



✂ **Aufgabe 499** Man startet eine Bakterien-Kultur in einer Nährschale. Sei  $N(t)$  die Anzahl Bakterien zu jedem Zeitpunkt  $t$ . Am Anfang kann davon ausgegangen werden, dass die Wachstumsrate proportional zur Anzahl Bakterien ist. Die Proportionalitätskonstante sei  $c$  und ist gegeben, z.B. durch die Art der Bakterien und Umgebungsbedingungen. Es gilt die Gleichung

$$N'(t) = c \cdot N(t) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}^+.$$

- Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen  $N(t)$  für die  $N'(t) = N(t)$  gilt.
- Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen  $N(t)$  für die  $N'(t) = c \cdot N(t)$  gilt.
- Was muss z.B. noch gegeben sein, um die Funktion  $N(t)$  vollständig zu bestimmen?

✂ **Aufgabe 500** Eine Tasse Tee kühlt bei  $0^\circ\text{C}$  Umgebungstemperatur ab. Sei  $T(t)$  die Temperatur des Tees zu jedem Zeitpunkt  $t$ . Die Abkühlrate ist proportional zu  $T(t)$ . Je heisser der Tee, desto grösser ist die momentane Abkühlrate. Sei  $c$  die entsprechende Proportionalitätskonstante. Stellen Sie die Differentialgleichung auf (d.h. eine Gleichung die  $T(t)$  und  $T'(t)$  enthält), und finden Sie Lösungen.

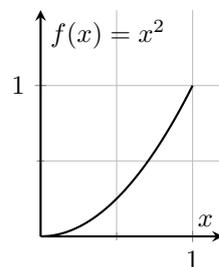
### 25.3 Längen, Flächen und Volumina

✂ **Aufgabe 501** Berechnen Sie die Einheitskreisfläche als bestimmtes Integral.

- Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion  $f(x)$  so, dass deren Graphen dem Viertelkreisbogen im ersten Quadranten entspricht.
- Bestimmen Sie Fläche unter  $f(x)$  und dann damit die Einheitskreisfläche.

✂ **Aufgabe 502** Wie lange ist der Parabelbogen der Funktion  $f(x) = x^2$  von  $x = 0$  bis  $x = 1$ ?

Die Bogenlänge ergibt sich als unendliche Summe aus unendlich kleinen Bogenstückchen. Beispielhaft betrachten wir ein Stückchen bei einem bestimmten  $x$ -Wert (zur Veranschaulichung  $x = 0.5$ ). Das  $dx$  zeichnen wir als Kathete im Stützdreieck in Übergrosse 0.5, das Bogenstückchen wird zu einem Abschnitt auf der Tangente. Berechnen Sie die Länge dieses Tangentenabschnitts. Formen Sie dann so um, dass  $dx$  ein Faktor ist und integrieren Sie dann diesen Ausdruck.



**Merke** Bogenlänge eines Funktionsgraphen

Die Bogenlänge  $L$  einer (stetig differenzierbaren) Funktion  $f(x)$  zwischen  $x = a$  und  $x = b$  beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1} \, dx.$$

✂ **Aufgabe 503** Ziel ist es, das Volumen der Einheitskugel zu berechnen. Dazu zerschneiden wir die Kugel in unendlich viele, unendlich flache Zylinder (d.h. Zylinder der Höhe  $dx$ ) und addieren deren Volumen.

Die Zylinderachsen entsprechen der  $x$ -Achse. Wir betrachten wieder die Funktion  $f(x)$ , deren Graph der oberen Hälfte des Einheitskreises entspricht.

An einer Stelle  $x$  (z.B.  $x = 0.5$  zur Veranschaulichung) zeichnen wir einen Zylinder mit Radius  $f(x)$  und «Höhe»  $dx$  ein.

Bestimmen Sie das Volumen einer solchen «Scheibe» und integrieren Sie dann von Hand, um das Volumen der Einheitskugel zu bestimmen.

Leiten Sie daraus das Volumen einer Kugel mit Radius  $r$  her.