



### 3 Exponenten in $\mathbb{Z}$

**Aufgabe 23** Benutzen Sie das Potenzgesetz  $\frac{a^e}{a^f} = a^{e-f}$  um herauszufinden, wie  $a^{-1}$  und  $a^{-n}$  (für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}^*$ ) definiert werden müssen, damit die Potenzgesetze weiterhin gültig bleiben (Permanenzprinzip).



**Merke**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Alle Potenzgesetze bleiben auch für negative Exponenten erhalten!

**Aufgabe 24** Schreiben Sie als vollständig gekürzten Bruch (oder ganze Zahl).

- a)  $10^{-3}$       b)  $(0.25)^{-3}$       c)  $4^{-5}$       d)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$       e)  $\frac{(2^{-2}3^4)^3}{(2^33^{-5})^{-3}}$   
 f)  $(-1)^{-123}$       g)  $(-2)^{-2}$

#### 3.1 Wissenschaftliche Darstellung<sup>1</sup>

Sehr grosse und sehr kleine Zahlen werden in den Naturwissenschaften mit Hilfe von *Zehnerpotenzen* oder *Vorsätzen* geschrieben.

Entfernung Erde-Sonne  $\approx$  149 600 000 000 m

Entfernung zum nächsten Stern (Proxima Centauri) 4.2 Lichtjahre:  $\approx$  40 Billionen km

Masse eines Elektrons  $\approx$  0.000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg

Diese Schreibweise gibt zudem einen *Hinweis auf die Genauigkeit* der Angaben. (Für die Beispiele gilt: Entfernung Erde-Sonne 4-stellige Genauigkeit, Entfernung Erde-Sirius 1-stellige Genauigkeit und Masse des Elektrons 3-stellige Genauigkeit.)

Faktor	Vorsatz	Abk.	Beispiel
$10^{22}$	Yotta-	Y	$3.2 \cdot 10^{24}$ m = 3.2 Ym ( <b>Yottameter</b> )
$10^{21}$	Zetta-	Z	$3.2 \cdot 10^{21}$ m = 3.2 Zm ( <b>Zettameter</b> )
$10^{18}$	Exa-	E	$3.2 \cdot 10^{18}$ m = 3.2 Em ( <b>Exameter</b> )
$10^{15}$	Peta-	P	$3.2 \cdot 10^{15}$ m = 3.2 Pm ( <b>Petameter</b> )
$10^{12}$	Tera-	T	$3.2 \cdot 10^{12}$ m = 3.2 Tm ( <b>Terameter</b> )
$10^9$	Giga-	G	$3.2 \cdot 10^9$ m = 3.2 Gm ( <b>Gigameter</b> )
$10^6$	Mega-	M	$3.2 \cdot 10^6$ m = 3.2 Mm ( <b>Megameter</b> )
$10^3$	Kilo-	k	$3.2 \cdot 10^3$ m = 3.2 km ( <b>Kilometer</b> )
$10^2$	Hekto-	h	$3.2 \cdot 10^2$ m = 3.2 hm ( <b>Hektometer</b> )
$10^1$	Deka-	da	$3.2 \cdot 10^1$ m = 3.2 dam ( <b>Dekameter</b> )
$10^{-1}$	Dezi-	d	$3.2 \cdot 10^{-1}$ m = 3.2 dm ( <b>Dezimeter</b> )
$10^{-2}$	Centi-	c	$3.2 \cdot 10^{-2}$ m = 3.2 cm ( <b>Centimeter</b> )
$10^{-3}$	Milli-	m	$3.2 \cdot 10^{-3}$ m = 3.2 mm ( <b>Millimeter</b> )
$10^{-6}$	Mikro-	$\mu$	$3.2 \cdot 10^{-6}$ m = 3.2 $\mu$ m ( <b>Mikrometer</b> )
$10^{-9}$	Nano-	n	$3.2 \cdot 10^{-9}$ m = 3.2 nm ( <b>Nanometer</b> )
$10^{-12}$	Pico-	p	$3.2 \cdot 10^{-12}$ m = 3.2 pm ( <b>Picometer</b> )

(In den USA werden die -iarden nicht verwendet, d.h. die Amerikaner zählen one million=  $10^6$ , one billion=  $10^9$ , one trillion=  $10^{12}$ , ...)

