4 Planimetrie Grundlagen

Die Planimetrie ist die Lehre der in der Ebene liegenden Figuren. Die Ebene wird als eine **Menge von Punkten** aufgefasst.

4.1 Definitionen und Notationen

Beachten Sie, dass die Notationen in der Geometrie nicht standardisiert sind. In verschiedenen Lehrmitteln werden verschiedene Notationen verwendet.
Wir definieren folgende Notationen für Objekte in der Ebene:

P	**Punkt** (ohne Ausdehnung, bezeichnet mit grossen Buchstaben)
g	**Gerade** (beidseitig unbegrenzt, bezeichnet mit kleinen Buchstaben) Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade! Eine Gerade ist eine Menge von Punkten.
$A \in g$	Der Punkt A liegt auf der Geraden g. D.h. A ist Element der Punktemenge g.
$B \notin g$	Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden g. D.h. B ist nicht Element von g.
AB	**Gerade** durch die Punkte A und B. Z.B. $g = AB$
$[AB]$	**Strecke** zwischen A und B, inklusive der Punkte A und B.
$[AB$	**Halbgerade**, die beim Punkt A beginnt und sich durch B ins Unendliche erstreckt.
$\overline{AB}$	**Länge** der Strecke $[AB]$ (gemessen als Vielfachens einer definierten Einheitslänge).
$\overline{Pg}$	**Abstand** von P zu g, definiert als die kürzeste Entfernung von P zu einem Punkt auf g.
$g \parallel h$	Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, heissen **parallele** Geraden. Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es genau eine Parallele p durch den Punkt P.
$S = g \cap h$	**Schnittpunkt** S der Geraden g und h.
$g \cap h = \varnothing$	g und h **schneiden sich nicht** (also $g \parallel h$). Das Symbol $\varnothing$ ist **leere Menge**.
$g = h$	Die beiden Geraden g und h sind **identisch**. *Manchmal werden identische Geraden ebenfalls als parallel betrachtet.*
$\alpha = \sphericalangle ASB$	**Winkel** mit **Scheitel** S und **Schenkeln** $[SA$ und $[SB$. Vorläufig gilt: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSA$ und damit $0^\circ \leq \sphericalangle ASB \leq 180^\circ$. Bezeichnung mit kleinen griechischen Buchstaben: z.B. α, β, γ, δ, ε, φ, ω.
$\sphericalangle(g, h)$	**Winkel** zwischen g und h. Vorläufig gilt $\sphericalangle(g,h) = \sphericalangle(h,g)$ und damit $0^\circ \leq \sphericalangle(g,h) \leq 90^\circ$
$g \perp h$	$\sphericalangle(g,h) = 90^\circ$.
m_{AB}	**Mittelsenkrechte** zu den Punkten A, B.
M_{AB}	**Mittelpunkt** der Strecke $[AB]$.
$k = k(M, r)$	**Kreis** k mit Mittelpunkt M und Radius r.
w_{gh}	**Winkelhalbierende** zu den Geraden g, h.
w_{gh}^1, w_{gh}^2	**Winkelhalbierendenpaar** zu den Geraden g, h. Beachten Sie, dass $w_{gh}^1 \perp w_{gh}^2$.

4.2 Grundkonstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

m_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. Wähle $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ $\to r$ 2. $k(A,r)$ $\to k_1$ 3. $k(B,r)$ $\to k_2$ 4. $k_1 \cap k_2$ $\to P_1, P_2$ 5. P_1P_2 $\to m_{AB}$
M_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. $AB \cap m_{AB}$ $\to M_{AB}$
Senkrechte (Lot) p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck $\to p$ **oder** 1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\to r$ 2. $k(P,r) \cap g$ $\to A, B$ 3. m_{AB} $\to p$
Parallele p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Verschiebung mit Geodreieck $\to p$ **oder** 1. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 2. Senkrechte zu h durch P $\to p$
w_{gh}, bzw. w_{gh}^1 und w_{gh}^2	**Gegeben:** Sich schneidende Geraden g, h. 1. $g \cap h$ $\to S$ 2. Wähle einen Radius $\to r_1$ 3. $k(S, r_1)$ $\to k$ 4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\to G$, H 5. m_{gh} $\to w_{gh}$, bzw. w_{gh}^1 6. Optional: Rechtwinklige zu w_{gh}^1 durch S $\to w_{gh}^2$
Parallelen p_1, p_2 zu g mit gegebenem Abstand d	**Gegeben:** Gerade g, Länge d. 1. Wähle $P \in g$ $\to P$ 2. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 3. $k(P,d) \cap h$ $\to H_1$, H_2 4. Parallelen zu g druch H_1, H_2 $\to p_1$, p_2
Winkel α übertragen	**Gegeben:** Winkel α, Scheitel S, Schenkel g, h, Halbgerade $i = [AB$ 1. Wähle einen Radius $\to r$ 2. $k(S,r)$, $k(A,r)$ $\to k_1$, k_2 3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\to G$, H 4. $k_2 \cap i$ $\to I$ 5. $k(I, \overline{GH}) \cap k_2$ $\to J_1$, J_2 6. Übertragener Winkel α $\to \sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$

Aufgabe 49 Konstruieren Sie obige Grundkonstruktionen.

Aufgabe 50
Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes P zu einer Geraden g.

Aufgabe 51 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

Aufgabe 52
Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe 53
Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCD$ nach folgender Konstruktionsbeschreibung:
Gegeben: Punkt Z, Radius r, Umkreis $k = k(Z, r)$.

1.	Wähle $A \in k$	$\to A$
2.	Rechtwinklige zu ZA durch Z	$\to g$
3.	$k \cap g$	$\to G$
4.	$k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$	$\to F$
5.	$\overline{AF}$ von A aus auf k 4 mal abtragen	$\to B$, C, D, E

Aufgabe 54 "Übersetzen" und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung zur "*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*" zu finden im Wikipedia-Artikel "Fünfeck" (`https://de.wikipedia.org/wiki/F%C3%BCnfeck`) in die hier vorgestellte Kurzschreibweise für Konstruktionsbeschreibungen.

4.3 Koordinatensystem

Um ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) O (der Buchstabe 'O').
- Eine Einheitslänge.
- Eine Richtung für die erste Achse (x-Achse).

Die letzten zwei Dinge können z.B. durch die Wahl eines weiteren Punkts X festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\overline{OX}$. Normalerweise erhält man die y-Achse durch eine Drehung der x-Achse um 90° im **Gegenuhrzeigersinn**. Die x-Achse OX wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die y-Achse nach oben eingezeichnet.

Aufgabe 55 Zeichnen Sie auf karriertem Papier ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in der Blattmitte, Einheit 2 Häuschen und x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben. Zeichnen Sie (in der gegebenen Reihenfolge) folgende Objekte ein:
a) Punkte $A = (8, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (-4, -4)$.
b) Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}.
c) Schnittpunkt $D = m_{AB} \cap m_{BC}$. Schätzen Sie die Koordinaten von D ab.
d) Strecke AB, Angabe der Länge $\ell = \overline{AB}$ (in Einheitslängen!).
e) Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$. Was stellen Sie fest? Können Sie Ihre Feststellung beweisen?
f) $E = M_{AD}$ und $k_2 = k(E, \overline{EA})$.
g) Messen Sie die Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle BCA$. Berechnen Sie deren Summe. Was sollte das Ergebnis sein? Warum ist dem eher nicht so?
h) Strecken $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
i) $F = m_{AB} \cap c$. Gilt $F \in k_2$? Ist das Zufall oder können Sie das beweisen?
j) Ist $\overline{DF} = \overline{AF}$? Gilt das auch, wenn man die Punkte A, B, C etwas anders wählt?

4.4 Geometrische Örter

Ein **Geometrischer Ort** ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte Eigenschaft haben, bzw. eine bestimmte Bedingung erfüllen. In der konstruktiven Geometrie sind geometrische Örter normalerweise Geraden oder Kreise.

4.4.1 Geometrische Örter der konstruktiven Geometrie

m_{AB}	Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$. m_{AB} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$. Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$
✎ $k(M, r)$	Gegeben sind ein Punkt M und eine Länge r. ✎ $k(M, r)$ ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{MP} = r$. Kurz: ✎ $k(M, r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$
✎ Winkelhalbierendenpaar w_{gh}	Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$. ✎ w_{gh} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $w_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
✎ Mittelparallele m_{gh}	Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$. ✎ m_{gh} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $m_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
Parallelenpaar zu g im Abstand d	✎ Gegeben: Gerade g, Länge d Kurz:$\{P \mid \overline{Pg} = d\}$

Geometrische Örter werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

Beispiel: Gegeben sind zwei Punkte A, B mit $\overline{AB} = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt C mit $\overline{AC} = b = 4$ und $\overline{BC} = a = 3$.

1. $k(A, b)$ $\rightarrow k_1$: 1.g.O.f. C *Erster geometrischer Ort für C*
2. $k(B, a)$ $\rightarrow k_2$: 2.g.O.f. C
3. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow C_1$, C_2

Der Punkt C muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man alle Punkte konstruiert, die eine Bedingung erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Örter. Der Schnitt dieser Örter ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 56 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch C gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP}$ und $\overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC}$ und $\overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

Aufgabe 57 Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

Aufgabe 58 Gegeben sind die Geraden g durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele h zu g durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch P gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

Aufgabe 59 Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die g in G_1 berühren und durch A gehen.

Aufgabe 60 Gegeben sind der Kreis $k = k(M, r_1)$ mir $M = (1, -1)$ und $r_1 = 3$, die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius $r_2 = 1.5$, die k und g berühren.

b*) Welche Anzahl Lösungen sind möglich, je nach Wahl der Lage und Grössen der gegebenen Objekte?

Aufgabe 61 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit 1 Einheit nach unten und 7 Einheiten nach oben.

Gegeben ist $B = (0, 2)$ und ℓ (die x-Achse). Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB} = \overline{P\ell} = d$ für alle halbzahligen Werte von d von 1 bis und mit 6.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

Aufgabe 62 Gegeben sind $B_1 = (-4, 0)$ und $B_2 = (4, 0)$. Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10$ und $\overline{PB_1} = d$ für alle ganzzahligen Werte von d von 1 bis und mit 9.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10\}$.

Mit welchen Hilfsmitteln könnte man diese Punktemenge relativ einfach zeichnen?

Aufgabe 63 Sie stehen auf dem Punkt $P = (-2, -1)$, die Strecke $[AB]$ mit $A = (-3, 0)$ und $B = (3, 0)$ ist eine unüberwindbare Mauer. Welche Punkte hinter der Mauer (d.h. oberhalb der Geraden AB) haben die Eigenschaft, dass sie von P gleich weit entfernt sind, egal, ob man die Mauer bei A oder B umgeht?

Wählen Sie das Koordinatensystem mit mindestens 2 Einheiten nach unten und 6 Einheiten nach oben.

