



$$d) \int_1^{e^4} \frac{4}{x} dx = 4 \cdot \int_1^{e^4} \frac{1}{x} dx = 4 \ln(x) \Big|_1^{e^4} = 4 \cdot (4 - 0) = 16$$

$$e) \int_1^4 \frac{2}{x^2} dx = 2 \cdot \int_1^4 x^{-2} dx = 2 \cdot (-x^{-1}) \Big|_1^4 = -2 \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f) \int_0^1 \cos(x^2) \cdot 2x dx = \sin(x^2) \Big|_0^1 = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1) \text{ (Hat die Form } f'(g(x)) \cdot g'(x)\text{.)}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 512 ex-repe-komplizierte-integrale-ueberpruefen

Man leitet die Stammfunktion ab und muss den Integranden (das im Integral) erhalten.

$$a) ((x-1) \cdot e^x + C)' = (x \cdot e^x - e^x + C)' = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

$$b) (x \ln(x) - x + C)' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

c)

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C \right)' &= \left( \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot x^2 + C \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} x = x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x = x \cdot \ln(x) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{3} (\cos(x))^3 - \cos(x) + C \right)' &= \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x)) + \sin(x) = (1 - \sin(x)^2) \cdot (-\sin(x)) + \sin(x) = \\ &= -\sin(x) + \sin(x)^3 - \sin(x) = \sin(x)^3 \end{aligned}$$

Man verwendet  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ .

✂ Lösung zu Aufgabe 513 ex-repe-flaeche-zwischen-kurve

a)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$ . Man stellt fest, dass beide Funktionen bei  $\pm \frac{\pi}{2}$  Nullstellen haben. Die Fläche beträgt also

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \cos(x) - x^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) dx = \\ &= \left( \sin(x) - \frac{1}{3} x^3 + \frac{\pi^2}{4} x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8} - \left( -1 + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{8} \right) = 2 + \frac{\pi^3}{6} \end{aligned}$$

b)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $g(x) = \sin(x)$ . Die Cosinus- und Sinuswerte sind gleich bei  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$  oder  $-135^\circ = -\frac{3\pi}{4}$  (plus Vielfache von  $360^\circ = 2\pi$ ). Die gesuchte Fläche ist also:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x) - g(x)) dx &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x)) dx = \\ &= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$