<sup>1</sup>Dieser Abschnitt basiert zum grossen Teil auf Unterrichtsunterlagen diverser Autoren der Kantonsschule am Burggraben.

**Merke**

Eine Kommaverschiebung um  $n$  Stellen nach rechts (bzw. nach links) wird durch den Faktor  $10^{-n}$  (bzw.  $10^n$ ) ausgeglichen!

**Aufgabe 25** Schreibe mit Hilfe von Zehnerpotenzen:

- a) 100 Billionen Euro                      b) 3 Tausendstel                      c) 4 Hundertmillionstel  
d) 7 Zehnbillionstel

**Aufgabe 26** Schreibe als Dezimalzahl:

- a)  $10^{-4}$    b)  $2.99792458 \cdot 10^8$    c)  $22.4141 \cdot 10^{-3}$    d)  $1013.25 \cdot 10^{-2}$

**Aufgabe 27** Schreibe die Grösse mit Hilfe der in Klammern angegebenen Vorsätze:

- a) Dicke des menschlichen Haares  $70 \mu\text{m}$  (mm;m)  
b) Durchmesser von Atomen  $100 \text{ pm}$  (nm;m)

**Aufgabe 28** Rechne die folgenden Grössen um:

- a) 1 Liter =                       $\text{cm}^3$    b)  $10 \text{ mm}^2 =$                        $\text{km}^2$    c)  $1 \text{ kg/m}^3 =$                        $\text{g/dm}^3$

**Aufgabe 29** Stimmt die folgende Faustregel: 1 Jahr dauert rund  $10\pi$  Megasekunden? Um wieviel weicht der Wert der Faustregel vom korrekten Wert ab?

**Aufgabe 30** Vereinfachen Sie soweit wie möglich, schreiben Sie den Ausdruck als Bruch ohne negative Exponenten und ohne negative Basen. Die Potenzen sollen nicht ausgerechnet werden.

- a)  $5^{-4} \cdot 5^{-6}$                       b)  $0.6^{-10} \cdot (-0.6)^8$                       c)  $c^{-2}/c^{-5}$                       d)  $b^{n+1}/(-b)^{-3}$   
e)  $12^{-2x}/4^{-2x}$                       f)  $(3^{-2})^{-3}$                       g)  $(-b^0)^{2m-1}$  mit  $m \in \mathbb{Z}$

**Aufgabe 31** Vereinfachen Sie

- a)  $(10a^{-3}/(2a^{-5})) \cdot 2a^{-3}$                       b)  $\left(\frac{x}{3}\right)^{-2} / \left(\frac{x}{6}\right)^{-3} =$                       c)  $3^{-4x} - (9^{-x})^2$   
d)  $(a-b)^{10} \cdot (b-a)^{10}$

**Aufgabe 32** Für welche  $x \in \mathbb{Z}$  gilt:

- a)  $2^x = 8^{-4}$                       b)  $4^x = 8^{-10}$

*Hinweis: Schreiben Sie die Potenzen der Gleichungen jeweils so um, dass auf beiden Seiten die gleiche Basis steht.*

### 3.2 Prefixe in der Informatik

In der Informatik sind die Prefixe k, M, G, T, etc. nicht eindeutig definiert. Oft werden für k  $2^{10}$ , für M  $2^{20}$ , für G  $2^{30}$  und T  $2^{40}$  verwendet. Um eindeutig die Zweierpotenzen zu kennzeichnen, werden Ki, Mi, Gi, Ti, etc. verwendet. Das 'i' kommt von binary, bzw. binär.