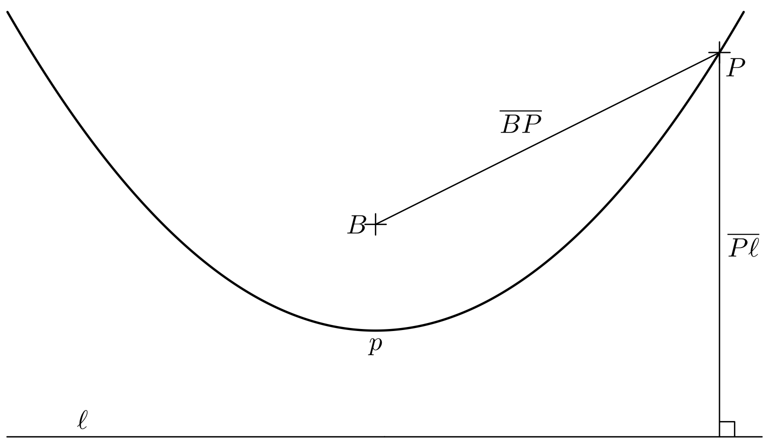
a) Konstruieren Sie den Punkt X auf $[AB]$ der die obige Eigenschaft hat.

b) Konstruieren Sie mindestens 5 weitere Punkte oberhalb der Geraden AB mit der obigen Eigenschaft.

Merke

✎ Eine Parabel p ist der geometrische Ort aller Punkte P, die zu einer gegebenen Gerade ℓ (*Leitlinie*) und einem Punkt B (*Brennpunkt*) den gleichen Abstand haben.
$p = \{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

Eine Parabel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die senkrecht zur Leitlinie einfallen, alle zum Brennpunkt reflektiert werden. Dreht man eine Parabel um ihre Symmetrieachse, entsteht ein Paraboloid. Parabolantennen (Satellitenschüsseln) sind Paraboloide mit der Antenne im Brennpunkt.

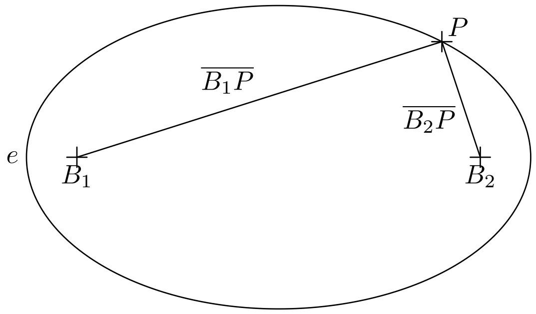


Merke

✎ Eine Ellipse e ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von zwei gegebenen Punkten B_1 und B_2 (Brennpunkte) eine konstante Abstandssumme d haben ($d > \overline{B_1B_2}$).
$e = \{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$.

Eine Ellipse hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, auf den anderen Brennpunkt reflektiert werden.

Planetenumlaufbahnen sind in sehr guter Näherung ebenfalls Ellipsen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht).

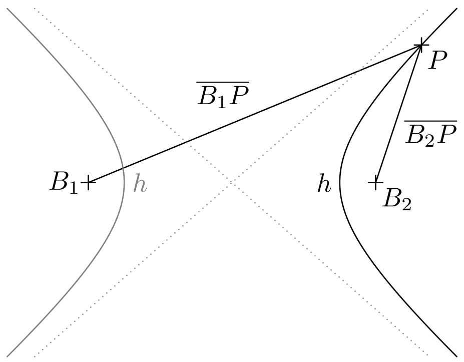


Merke

Eine Hyperbel h ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von zwei gegebenen **Brennpunkten** B_1 und B_2 einen konstanten **Abstandsunterschied** d haben ($d < \overline{B_1B_2}$).
$h = \{P \mid |\overline{PB_1} - \overline{PB_2}| = d\}$.
Lässt man die Beträge weg, erhält man nur einen Hyperbel-Ast.

Eine Hyperbel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen so reflektiert werden, als kämen die Strahlen vom anderen Brennpunkt.

Die Bahn eines Himmelskörper, der zu schnell unterwegs ist, um in eine Umlaufbahn einzuschwenken, beschreibt eine Hyperbel.

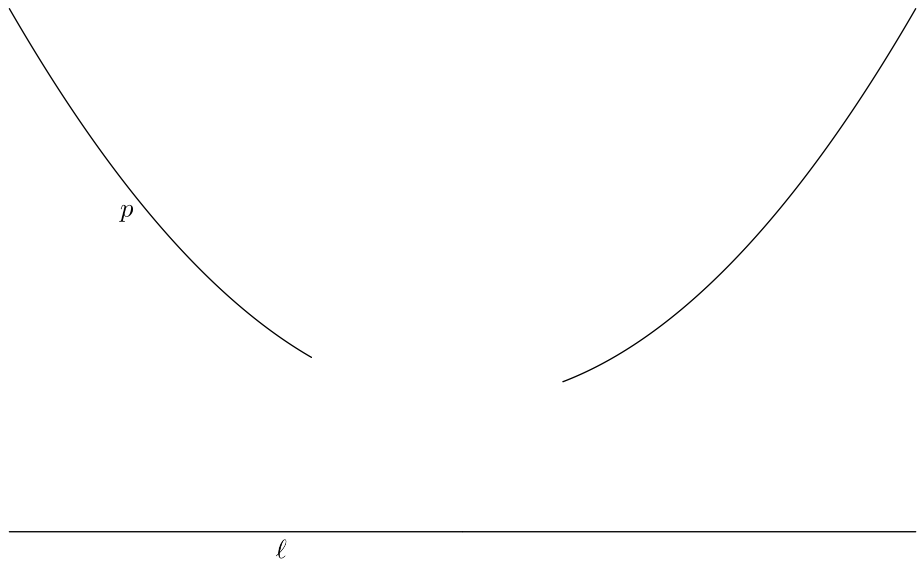


Eine Hyperbel hat zwei **Asymptoten**, d.h. zwei Geraden (in der Skizze oben gestrichelt), denen sich die Kurve immer mehr annähert.

Aufgabe 64 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und eine Länge ℓ. Was ist der gemetrische Ort aller Punkte C für die der Umfang vom $\triangle ABC$ gleich ℓ ist? Was für Bedingungen muss ℓ erfüllen?

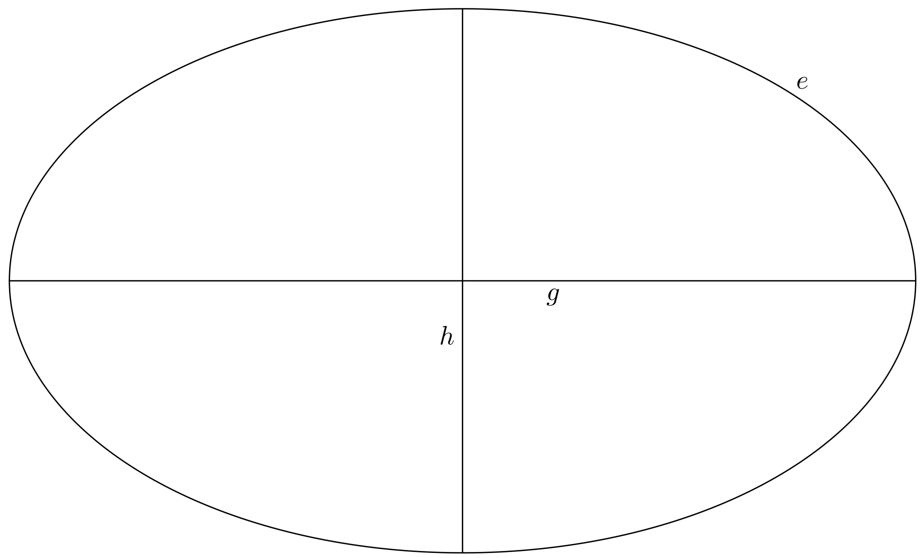
Aufgabe 65 Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P. Was ist der geometrische Ort der Kreiszentren Z der Kreise, die g berühren und durch P gehen, wenn a) $P \in g$? Und wenn b) $P \notin g$?

Aufgabe 66 Gegeben ist eine Parabel p und ihre Leitlinie ℓ. Durch einen Druckfehler ging ein Teil der Parabel verloren. Konstruieren Sie direkt auf dieses Blatt den Brennpunkt der Parabel und den Scheitelpunkt S der Parabel (der Punkt der Parabel, der am nächsten an ℓ ist).



Aufgabe 67 Gegeben ist eine Ellipse e sowie ihre Symmetrieachsen g und h. Konstruieren Sie die Brennpunkte der Ellipse e direkt auf dieses Blatt.

Hinweis: *Die Konstruktion ist extrem einfach. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, die nötigen geometrischen Überlegungen zu führen und sauber zu dokumentieren..*

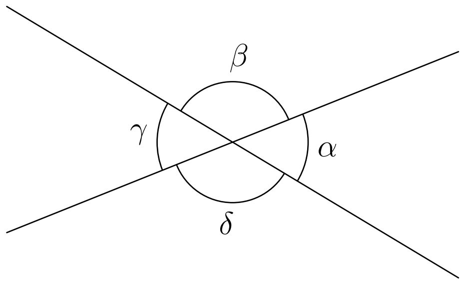


4.4.2 Zusammenfassung Kegelschnitte

Kurve	*Gegeben*	*geometrischer Ort*	*Reflexionseigenschaft*
Parabel	Brennpunkt B, Leitlinie ℓ	$\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$	Senkrecht zur Leitlinie einfallende Strahlen werden zum Brennpunkt hin reflektiert.
Ellipse	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandssumme $d > \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.
Hyperbel	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandunterschied $d < \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \lvert\overline{PB_1} - \overline{PB_2}\rvert = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden so reflektiert, als kämen sie vom anderen Brennpunkt.

4.5 Winkelsätze an Geraden

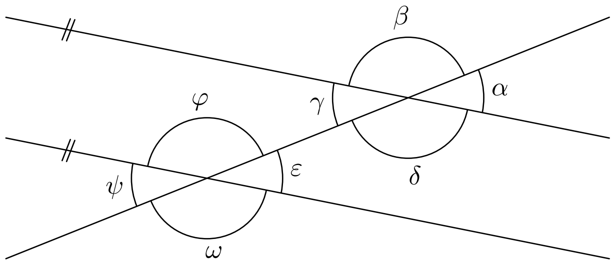
4.5.1 Scheitel- und Nebenwinkel



Scheitelwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.

Nebenwinkel ergänzen sich zu ✎ $180°$:
$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

4.5.2 Winkel an Parallelen



Stufenwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varphi$, $\gamma = \psi$ und $\delta = \omega$.

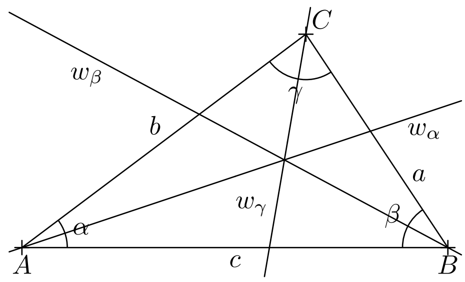
Ergänzungswinkel ergänzen sich zu ✎ $180°$:
$\alpha + \varphi = \alpha + \omega = 180°$,
$\beta + \varepsilon = \beta + \psi = 180°$,
$\gamma + \varphi = \gamma + \omega = 180°$,
$\delta + \varepsilon = \delta + \psi = 180°$.

