Merke Volumen eines Rotationskörpers

Das Volumen des Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen einer (stetigen) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse rotiert, beträgt

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 504 Berechnen Sie das Volumen eines geraden Kreiskegels als Volumen eines Rotationskörpers.

Aufgabe 505 Ziel ist es, die Oberfläche der Einheitskugel zu bestimmen.
Dazu zerschneiden wir die Kugeloberfläche wieder mit Ebenen senkrecht zur x-Achse. Die entstehenden schiefen Ringe betrachten wir näherungsweise als Rechtecke mit der Länge gleich dem Ringumfang und mit der Breite gleich der angenäherten Ringbreite (Bogenlänge des Funktionsgraphen). Diese Rechtecksflächen werden aufsummiert, um die Kugeloberfläche zu erhalten.

Die schiefen Ringe könnten auch als Mantelflächen von Kegelstümpfen aufgefasst werden. Der Unterschied zur oben vorgeschlagenen Rechtecksfläche ist allerdings von der Ordnung $(\mathrm{d}x)^2$ *und kann daher vernachlässigt werden.*

Merke Oberfläche eines Rotationskörpers

Die Oberfläche eines Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse rotiert, beträgt

$$O = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 506 Ein Torus (wie z.B. ein Veloschlauch) wird durch zwei Grössen charakterisiert: R und r, wobei R der Entfernung von Schlauchmittelpunkt zum Radmittelpunkt entspricht und r dem halben Schlauchdurchmesser.
Berechnen Sie Volumen und Oberfläche eines Torus.

25.4 Standard-Aufgaben

Aufgabe 507 Berechnen Sie vollständig von Hand die eingeschlossene Fläche zwischen den Graphen folgender Funktionen:

a) $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = -5x^2 + 3x + 26$
b) $f(x) = -2x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 3x + 31$
c) $f(x) = -x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 2x + 19$
d) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 - 5x + 7$

Aufgabe 508 Mit Hilfe des TR, skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen für Werte zwischen 0 und 2:
$f(x) = \sqrt{1 - (1-x)^2}$, $\quad g(x) = -3\sqrt{1 - \sqrt{\frac{x}{2}}}$.
Spiegelt man die beiden Graphen an der y-Achse, erhält man eine geschlossene Figur. Berechnen Sie die Fläche dieser Figur.

Aufgabe 509 Ziel ist es, eine «schöne» Vase zu entwerfen. Diese soll als Rotationskörper eines Funktionsgraphen einer Funktion $f(x)$ konzipiert werden. Der Graph soll durch die Punkte $(0, 1)$ und $(6, 2)$ gehen. Die Steigungen der Tangenten in diesen Punkten sollen beide 1 sein. Damit haben wir vier Bedingungen, nämlich $f(0) = 1$, $f(6) = 2$, $f'(0) = 1$ und $f'(6) = 1$.
Als Ansatz sei $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine kubische Funktion. Bestimmen Sie die vier Koeffizienten mit Hilfe obiger Bedingungen.
Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie dann die Oberfläche und das Volumen der so entstehenden Vase. Überprüfen Sie Ihre Resultate, indem Sie mit einem ähnlich grossen Zylinder vergleichen.