**Aufgabe 33** Festplatten- und Speichermedienhersteller verwenden praktisch immer die dezimalen Prefixe (also mit Basis 10). Warum wohl?

**Aufgabe 34** Auf dem Computer werden Datenspeicher- und Dateigrössen praktisch immer mit binären Prefixen angezeigt (ohne aber die Prefixe Ki, Mi, Gi, Ti, etc. zu verwenden).

a) Wie viele Bytes gross ist eine Datei, für deren Grösse genau 1GB (1GiB) angezeigt wird? Geben Sie das Resultat in Exponentialschreibweise mit einer Genauigkeit von 4 Stellen an.

b) Wie gross wird dann die Kapazität einer 2TB (2 Terabytes) grossen Festplatte angezeigt? *Man vernachlässige Kapazitätsverluste, die durch Verwaltungsinformation entstehen.*



### 3.3 Prüfungsvorbereitung

**Aufgabe 35** Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat als Produkt von Potenzen, ohne Bruchstriche und Divisionen.

$$\text{a) } \frac{1}{4} \quad \text{b) } \frac{a^2}{a^{-1}b^3} \quad \text{c) } \frac{1}{a+b} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \text{d) } \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2 \cdot b} \cdot b^a}{a \cdot (a^b \cdot b^{-a})^b \cdot a^{-2 \cdot b}}$$

**Aufgabe 36** Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat ohne negative Exponenten mit höchstens einem Bruchstrich (und ohne Divisionszeichen).

$$\text{a) } x^{-1} \quad \text{b) } 4^{-7} \cdot 2^{13} \quad \text{c) } \left( \frac{x^{-2}}{y^{-3}} \right)^{-2} \cdot \left( \frac{y^{-2}}{x^{-3}} \right)^{-3} \quad \text{d) } \frac{\frac{12^{-7}}{35^{-8}}}{\frac{30^{-5}}{28^{-6}}} \cdot \left( \frac{7}{3} \right)^{-2} \cdot \left( \frac{5}{4} \right)^{-12}$$

**Aufgabe 37** Beweisen Sie, dass  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

Hinweis: Anstatt gerade/ungerade, untersuchen Sie die Teilbarkeit durch 3.

**Aufgabe 38** Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie. Für falsche Aussagen, finden Sie eine kleine Korrektur, um daraus eine wahre Aussage zu machen.

- Die Differenz zweier Zahlen in  $\mathbb{N}$  ist auf jeden Fall wieder in  $\mathbb{N}$ .
- Das Produkt zweier Zahlen in  $\mathbb{Z}$  ist auf jeden Fall wieder in  $\mathbb{Z}$ .
- Der Quotient zweier Zahlen in  $\mathbb{Q}$  ist auf jeden Fall wieder in  $\mathbb{Q}$ .
- Es gibt irrationale Zahlen (d.h. Zahlen in  $\mathbb{R}$  die nicht in  $\mathbb{Q}$  sind), deren Produkt in  $\mathbb{N}$  ist.
- Die Summe einer irrationalen Zahl (in  $\mathbb{R}$  aber nicht in  $\mathbb{Q}$ ) und einer rationalen Zahl (in  $\mathbb{Q}$ ) ist immer irrational.
- Abbrechende Dezimalbrüche sind immer rational.
- Jede rationale Zahl kann als Quotient zweier natürlichen Zahlen geschrieben werden.
- Jede irrationale Zahl kann beliebig genau durch eine natürliche Zahl angenähert werden.

**Aufgabe 39** Man stelle sich ein unendliches grosses, kariertes Papier vor. Zeigen Sie, dass man sämtliche Häuschen mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, etc. durchnummerieren kann.

**Aufgabe 40** Beschreiben Sie kurz, welchen Punkten auf der Zahlengeraden die Zahlen in  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}$  entsprechen.