Den Scheitelwinkel eines Stufenwinkels nennt man auch **Wechselwinkel** (z.B. $\alpha = \psi$).

4.5.3 Bezeichnungen und Winkel in Dreiecken

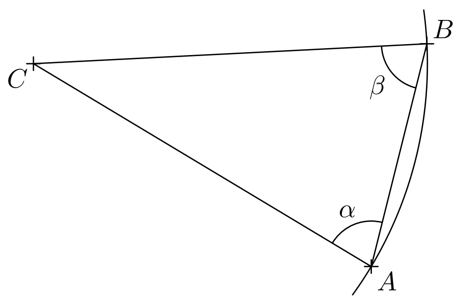
Für ein Dreieck ($\triangle ABC$) gelten folgende Notationen:

A, B, C	**Eckpunkte**, normalerweise im Gegenuhrzeigersinn.
a, b, c	**Seiten**, gegenüber der entsprechenden Eckpunkten.
α, β, γ	**Innenwinkel** an den entsprechenden Eckpunkten.
w_α, w_β, w_γ	**Winkelhalbierende** der entsprechenden Winkel.
h_a, h_b, h_c	**Höhen** auf die entsprechenden Seiten.
M_a, M_b, M_c	**Seitenmittelpunkte**.
m_a, m_b, m_c	**Mittelsenkrechten** der entsprechenden Seiten.
s_a, s_b, s_c	**Schwerlinien**. Z.B. $s_a = AM_a$



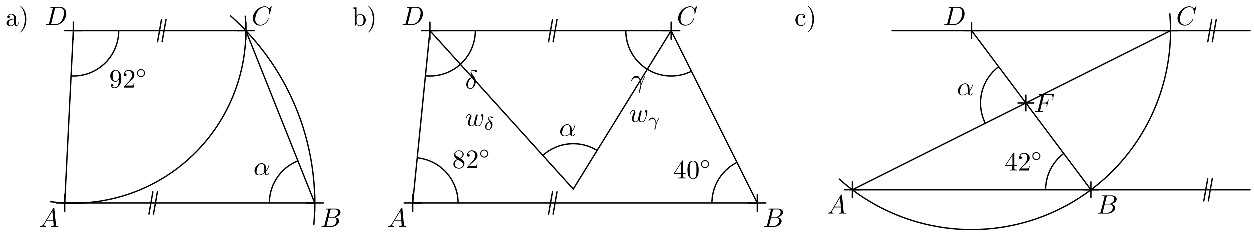
Aufgabe 68
Mit den Winkelsätzen an Parallelen beweisen Sie, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck $180°$ ist.

Gleichschenklige Dreiecke
Ein Dreieck ist **gleichschenklig** wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite heisst **Basis**. Die Winkel zwischen Basis und Schenkeln sind gleich.



Gleichseitige Dreiecke
In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich lang und damit alle Innenwinkel gleich $60°$.

Aufgabe 69 Wie gross ist der Winkel α? *Hinweis: Die Skizzen sind nicht massstabgetreu.*



Aufgabe 70 Zeigen Sie, dass die beiden Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen.

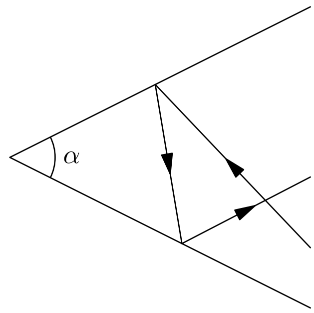
Aufgabe 71 In einem gleichschenkligen Dreieck mit $\alpha = \beta$ ist
a) $\gamma = 40°$ b) $\gamma = 3\alpha$ c) $\beta + \gamma = 140°$ d) $\alpha = \gamma$
Wie gross ist α?

Aufgabe 72 Beweisen Sie: In jedem $\triangle ABC$ gilt $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Aufgabe 73
Ein Lichtstrahl wird an den beiden Schenkeln eines Winkels α reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz aus der Physik:

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

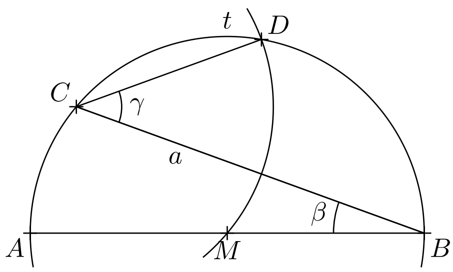
Unter welchem Winkel δ schneiden sich der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl? *Hinweis: Führen Sie die Hilfswinkel β und γ im Dreieck mit dem Winkel α ein.*



Aufgabe 74
Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\rightarrow M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\rightarrow t$
3. $a \cap t$ $\rightarrow C$
4. $k(C, \overline{CM}) \cap t$ $\rightarrow D$

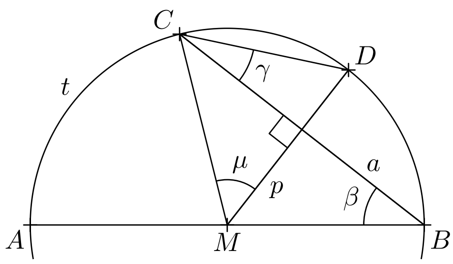
a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ in Abhängigkeit von β. Hinweis: Untersuchen Sie das Dreieck $\triangle MCD$.
b) Für welchen Winkel β ist $CD \parallel AB$?



Aufgabe 75
Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\rightarrow M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\rightarrow t$
3. $a \cap t$ $\rightarrow C$
4. $\perp$ zu a durch M $\rightarrow p$
5. $p \cap t$ $\rightarrow D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\mu = \sphericalangle CMD$ in Abhängigkeit von β.



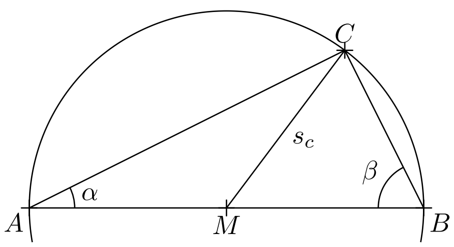
4.6 Kreiswinkelsätze

4.6.1 Thaleskreis

Satz 2

Liegt in einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$, dann ist $\gamma = \sphericalangle BCA = 90°$ und umgekehrt.
Der Kreis über dem Durchmesser $[AB]$ heisst **Thaleskreis**.

Beweis: $(C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}) \Rightarrow \gamma = 90°)$

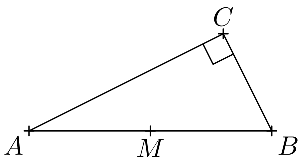


✎ $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ und damit sind $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ gleichschenklig.
Also gilt: $\gamma = \alpha + \beta$.
Eingesetzt in $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ergibt sich:

$$\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 90°,$$

was zu beweisen war.

Beweis: $(\gamma = 90° \Rightarrow C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}))$



✎ Man spiegelt C and M und erhält ein Rechteck ($\alpha + \beta = 90°$). Die Diagonalen in einem Rechteck halbieren sich, und damit gilt $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{MB}$, womit bewiesen ist, dass C auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$ liegt.

Merke

Der Thaleskreis ist der geometrische Ort aller Punkte P, die über einer gegebenen Strecke $[AB]$ einen Winkel von 90° bilden.

Merke

Berührt eine Gerade g einen Kreis $k = k(Z, r)$ im Punkt G, nennt man diese Gerade eine **Tangente** and k mit Berührungspunkt G und es gilt:

$$ZG \perp g$$

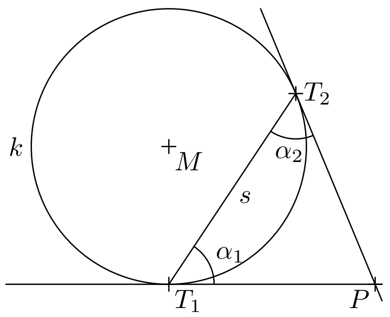
Aufgabe 76 Gegeben ist ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt P ausserhalb von k. Konstruieren Sie die Tangenten an k durch P.

Aufgabe 77 Eine Strecke $[AB]$ der Länge 6 hat den Punkt A irgendwo auf der x-Achse und B irgendwo auf der y-Achse. Konstruieren Sie einige Punkte des geometrischen Ortes aller Punkte M_{AB}, stellen Sie eine Vermutung für diesen Ort auf und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 78 Gegeben sind zwei Kreise $k_1 = k(Z_1, r_1)$ und $k_2 = k(Z_2, r_2)$ mit $Z_1 = (-3, 1)$ und $r_1 = 3$ und $Z_2 = (4, -3)$ und $r_2 = 1.5$. Konstruieren Sie alle 4 Geraden, die beide Kreise berühren.
Hinweis: Vergrössern oder verkleinert man die Radien beider Kreise um die gleiche Länge, verschieben sich gemeinsame Tangenten parallel. Vergrössern, bzw. verkleinern Sie einen Kreis so, dass der andere zum Punkt wird. Machen Sie erst eine Skizze, um die Situation zu verstehen.

Aufgabe 79 In einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ seien H_a und H_b die Höhenfusspunkte der Höhen h_a und h_b auf den Seiten a, bzw. b. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle M_{AB}H_aH_b$ gleichschenklig ist.

4.6.2 Sehnen-Tangenten-Winkel



✎ Die Winkel $\sphericalangle MT_{1,2}P$ sind beide 90°. Also

$$\alpha_1 = 90° - \sphericalangle MT_1T_2 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 90° - \sphericalangle MT_2T_1$$

Das $\triangle MT_1T_2$ ist gleichschenklig, also $\sphericalangle MT_1T_2 = \sphericalangle MT_2T_1$. Und damit

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Dies gilt für alle gleich langen Sehnen s.

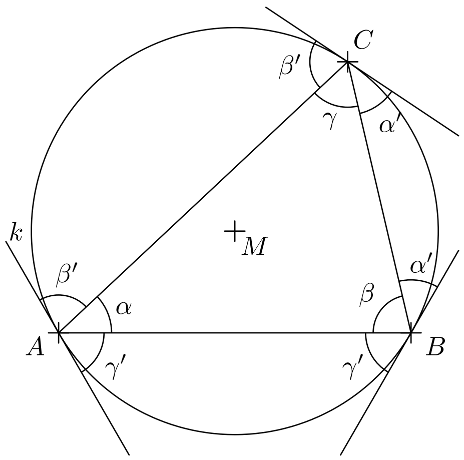
Merke

Sehnen-Tangenten-Winkel über gleich langen Sehnen sind gleich gross.

Aufgabe 80 Mit Hilfe der Skizze oben, beweisen Sie das der **Zentriwinkel** $\sphericalangle T_1MT_2 = 2\alpha$.

