Aufgabe 493 Sei $G(x)$ eine andere Stammfunktion von $f(x)$. Zeigen Sie, dass $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ und dass damit obige Formel für alle Stammfunktionen gültig ist.

Satz 7 Hauptsatz der Analysis

Sei $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle $x_0\in[a,b]$ ist

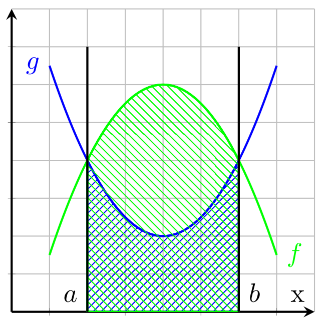
$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von $f(x)$, d.h. $F'(x)=f(x)$.
Weiter gilt für alle Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ und alle $c,d\in[a,b]$

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d)-F(c).$$

Merke Regeln für das bestimmte Integral

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- Wenn $f(x)\geq g(x)$ für alle $x\in[a,b]$, dann ist die eingeschlossene Fläche zwischen f und g gleich $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.



Aufgabe 494 Begründen Sie obige Regeln mit kommentierten Skizzen.

Merke Notation für $F(b)-F(a)$

Der Ausdruck $F(b)-F(a)$ wird wie folgt abgekürzt:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

Aufgabe 495
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^6 2x\,\mathrm{d}x$	b) $\displaystyle\int_1^4 (4-x)\,\mathrm{d}x$	c) $\displaystyle\int_0^8 x^3\,\mathrm{d}x$
d) $\displaystyle\int_{-3}^3 x^2\,\mathrm{d}x$	e) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$	f) $\displaystyle\int_0^3 4\,\mathrm{d}x$
g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$	h) $\displaystyle\int_1^6 2-\sin(x)\,\mathrm{d}x$	i) $\displaystyle\int_{-3}^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x$