### 3.4 Weitere Aufgaben

**Aufgabe 41** Ein gedachter Computer speichert Zahlen wie folgt im Zehnersystem: Er speichert 5 Ziffern und einen maximal zweistelligen Exponenten mit Vorzeichen.

Für die Zahl 123.4 werden die Ziffern 1,2,3,4,0 und der Exponent +2 gespeichert, weil  $123.4 = 1.2340 \cdot 10^{+2}$ . Für die Zahl 0.0043 werden die Ziffern 4,3,0,0,0 und der Exponent -3 gespeichert, weil  $0.0043 = 4.3000 \cdot 10^{-3}$ .

- Wie werden folgende Zahlen gespeichert: 1'234'567, 0.00098765432 und  $\frac{1}{3}$ ?
- Beim Addieren zweier Zahlen werden zuerst die Exponenten durch Vergrössern angeglichen und dann die Ziffern addiert. Was ist also das Resultat von  $1000 + 1/3$  für diesen Computer? Was ist das Resultat von  $1000 + 1/3 - 1000$ ?

**Aufgabe 42** Wandeln Sie vom Zweiersystem (Binärsystem) ins Zehnersystem um:

$$\text{a) } 1001_2 \quad \text{b) } 1000'0000_2 \quad \text{c) } 1111'1111_2 \quad \text{d) } 10'0100_2$$

**Aufgabe 43** Wandeln Sie vom Zehnersystem ins Zweiersystem um:

$$\text{a) } 76 \quad \text{b) } 512 \quad \text{c) } 123 \quad \text{d) } 21$$

**Aufgabe 44**

- Wie erkennt man bei einer Zahl im Zweiersystem, ob diese durch zwei teilbar ist oder nicht?
- Was passiert mit einer Zahl im Zweiersystem, wenn man diese mit 2 multipliziert (bzw. durch 2 dividiert)?

**Aufgabe 45**

$$\text{a) } \frac{a^{-b}}{a^{-c}} \cdot a^c \quad \text{b) } \frac{\frac{3^{-2}}{3^{-3}}}{\frac{3^{-4}}{3^{-5}}} \quad \text{c) } 320^5 \cdot (4^2)^{-3^2} \cdot ((-5)^{-3})^4 \quad \text{d) } \left(\frac{7}{5} + \frac{3}{7}\right)^{-4} \cdot (-32)^5 \cdot \frac{5^{-5}}{(-7)^3}$$

**Aufgabe 46**

$$\text{a) } \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{b) } a^{-2} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^2 \quad \text{c) } \left(\left(\left(a^{-1} \cdot b\right)^{-1} \cdot c\right)^{-1} \cdot d\right)^{-1} \quad \text{d) } \frac{1}{a^{-1}} \cdot (a^{-1})^{-2}$$

**Aufgabe 47**

$$\text{a) } \frac{\frac{x^{-y}y^y}{x^{2x} \cdot (x^x y^{-y})^{-3}}}{(x^{-2})^y y^{-5}} \quad \text{b) } \frac{(-77)^{-3} \cdot -45^{-5}}{(-63^2 \cdot (-55)^2)^{-2}} \cdot \left((-2)^4 - 5^{2^0}\right)^{-2} \quad \text{c) } (-1)^{3^{6^{12}}} \cdot (-1)^{4^{8^{16}}}$$

**Aufgabe 48** Lösen Sie nach  $x$  auf:

$$\text{a) } 2^x \cdot 4^{2x} = 64^{21} \cdot 2^{2x} \quad \text{b) } 9^{3x} = 27^{4x} \cdot 9^9$$

**Aufgabe 45**

$$\text{a) } \frac{a^{-b}}{a^{-c}} \cdot a^c \quad \text{b) } \frac{\frac{3^{-2}}{3^{-3}}}{\frac{3^{-4}}{3^{-5}}} \quad \text{c) } 320^5 \cdot (4^2)^{-3^2} \cdot ((-5)^{-3})^4 \quad \text{d) } \left(\frac{7}{5} + \frac{3}{7}\right)^{-4} \cdot (-32)^5 \cdot \frac{5^{-5}}{(-7)^3}$$