4.6.3 Peripherie-Winkel

Ein Peripheriewinkel ist ein Winkel mit Scheitel auf der Kreislinie und Schenkeln durch die Endpunkte einer Kreissehne. Z.B. der Winkel γ über der Sehne $[AB]$ in der folgenden Skizze:



✎ Im $\triangle ABC$ gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Eingesetzt in

$$(\alpha+\beta'+\gamma')+(\beta+\alpha'+\gamma')+(\gamma+\alpha'+\beta') = 3\cdot 180°$$

erhält man

$$180° + 2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 3 \cdot 180°$$

also

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$$

Im Punkt A gilt $\alpha + \beta' + \gamma' = 180°$ und damit

$$\alpha' = \alpha$$

Analog dazu beweist man $\beta' = \beta$ und $\gamma' = \gamma$.

Da keine Annahmen über die Wahl der Punkte A, B, C auf dem Kreis k getroffen wurden, ist der Beweis allgemein gültig. Insbesondere gilt der Beweis, wenn $[BC]$ fix ist und A auf dem Kreis wandert. Die Winkel α' ändern sich dabei nicht, also bleibt auch der Winkel α immer gleich gross.

Merke

Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen sind gleich gross.
Und umgekehrt gilt auch, dass der geometrische Ort aller Punkte C, die über einer Strecke $[AB]$ einen Winkel γ bilden, einem Kreisbogenpaar über $[AB]$, dem sogenannten **Ortsbogenpaar** entspricht.

Aufgabe 81 Über einer gegebenen Strecke $[AB]$ konstruieren Sie den Ortsbogen für einen gegebenen Winkel $\gamma = 65°$.

Aufgabe 82 Von einem Dreieck ABC ist folgendes gegeben (Einheit jeweils 2 Häuschen (oder 1cm)):
a) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $h_c = 4$.
b) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $\delta = \sphericalangle ACM_{AB} = 40°$.
c*) $c = 5$, $h_a = 3$, $\gamma = 70°$

4.7 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 83 Von einer Ellipse kennt man den einen Brennpunkt $B_1 = (2, 0)$ und zwei Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 1)$ auf der Ellipse.

a) Gegeben ist die Abstandssumme $d = 5$. Konstruieren Sie den (die) zweiten Brennpunkt(e) und skizzieren Sie die Ellipse(n).
b*) Wenn die Abstandssumme nicht gegeben ist, beschreiben Sie den geometrischen Ort aller zweiten Brennpunkte B_2.

Aufgabe 84 Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit Zentren Z_1 und Z_2 mit unterschiedlichen Radien r_1 und r_2.

a) Beschreiben Sie, wie man die Kreiszentren Z_3 eines Kreises k_3 mit gegebenem Radius r_3 konstruiert, so dass k_3 beide Kreise k_1 und k_2 berührt.. Wie viele Lösungen kann es maximal geben? Kann es null Lösungen geben?

b) Man nimmt an, dass $k_1 \cap k_2 = \varnothing$ und dass $\overline{Z_1 Z_2} > r_1 + r_2$. Beschreiben Sie, wie man den Kreis mit kleinstmöglichem Radius konstruiert, der beide Kreise k_1 und k_2 berührt.

c) Man nimmt an, dass $k_1 \cap k_2 = \varnothing$ und dass $\overline{Z_1 Z_2} > r_1 + r_2$. Was ist der geometrische Ort aller Kreiszentren der Kreise, die beide gegebenen Kreise von aussen berühren?

Aufgabe 85 Von einer Parabel kennt man zwei Punkte auf der Parabel $P_1 = (-4, 0)$ und $P_2 = (4, 2)$ sowie den Brennpunkt $B = (-1, -3)$. Konstruieren Sie alle möglichen Leitlinien und die entsprechenden Scheitelpunkte der Parablen (Punkte, die am nächsten an der Leitlinie sind) und skizzieren Sie die entsprechenden Parabeln.

Aufgabe 86 Zeigen Sie, dass sich eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten senkrecht schneiden. Verwenden Sie dazu die Reflexionseigenschaften der beiden Kurven. *Hinweis: Der Schnittwinkel zweier Kurven ist gleich dem Winkel der entsprechenden Tangenten im Schnittpunkt.*

Aufgabe 87 Ein Lichtstrahl g wird von einer Kurve k so reflektiert, als ob der Lichtstrahl von der Tangente im Schnittpunkt $g \cap k$ reflektiert würde.

Gegeben ist ein Kreis um $Z = (1, -2)$ mir Radius $r = 4$ und die Punkte $A = (-6, 4)$ und $B = (-4, 3)$. Konstruieren Sie die Reflexion am Kreis des von A durch B gehenden Lichtstrahls.

Aufgabe 88 Gegeben sind zwei Kreise $k_{1,2}$ die sich nicht scheiden und die nicht ineinander liegen. Es gibt also zwei äussere gemeinsame Tangenten t_1 und t_2 und zwei innere gemeinsame Tangenten t_3 und t_4. Zeigen Sie, dass die vier Schnittpunkte je einer inneren mit einer äusseren Tangente auf einem Thaleskreis über Z_1, Z_2 liegen.

Machen Sie dazu eine gute Skizze mit Zirkel und Lineal, die gemeinsamen Tangenten brauchen aber nicht konstruiert zu werden.

Aufgabe 89 Zeichnen Sie ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruieren Sie einen Halbkreis mit Mittelpunkt auf der Seite c so, dass die Seiten a und b Tangenten des Halbkreises sind.

Aufgabe 90 Gegeben sind
a) zwei sich schneidende Geraden g und h mit $\sphericalangle(g, h) = 60°$.
b) zwei sich schneidende Kreise $k_1 = k(M_1, r_1 = 3)$ und $k_2 = k(M_2, r_2 = 2.5)$ mit $\overline{M_1 M_2} = 4$.
c) eine Gerade g und ein Kreis $k = k(M, r = 3)$ mit $\overline{Mg} = 1$.
Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius 1, so dass die zwei gegebenen Geraden bzw. zwei Kreise bzw. die Gerade und den Kreis berührt werden. Wie gross ist jeweils die Anzahl der Lösungen?

4.8 Aufgaben zum Ortsbogen

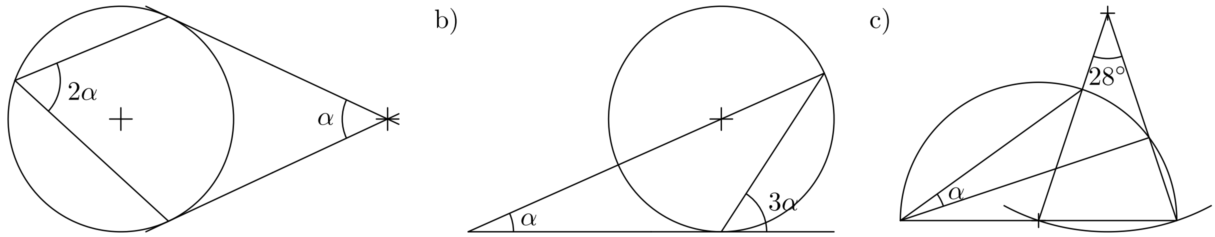
Aufgabe 91 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in einem Punkt B von aussen berühren. Durch den Punkt B wird eine Gerade g gelegt, die keine Tangente an die Kreise ist. Die Gerade g scheidet die Kreise k_1 und k_2 in je einem weiteren Punkt T_1 und T_2. Seien t_1 bzw. t_2 die Tangenten an k_1 bzw. k_2 im Punkt T_1 bzw. T_2.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass $t_1 \parallel t_2$.

Aufgabe 92 Berechnen Sie den Winkel α:

a) b) c)



Aufgabe 93 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in zwei Punkten A und B schneiden. Weiter ist eine beliebige Gerade g durch A gegeben, die beide Kreise schneidet, nämlich in den Punkten $C = g \cap k_1$ und $D = g \cap k_2$.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle CBD$ immer gleich gross ist, egal wie g durch A gelegt wird.

Aufgabe 94 Diese Aufabe kann mit GeoGebra gelöst werden.

Gegeben ist ein Kreis k und zwei beliebige, sich nicht schneidende Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ (also $A, B, C, D \in k$). *Hinweis: Die Sehne $[CD]$ soll auf dem Kreis wandern können. Definieren Sie darum in GeoGebra die Sehne $[CD]$ mit Hilfe eines Kreises mit Mittelpunkt C auf k und gegebenem Radius. D ist dann ein Schnittpunkt der Kreise.*

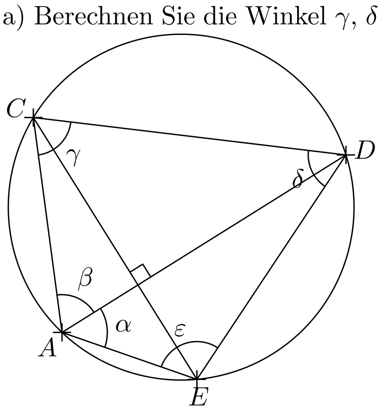
Sei X der Diagonalenschnittpunk des Vierecks, geformt durch die vier Punkte A, B, C, D.

Wenn die Sehne $[CD]$, ohne ihre Länge zu ändern, auf k wandert, wo liegen dann alle Punkte X? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

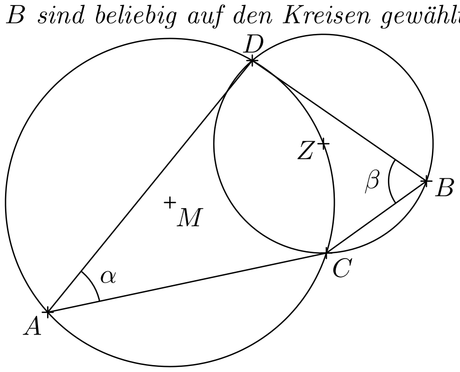
Aufgabe 95 Gegeben ist ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$. Im Punkt A wird die Tangente t an den Umkreis gelegt. Berechnen Sie den Winkel $\delta = \sphericalangle(t, a)$, wenn α, β und γ gegeben sind. Machen Sie eine saubere Skizze der Situation. *Hinweis: Das Resultat ist eine Formel, die gegebene Winkel enthält.*

Aufgabe 96

a) Berechnen Sie die Winkel γ, δ und ε aus α und β:



b) Wie hängen α und β zusammen? *Hinweis: A und B sind beliebig auf den Kreisen gewählt.*



Aufgabe 97 Beweisen Sie, dass in jedem beliebigen $\triangle ABC$ folgendes gilt: $w_\gamma \cap m_{AB} \in u$, wobei u der Umkreis des Dreiecks ist.

Typische Prüfungsaufgaben: Aufgaben 82 a) und b), 92, 95 und 96.

4.9 Lösungen

Ex 54

Gegeben: Punkte A, B.

