$$\begin{aligned} 4\pi r &= \frac{2}{r^2} && \mid \cdot r^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \text{ mit } r \neq 0 \\ r^3 &= \frac{1}{2\pi} && \mid \sqrt[3]{\cdot} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0.542 \end{aligned}$$

Daraus folgt $h = 2r \approx 1.084$ und $O(r) \approx 5.536$.

Lösung zu Aufgabe 428 ex-abstand-punkt-parabel

Sei $(x, f(x))$ ein Punkt auf der Kurve. Der Abstand vom Ursprung ist damit
$A(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$
Von dieser Funktion suchen wir das Minimum. Wir können anstelle von $A(x)$ auch $B(x) = (A(x))^2$ betrachten.
Vorgehen: Extremalstellen bestimmen durch Lösen der Gleichung $B'(x) = 0$. Dann mit $B''(x)$ die Art der Extrema bestimmen und dann das absolute Minimum bestimmen.

a) $B(x) = x^2 + \left(\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1\right)^2$

$B'(x) = 0$ liefert $x \approx -1.1523$. Eingesetzt in $B''(x)$ ergibt sich ungefähr 6.156, wir haben also ein Minimum gefunden.

Der effektive Abstand ist also $\sqrt{B(x)} \approx 1.782$.

b) $B'(x) = 0$ liefert $x \approx 0.356$, mit $B''(x) \approx 3.311$ und $A(x) \approx 1.160$.

c) $B'(x) = 0$ liefert für $x \approx \{-0.6730, 1.203, 2.470\}$ mit $B''(x) \approx \{23.59, -9.504, 15.92\}$. Wir haben also zwei lokale Minima. Wir werten also für den ersten und letzten Wert von x die Funktion $A(x)$ aus und erhalten $A(x) \approx \{0.7024, 2.609\}$, wovon das Minimum 0.7024 die gesuchte Distanz ist.

d) $B'(x) = 0$ liefert $\{-0.8892, 0.6446, 1.745\}$ Die gesuchte Distanz ist ≈ 0.9451.

Lösung zu Aufgabe 429 ex-extremalaufgaben-repetitorium

a) b : Breite des Quaders, a : Länge, c : Höhe (jeweils in cm). Volumen des Quaders $V = abc$ (in cm^3).

Nebenbedingungen: $a = 4b$ und $4a + 4b + 4c = 180$ (in cm) $\Rightarrow c = 45–5b$

Zielfunktion: $V(b) = 4b \cdot b \cdot (45–5b) = 180b^2–20b^3$ (in cm^3).

Extremum: $V'(b) = 0 \Rightarrow b = 6$ (Kontrolle, ob Maximum durch V')

Die Kanten müssen $a = 24$ cm, $b = 6$ cm, $c = 15$ cm gewählt werden. Das maximale Volumen beträgt dann 2160 cm^3.

b) x : Höhe des Parallelogramms, r : Länge

Fläche des Parallelogramme $A = x \cdot r$

Nebenbedingung: ganzes Dreieck und Restdreieck über dem Parallelogramm sind ähnlich Es gilt daher: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7 - x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} \Rightarrow r = \frac{1}{3}\left(21 - 2\sqrt{3}x\right)$.

Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{3}x\left(21 - 2\sqrt{3}x\right)$.

Extremum: $A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ (Kontrolle, ob Maximum durch A'')

Das Parallelogramm hat die Länge $r = \frac{7}{2}$ cm, die Höhe $h = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm und die maximale Fläche $A = \frac{49\sqrt{3}}{8}$ cm^2.