometrische Probleme, die mit Integralen formuliert werden können, ist es hilfreich, das Integral als unendliche Summe unendlich kleiner Teile zu betrachten.

Definition 69 Bestimmtes Integral

Für eine stetige Funktion f schreibt man für die Fläche zwischen $x = a$ und $x = b$ mit $b > a$ welche der Graph der Funktion mit der x -Achse einschliesst

$$\int_a^b f(x) dx$$

und nennt es das *bestimmte Integral* der Funktion f von a nach b .

Hinweis: Die Fläche ist vorzeichenbehaftet. Jene unter der x -Achse ist negativ.

Für die Berechnung des konkreten Wertes des bestimmten Integral nehmen wir an, wir hätten die spezielle Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, die uns die Fläche zwischen $t = 0$ und $t = x$ berechnet. Es gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt = F(b) - F(a)$$