1.	Senkrechte zu AB durch A	$\to h$
2.	$k(A, \overline{AB})$	$\to k_1$
3.	$k_1 \cap h$	$\to H$
4.	$k(M_{AB}, \overline{M_{AB}H}) \cap AB$	$\to J$
5.	$k(M_{AB}, \overline{M_{AB}J})$	$\to k_2$
6.	$k_1 \cap k_2$	$\to E$
7.	$m_{AB} \cap k_2$	$\to D$
8.	$k(D, \overline{DE}) \cap k(B, \overline{AB})$	$\to C$

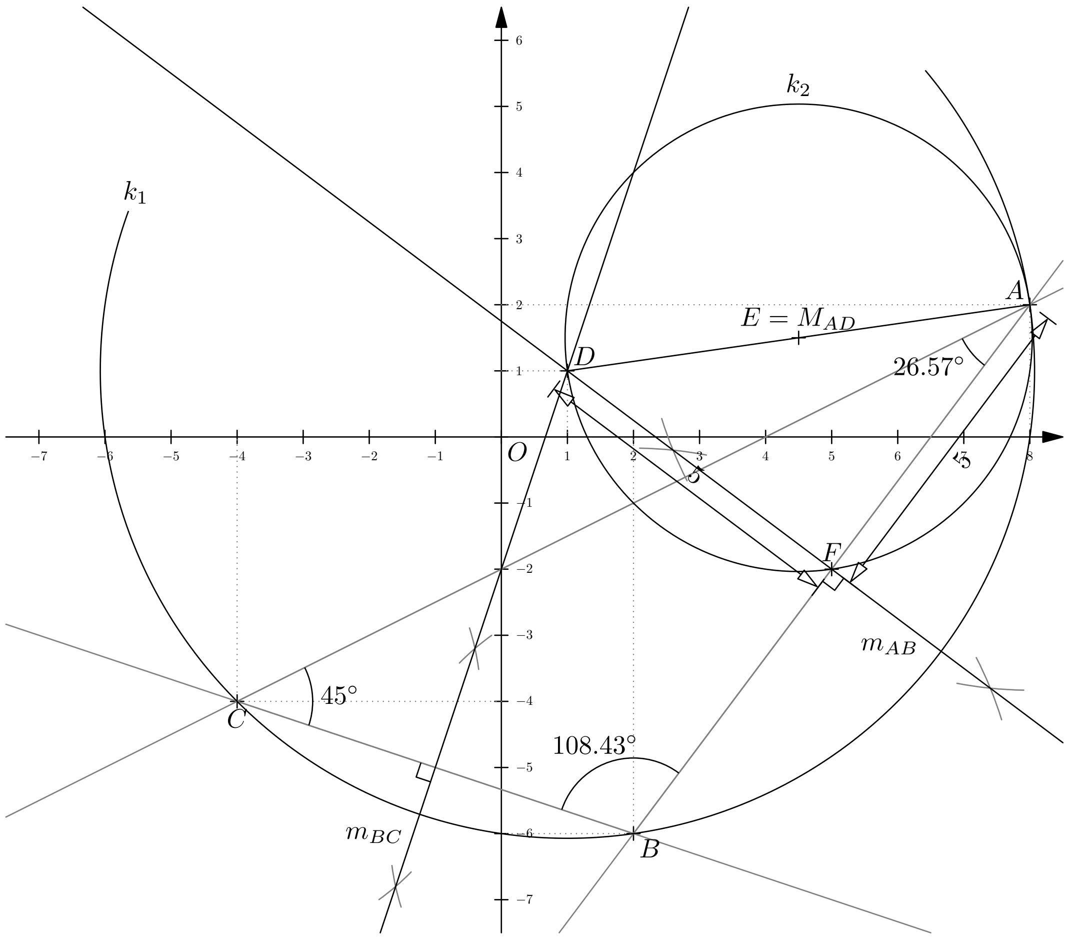
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige "Tricks", zu offene Aufgabenstellung, etc). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

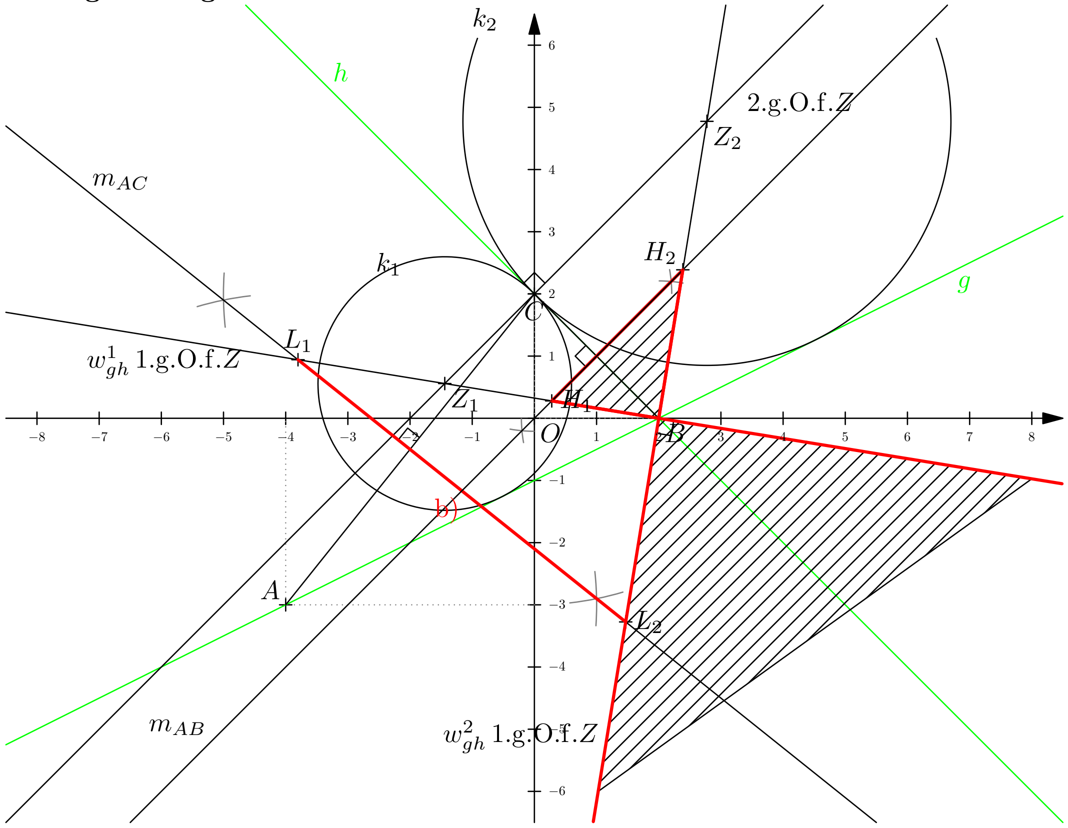
Lösung zu Aufgabe 55 ex-koordinaten-system-einfuehrung



c) $D = (1, 1)$ (sogar exakt).
d) 10 Einheiten (bei 8mm Einheit: 80mm/8mm = 10)
e) $A, B, C \in k_1$, weil D ist der Umkreismittelpunkt vom $\triangle ABC$. Weil $D \in m_{AB}$ gilt $\overline{DA} = \overline{DB}$, und weil

$D \in m_{BC}$ gilt $\overline{DB} = \overline{DC}$, und damit ist D gleich weit von A, B, C entfernt.
g) $\alpha \approx 26.57°$, $\beta \approx 108.43°$, $\gamma = 45°$. So genau messen kann man die Winkel natürlich nicht, die Summe kann daher etwas kleiner oder grösser als die eigentlich exakten 180° sein.
i) Ja, weil $\sphericalangle DFA = 90°$ über dem Kreisdurchmesser $[DA]$ steht. Damit ist k_2 ein Thaleskreis auf dem alle rechten Winkel mit Schenkeln durch A, D liegen.
j) In dieser speziellen Situation ja. Würde man den Punkt C weiter auf BC verschieben, würde sich $[DF]$ ändern, aber $[AF]$ nicht.

Lösung zu Aufgabe 56 ex-geometrische-oerter3



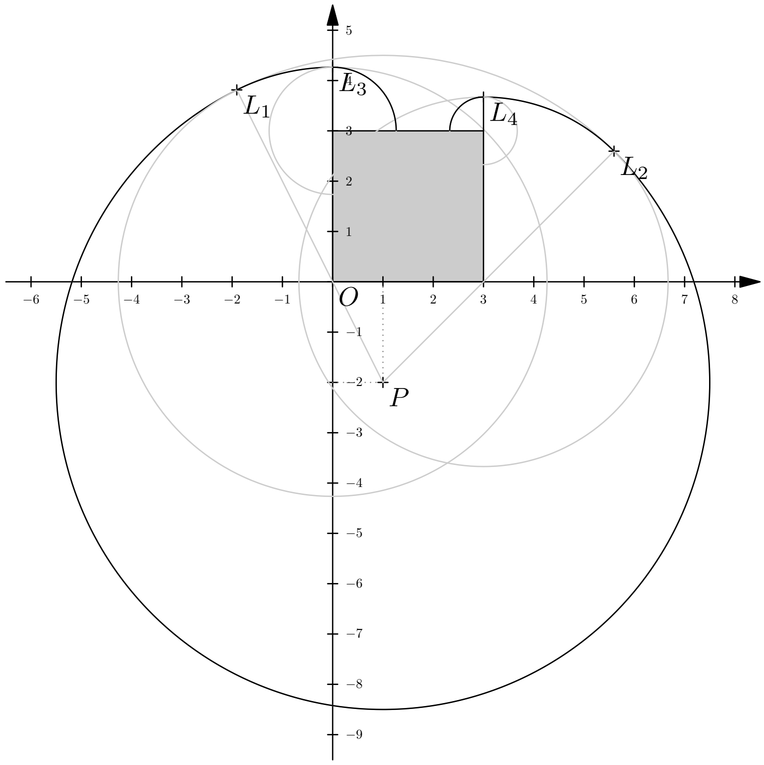
a) Für das Kreiszentrum Z gilt: $\overline{Zg} = \overline{Zh}$ (Kreis berührt die Geraden) und $ZC \perp h$ (berührt h in C). Das ergibt 2 geometrische Örter für Z.

b) Der erste geometrische Ort ist m_{AC}. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w^1_{gh} und w^2_{gh} in der g enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Strecke.

c) Der erste geometrische Ort ist die *Halbebene*, die B enthält und durch die Gerade m_{BC}, begrenzt ist. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w^1_{gh} und w^2_{gh} in der h enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Fläche.

