Lösung zu Aufgabe 516 ex-skischanzenvolumen

Um die Funktion zu erhalten, die dem Verlauf der Schanze entspricht, muss die «normale» Sinus-Funktion $\sin(x)$ mit dem Faktor $\frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$ in x-Richtung gestreckt werden: $(\sin\left(\frac{\pi}{10}x\right))$, dann um $+5$ Einheiten in x-Richtung verschoben werden: $(\sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right))$, und noch $+1$ in y-Richtung verschoben werden, also $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right) + 1$.

Die Querschnittsfläche der Schanze ist also:

$$\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} \left(\sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right)+1\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{10}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right)+x\right)\Big|_0^{20} =$$

$$\left(-\frac{10}{\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+20\right) - \left(-\frac{10}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0\right) = \frac{10}{\pi}+20-\left(\frac{10}{\pi}+0\right) = 20\,[\mathrm{m}^2]$$

Damit ist das Volumen $5\cdot 20 = 100\,[\mathrm{m}^3]$.

Bei einer geschätzten Schneedichte von $200\,\mathrm{kg/m^3}$ wiegt die Schanze 20 Tonnen.

Zusatzaufgabe: Bei einer horizontalen Geschwindigkeit von v [m/s] im freien Fall gilt: $x = vt$ und $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Aus der ersten Gleichung folgt $t = \frac{x}{v}$. Eingesetzt in die zweite Gleichung: $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 = -\frac{g}{2v^2}x^2$. Die zweite Ableitung davon ist $y'' = -\frac{g}{v^2}$.

Die Zweite Ableitung der Schanzenkurve ist

$$f''(x) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right)$$

Im höchsten Punkt ist $f''(10) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2$

Damit haben wir eine Gleichung für die Grenzgeschwindigkeit v:

$$\begin{aligned} -\frac{g}{v^2} &= -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \\ \frac{v^2}{g} &= \frac{100}{\pi^2} \\ v^2 &= \frac{100g}{\pi^2} \\ v &= \pm\frac{10\sqrt{g}}{\pi} \approx 9.970\,[\mathrm{m/s}] \end{aligned}$$

Das entspricht knapp $36\,\mathrm{km/h}$.

Lösung zu Aufgabe 517 ex-konstante-leistung-beschleunigen

Die Energiezunahme ist bei konstanter Leistung linear zunehmend. D.h. $E(t) = P\cdot t$, wobei P hier gerade die Leistung ist. Und ja, die Energie ist das Integral über die Leistung, bzw. die Leistung ist die Ableitung der Energie.

Damit die kinetische Energie eine lineare Funktion ist, muss die Geschwindigkeitsfunktion, die im Quadrat erscheint, eine Wurzelfunktion sein, d.h. $v(t) = c\cdot\sqrt{t}$, wobei c eine Konstante ist, die von der Leistung und der Masse abhängig ist.

Die Beschleunigungsfunktion ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion, also $a(t) = c\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Für $t = 0$ ist die Beschleunigungsfunktion gar nicht definiert (bzw. unendlich gross). Für sehr kleine t ist die Beschleunigung sehr gross, und damit auch die Kraft, die auf den Fahrer wirkt.

D.h. für eine sehr kurze Zeit wirkt plötzlich eine sehr grosse Kraft auf den Fahrer, was als Schlag (oder Tritt in den Allerwertesten) empfunden wird. Das deckt sich mit den Aussagen von Test-Fahrern.