**Aufgabe 46**

$$\text{a) } \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{b) } a^{-2} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^2 \quad \text{c) } \left(\left(\left(a^{-1} \cdot b\right)^{-1} \cdot c\right)^{-1} \cdot d\right)^{-1} \quad \text{d) } \frac{1}{a^{-1}} \cdot (a^{-1})^{-2}$$

**Aufgabe 47**

$$\text{a) } \frac{\frac{x^{-y}y^y}{x^{2x} \cdot (x^x y^{-y})^{-3}}}{(x^{-2})^y y^{-5}} \quad \text{b) } \frac{(-77)^{-3} \cdot -45^{-5}}{(-63^2 \cdot (-55)^2)^{-2}} \cdot \left((-2)^4 - 5^{2^0}\right)^{-2} \quad \text{c) } (-1)^{3^{6^{12}}} \cdot (-1)^{4^{8^{16}}}$$

**Aufgabe 48** Lösen Sie nach  $x$  auf:

$$\text{a) } 2^x \cdot 4^{2x} = 64^{21} \cdot 2^{2x} \quad \text{b) } 9^{3x} = 27^{4x} \cdot 9^9$$

**Aufgabe 45**

$$\text{a) } \frac{a^{-b}}{a^{-c}} \cdot a^c \quad \text{b) } \frac{\frac{3^{-2}}{3^{-3}}}{\frac{3^{-4}}{3^{-5}}} \quad \text{c) } 320^5 \cdot (4^2)^{-3^2} \cdot ((-5)^{-3})^4 \quad \text{d) } \left(\frac{7}{5} + \frac{3}{7}\right)^{-4} \cdot (-32)^5 \cdot \frac{5^{-5}}{(-7)^3}$$

**Aufgabe 46**

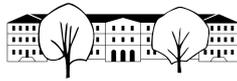
$$\text{a) } \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{b) } a^{-2} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^2 \quad \text{c) } \left(\left(\left(a^{-1} \cdot b\right)^{-1} \cdot c\right)^{-1} \cdot d\right)^{-1} \quad \text{d) } \frac{1}{a^{-1}} \cdot (a^{-1})^{-2}$$

**Aufgabe 47**

$$\text{a) } \frac{\frac{x^{-y}y^y}{x^{2x} \cdot (x^x y^{-y})^{-3}}}{(x^{-2})^y y^{-5}} \quad \text{b) } \frac{(-77)^{-3} \cdot -45^{-5}}{(-63^2 \cdot (-55)^2)^{-2}} \cdot \left((-2)^4 - 5^{2^0}\right)^{-2} \quad \text{c) } (-1)^{3^{6^{12}}} \cdot (-1)^{4^{8^{16}}}$$

**Aufgabe 48** Lösen Sie nach  $x$  auf:

$$\text{a) } 2^x \cdot 4^{2x} = 64^{21} \cdot 2^{2x} \quad \text{b) } 9^{3x} = 27^{4x} \cdot 9^9$$



### 3.5 Lösungen zu Aufgaben 45 bis 48

Ohne Gewähr für die Richtigkeit der Lösungen.

$$45a) a^{-b+2c} \quad 45b) 1 \quad 45c) 2^{-6} \cdot 5^{-7} = \frac{1}{2^6 \cdot 5^7} = 2 \cdot 10^{-7} \quad 45d) \frac{14}{5}$$

$$46a) \frac{1}{b^2} = b^{-2} \quad 46b) 1 \quad 46c) \frac{ac}{bd} = acb^{-1}d^{-1} \quad 46d) a^3$$

$$47a) x^{x+y}y^{5-2y} \quad 47b) \frac{35}{99} \quad 47c) -1$$

$$48a) x = 42 \quad 48b) x = -3$$