1.	w^1_{gh}, w^2_{gh}	$\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2.	$\perp$ zu h durch C	$\rightarrow$ 2.g.O.f.Z, Z_1, Z_2
3.	$k(Z_1, \overline{Z_1, C})$, $k(Z_2, \overline{Z_2, C})$	$\rightarrow$ 2 Lösungen zu a)
4.	$m_{AC} \cap w^1_{gh}$, $m_{AC} \cap w^2_{gh}$	$\rightarrow$ $[L_1, L_2]$, Lösung zu b)
5.	$m_{BC} \cap w^1_{gh}$, $m_{BC} \cap w^2_{gh}$	$\rightarrow$ H_1, H_2
6.	Schraffierte Fläche	$\rightarrow$ Lösung zu c)

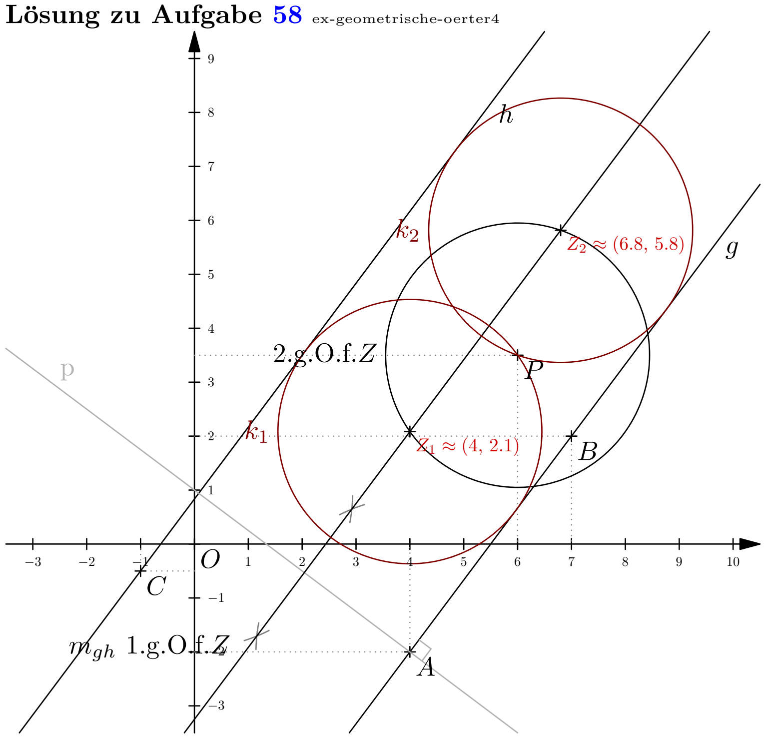
Lösung zu Aufgabe 57 ex-geometrische-oerter-ziege-ums-haus



Die Eckpunkte des Hauses werden vom Nullpunkt aus im Gegenuhrzeigersinn mit H_1, H_2, H_3 und H_4 bezeichnet.

1. $k(P, 6.5)$ $\rightarrow k_1$
2. $k_1 \cap PH_1$ und $k_1 \cap PH_2$ $\rightarrow L_1$ und L_2
3. $k(H_0, \overline{H_1L_1})$ und $k(H_1, \overline{H_1L_2})$ $\rightarrow k_2$ und k_3
4. $k_2 \cap H_1H_4$ und $k_3 \cap H_2H_3$ $\rightarrow L_3$ und L_4

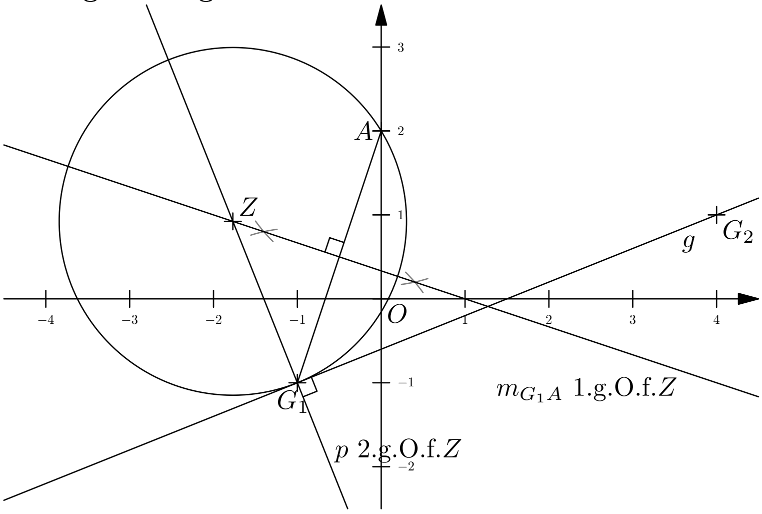
Lösung zu Aufgabe 58 ex-geometrische-oerter4



Es wird zuerst das Kreiszentrum Z konstruiert. Es gilt $\overline{Zg} = \overline{Zh}$. Der Kreisradius muss $\frac{1}{2}\overline{gh}$ sein, und damit $\overline{ZP} = \frac{1}{2}\overline{gh}$.

1. Mittelparallele m_{gh} $\to$ 1.g.O.f.Z
2. $k = k(P, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\to$ 2.g.O.f.Z
3. $m_{gh} \cap k$ $\to$ Z_1, Z_2
4. $k(Z_1, \frac{1}{2}\overline{gh})$, $k(Z_2, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\to$ 2 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 59 ex-geometrische-oerter1

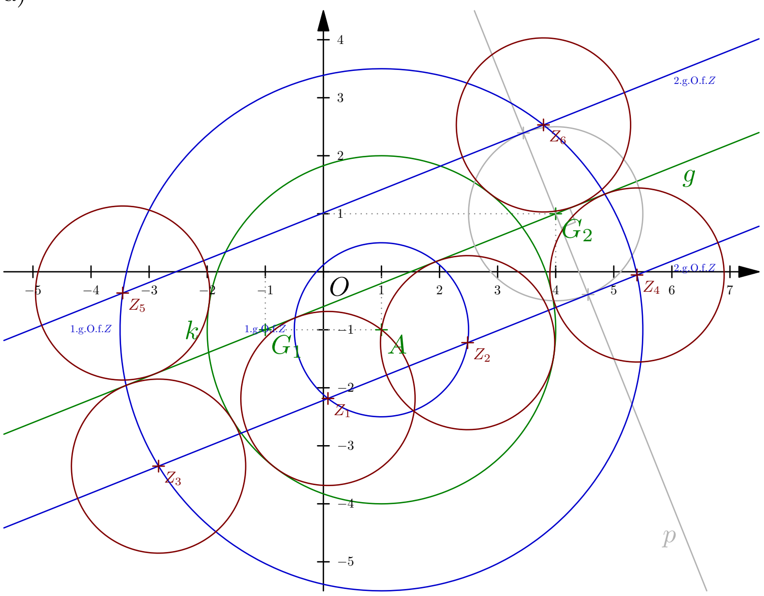


Man konstruiert zuerst das gesuchte Kreiszentrum Z, das folgende Bedingungen erfüllen muss: $\overline{ZA} = \overline{ZG_1}$ und $\overline{Zg} = \overline{ZG_1}$, bzw. $ZG_1 \perp g$ (damit der gesuchte Kreis die Gerade g im Punkt G_1 berührt).

1. m_{G_1A} $\to$ 1.g.O.f.Z
2. $\perp$ zu g durch G_1 $\to$ 2.g.O.f.Z
3. $k(Z, \overline{ZG_1})$ $\to$ 1 Lösung

Lösung zu Aufgabe 60 ex-geometrische-oerter2

a)



Man konstruiert das gesuchte Kreiszentrum Z:

1. $k_1 = k(M, r_1 - r_2)$ und $k_2 = k(M, r_1 + r_2)$ $\to$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar p_1, p_2 zu g im Abstand r_2 $\to$ 2.g.O.f.Z
3. $(k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$ $\to$ 6 Lösungen.

b*) Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben.

0 Lösungen wenn $\overline{kg} > 2r$, wobei $\overline{kg} = \overline{Mg} - r_1$.

1 Lösung wenn $\overline{kg} = 2r$.

2 Lösungen wenn $\overline{kg} < 2r$ und $g \cap k = \varnothing$.

3 Lösungen wenn g Tangente an k und $r_2 > r_1$.

4 Lösungen wenn g Tangente an k ist und $r_2 \leq r_1$, oder wenn $\overline{Mg} < r_1$ und $r_2 > r_1$.

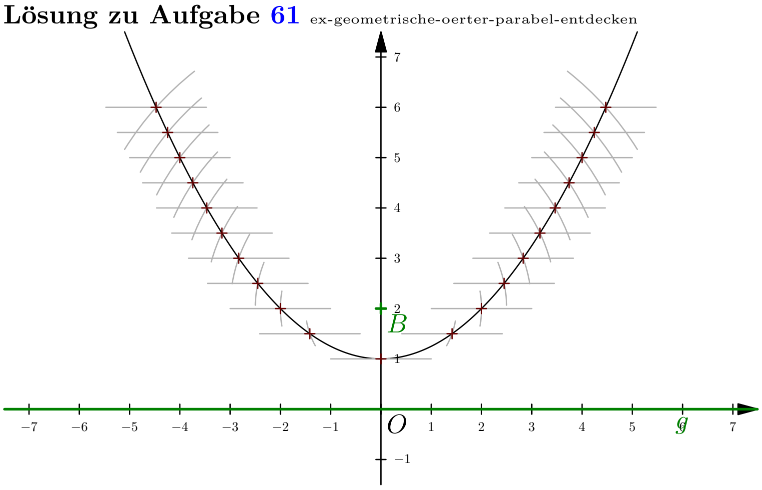
5 Lösungen wenn $\overline{Mg} = r_1 - r_2$ (und damit $r_1 > r_2$).

7 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 = r_1$.

8 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 < r_1$.

6 Lösungen sonst.

Lösung zu Aufgabe 61 ex-geometrische-oerter-parabel-entdecken

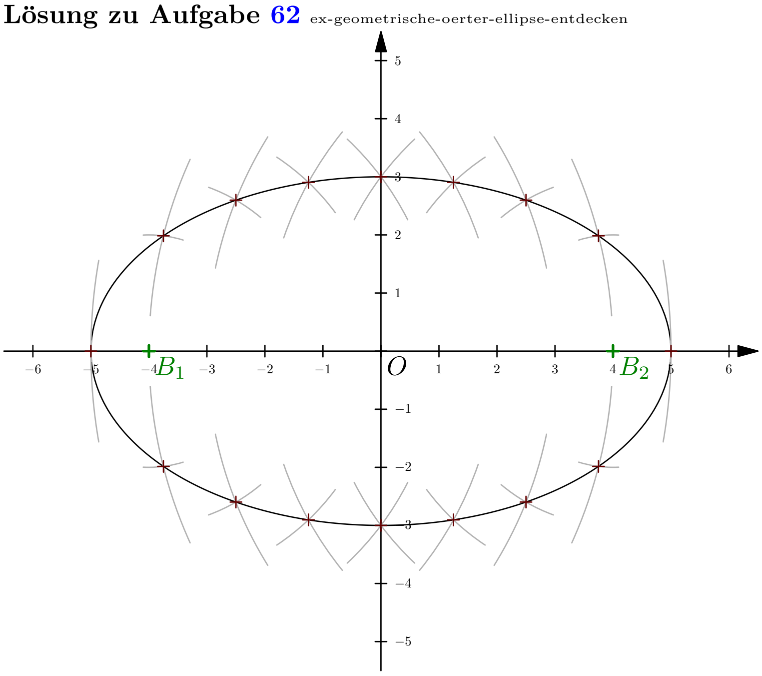


Für alle halbzahligen d wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. Parallele zu g im Abstand d $\quad \rightarrow p$
2. $k(B, d) \cap p$ $\quad \rightarrow P_1$, P_2 (ausser für $d = 1$ nur ein Punkt)

Die entstehende Kurve (eine Parabel) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Lösung zu Aufgabe 62 ex-geometrische-oerter-ellipse-entdecken



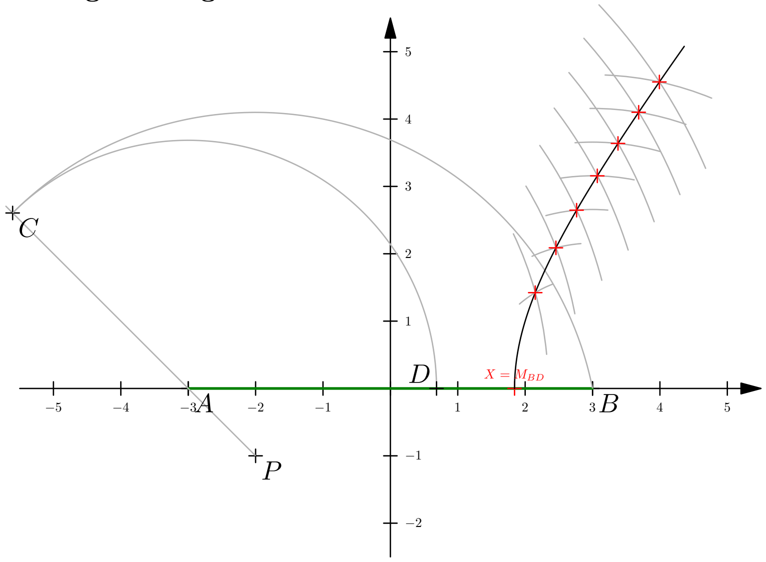
Für alle ganzzahligen d von 1 bis 9 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(B_1, d) \cap k(B_2, 10 - d)$ $\quad \rightarrow$ 2 Punkte (ausser für $d = 1$ und $d = 9$)

Die entstehende Kurve (eine Ellipse) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Schlägt man bei B_1 und B_2 zwei Nägel ein und legt eine Fadenschlaufe der Länge $10+\overline{B_1B_2}=10+8=18$ um die Nägel, kann mit einem Stift, der die Schlaufe spannt, die Ellipse gezeichnet werden.

Lösung zu Aufgabe 63 ex-geometrische-oerter-hyperbel-entdecken



Zuerst wird der Punkt D auf $[AB]$ konstruiert, der via A gleich weit von P entfernt ist, wie der Punkt B. Der Mittelpunkt von D und B ist dann X:

1. $k(P,\overline{PB})\cap[PA \quad \to C$
2. $k(A,\overline{AC})\cap[AB] \quad \to D$
3. $M_{BD} \quad \to X$

Für alle halbzahligen d von 0.5 bis 4 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(A,d+\overline{AX})\cap k(B,d+\overline{BX}) \quad \to$ 1 Punkt oberhalb AB

Die entstehende Kurve (ein halber Hyperbelast) ist rund und hat nirgends einen Knick! Die Tangente an die Hyperbel in X ist vertikal.

Man beachte dass für alle Punkte P auf der Hyperbel folgendes gilt: $\overline{AP}-\overline{BP}=\overline{AX}-\overline{BX}$.

Lösung zu Aufgabe 64 ex-geometrische-oerter-ellipse1

Damit überhaupt ein Dreieck gezeichnet werden kann muss $\ell\geq 2\overline{AB}$ sein. Ansonsten ist der geometrische Ort die leere Menge $\varnothing$.

Es gilt also $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\ell$, bzw. $\overline{AC}+\overline{BC}=\ell-\overline{AB}$ und damit ist der geometrische Ort aller Punkte C eine Ellipse mit Brennpunkten A und B und Abstandssumme $\ell-\overline{AB}$.

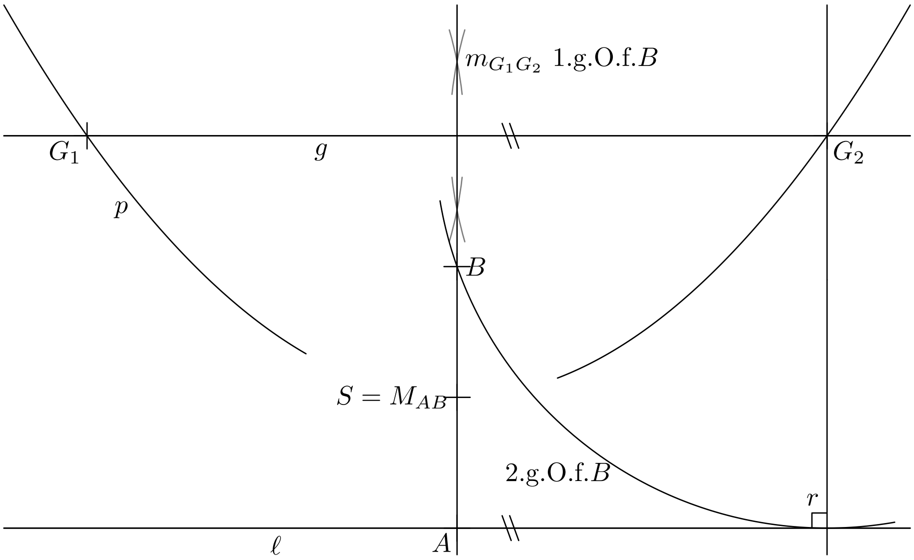
Lösung zu Aufgabe 65 ex-geometrische-oerter-parabel1

a) Da g Tangente an die Kreise ist und der Berührungspunkt P auf g ist, ist der geometrische Ort die Rechtwinklige zu g durch P.

b) Für die Kreiszentren Z gilt: $\overline{ZP}=\overline{Zg}$. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Parabel mit Brennpunkt P und Leitlinie g.

Lösung zu Aufgabe 66 ex-geometrische-oerter-parabel2

Zuerst wird die Symmetrieachse a der Parabel konstruiert. Es gilt: $B\in a$. Danach wird ein Punkt $Q\in p$ gewählt und die Bedingung $\overline{Q\ell}=\overline{QB}$ genutzt.



1. Wähle G_1 auf p $\to G_1$
2. Parallele zu ℓ durch G_1 $\to g$
3. $g \cap p$ $\to G_2$
4. $m_{G_1G_2}$ $\to$ 1.g.O.f.B
5. $k(G_2, \overline{G_2\ell})$ $\to$ 2.g.O.f.B
6. $m_{G_1G_2} \cap \ell$ $\to A$
7. M_{AB} $\to$ Scheitel S

Lösung zu Aufgabe 67 ex-geometrische-oerter-ellipse2
Seien A, B die Schnittpunkte $e \cap g$, und C, D die Schnittpunkte $e \cap h$ und $M = g \cap h$.
Seien B_1 und B_2 die unbekannten Brennpunkte auf g, symmetrisch zu $M = g \cap h$, d.h.

$$\overline{AB_1} = \overline{BB_2}.$$

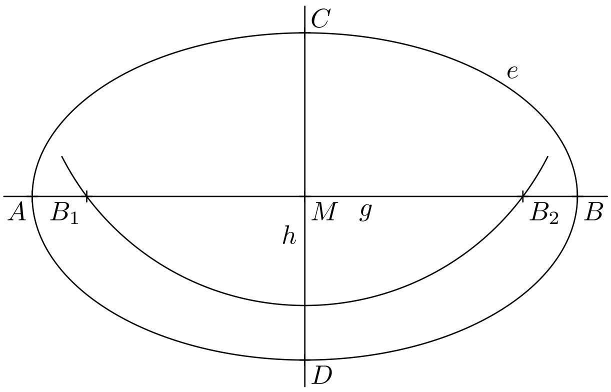
Für jeden Punkt $P \in e$ gilt:

$$\overline{B_1P} + \overline{B_2P} = s \quad \text{(konstante Abstandssumme)}$$

Insbesondere gilt dies für den Punkt A, also

$$s = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} = \overline{AB_1} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} + \overline{B_2B} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB}$$

Damit ist die Abstandssumme s bekannt. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CB_1} = \overline{CB_2}$ und damit $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}s = \overline{AM}$.
Damit ist die Konstruktionsbeschreibung wie folgt:
1. $k(C, \overline{MA}) \cap g$ $\to B_1$, B_2



Lösung zu Aufgabe 69 ex-winkelsaetze-geraden1
a)

$\sphericalangle DAB = 88°$ (Ergänzungswinkel an Parallelen).
$\triangle ACD$ ist gleichschenklig damit ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = (180° - \sphericalangle CDA)/2 = (180° - 92°)/2 = 44°$.
Damit ist $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = 88° - 44° = 44°$.
δABC ist gleichschenlig und damit $\alpha = (180° - \sphericalangle CAB)/2 = (180° - 44°)/2 = 78°$.

Antwort: $\alpha = 78°$.

b)

$\delta = 180° - 82° = 98°$ (Ergänzungswinkel).
$\gamma = 180° - 40° = 140°$ (Ergänzungswinkel).
$\alpha = 180° - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\gamma = 180° - 49° - 70° = 61°$. (Winkelsumme im $\triangle$).

Antwort: $\alpha = 61°$.

c)

$\sphericalangle BDC = 42°$ (Stufenwinkel).
$\sphericalangle ADB = 180° - 2 \cdot 42° = 96°$ (gleichschenkliges $\triangle ABD$ mit Basis $[AB]$).
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 96° + 42° = 138°$.
$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 138°) = \frac{1}{2} 42° = 21°$. (gleichschenkliges $\triangle ACD$ mit Basis $[AC]$).
$\sphericalangle DFC = 180° - \sphericalangle FDC - \sphericalangle FCD = 180° - 42° - 21° = 117°$ (Winkelsumme im $\triangle DFC$).
$\alpha = 180° - \sphericalangle DFC = 180° - 117° = 63°$

Antwort: $\alpha = 63°$.

Alternative: $\alpha = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCF$. Man denke sich eine dritte Parallele durch F und α als Summe zweier Stufenwinkel.

Lösung zu Aufgabe 70 ex-winkelsaetze-geraden2
Seien g, h zwei sich schneidende Geraden mit $\sphericalangle(g, h) = \alpha$. Sei $\beta = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel von α. Damit gilt

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, g) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle(w^2_{gh}, g) = \frac{\beta}{2}$$

und damit

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, w^2_{gh}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Es gilt $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 71 ex-winkelsaetze-geraden3
a) $\alpha = (180° - \gamma)/2 = 70°$.
b) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$ also $\alpha = 36°$.
c) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 40°$.
d) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ also $\alpha = 60°$.

Lösung zu Aufgabe 72 ex-winkelsaetze-geraden4
Sei $I = w_\alpha \cap w_\beta$. Es gilt:

$$\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Innenwinkelsumme im } \triangle$$

Der gesuchte Winkel δ ist der Nebenwinkel von $\sphericalangle AIB$, also

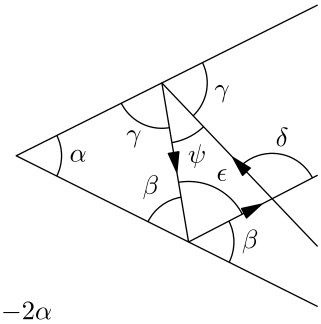
$$\delta = 180° - (180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Man hätte dies auch direkt aufschreiben können, da der Aussenwinkel in einem Dreieck immer die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.
In jedem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Und damit ist $\delta = \sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 73 ex-winkelsaetze-geraden5



Für den Aussenwinkel δ gilt:

$$\delta = \epsilon + \psi$$

Mit $\epsilon = 180^\circ - 2\beta$ und $\psi = 180^\circ - 2\gamma$. Und damit

$$\delta = \epsilon + \psi = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\gamma = 360^\circ - (2\beta + 2\gamma)$$

Es gilt

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma = 360^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta+2\gamma = 360^\circ - 2\alpha$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\delta = 360^\circ - (360^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$$

Lösung zu Aufgabe 74 ex-winkelsaetze-geraden6

a) Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig, also ist $\sphericalangle MCB = \beta$.
Es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CM} = \overline{MA} = \overline{MD}$$

und damit ist $\triangle MCD$ gleichseitig und alle Innenwinkel gleich 60°.
Somit gilt:

$$\sphericalangle MCD = \beta + \gamma = 60^\circ \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = 60^\circ - \beta.$$

b) Wenn $\beta = \gamma$ sind dies Wechselwinkel (Scheitelwinkel zu Stufenwinkel) und damit $CD \parallel AB$. Eingesetzt in obige Gleichung:

$$\beta = 60^\circ - \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\beta = 60^\circ \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = 30^\circ.$$

Lösung zu Aufgabe 75 ex-winkelsaetze-geraden7

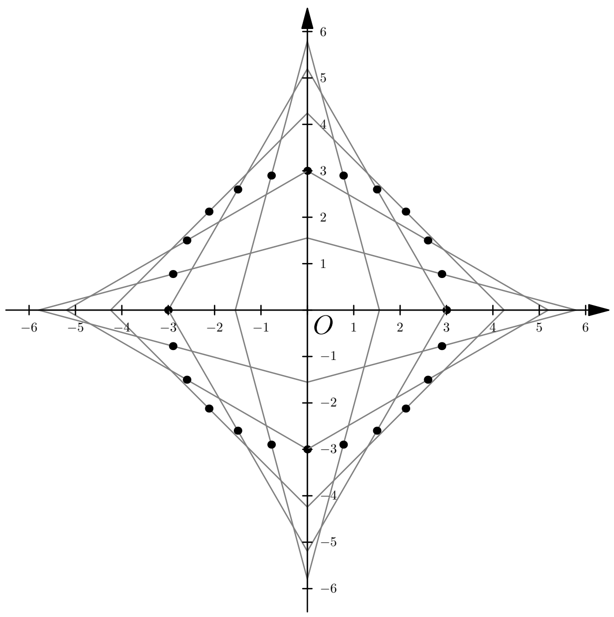
Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig und damit ist $\sphericalangle MCB = \beta$. Damit ist p die Mittelsenkrechte zu BC und Winkelhalbierende vom $\sphericalangle CMB$. Damit ist $M_{CD} = a \cap p$. Im Dreieck $\triangle CMM_{BC}$ gilt

$$\mu = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta$$

Das Dreieck $\triangle MCD$ ist gleichschenklig mit Basis $[CD]$. Damit ist $\sphericalangle MDC = (180^\circ - \mu)/2 = (180^\circ - (90^\circ - \beta))/2 = (90^\circ + \beta)/2 = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$.
Im Dreieck $\triangle CM_{BC}D$ gilt:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle MDC = 90^\circ - (45^\circ + \frac{\beta}{2}) = 45^\circ - \frac{\beta}{2}$$

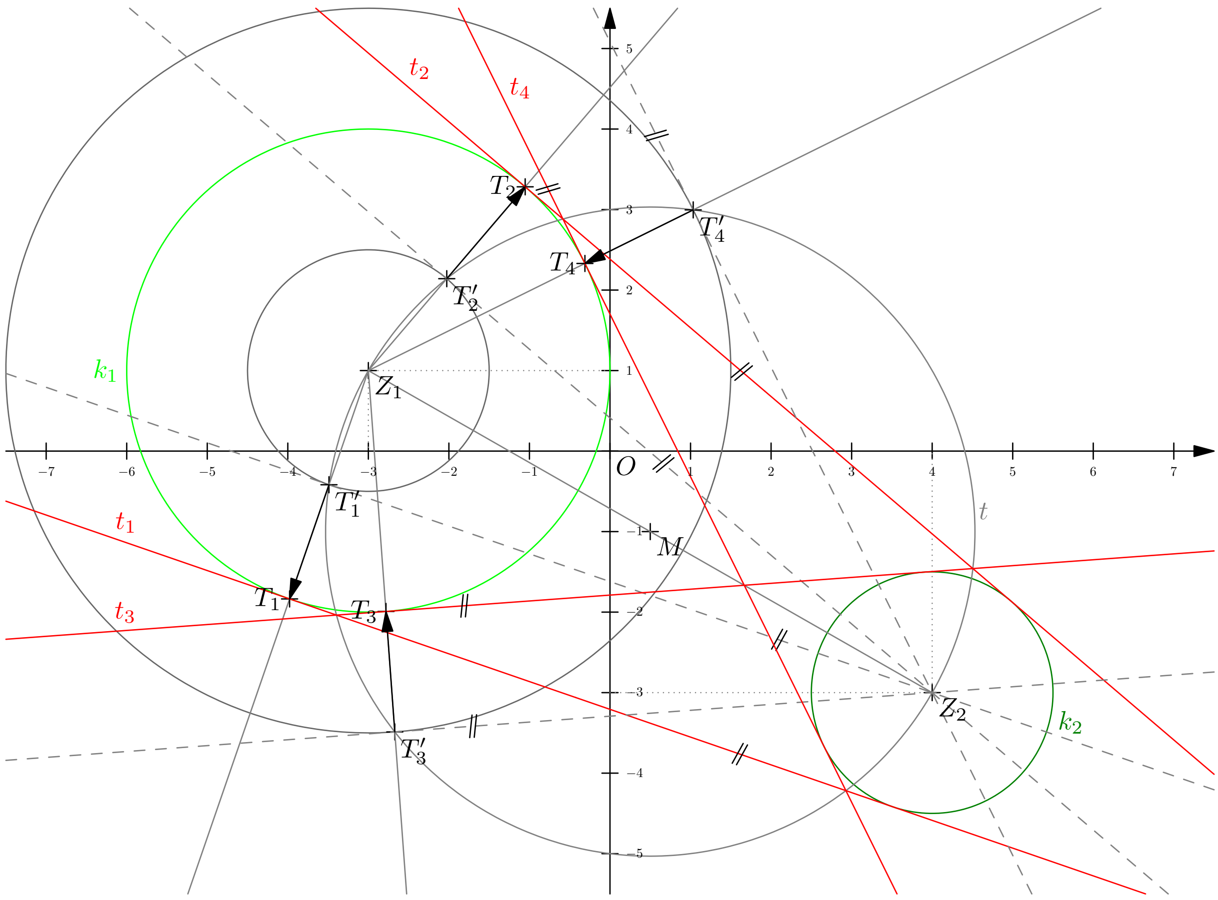
Lösung zu Aufgabe 77 ex-thaleskreis-leiter



M_{AB} ist der Mittelpunkt der Stecke $[AB]$, über der der Nullpunkt des Koordinatensystem ein rechter Winkel bildet. D.h. O liegt auf dem Thaleskreis über $[AB]$ und somit $\overline{OM} = \overline{AM_{AB}}$.
Damit ist bewiesen, dass alle Punkte M_{AB} auf einem Kreis um O liegen.

Lösung zu Aufgabe 78 ex-tangenten-an-zwei-kreise

1. Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ $\rightarrow t$
2. $k(Z_1, r_1 - r_2) \cap t$ $\rightarrow T_1', T_2'$
3. $[Z_1T_{1,2}' \cap k_1$ $\rightarrow T_{1,2}$
4. $k(Z_1, r_1 + r_2) \cap t$ $\rightarrow T_3', T_4'$
5. $[Z_1T_{3,4}' \cap k_1$ $\rightarrow T_{3,4}$
6. Paralellen zu $Z_2T_{1,2,3,4}'$ durch $T_{1,2,3,4}$ $\rightarrow t_{1,2,3,4}$



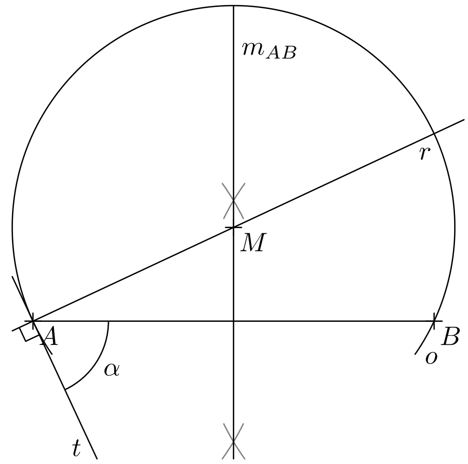
Lösung zu Aufgabe 79 ex-thaleskreis-hoehenfusspunkte

H_a und H_b sind Scheitel von rechten Winkeln über der Strecke $[AB]$, also liegen beide auf dem Thaleskreis über $[AB]$. Somit gilt $\overline{M_{AB}H_a} = \overline{M_{AB}H_b} = \overline{M_{AB}A}$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 81 ex-geom-ort-ortsbogen0

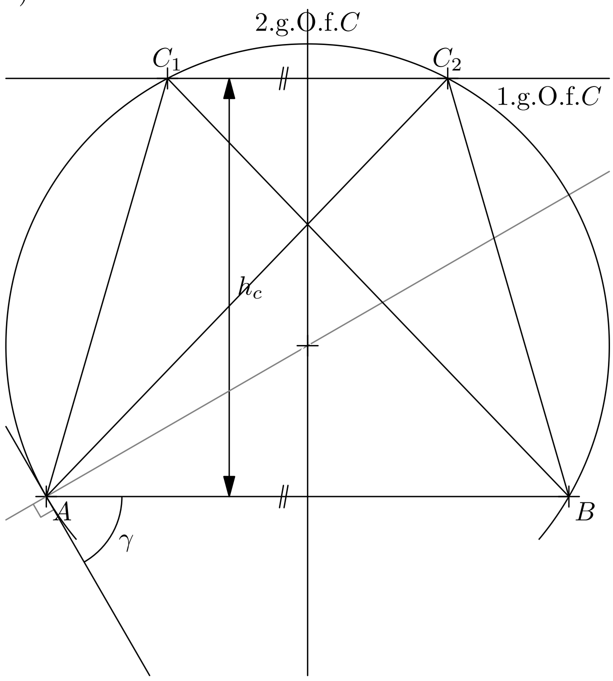
Es gilt: Der Peripheriewinkel ist gleich dem Sehnen-Tangenwinkel. Die Tangente kann also konstruiert werden, indem der Winkel γ an der Strecke $[AB]$ abgetragen wird. Das gesuchte Ortsbogenzentrum muss einerseits auf der Rechtwinkligen dazu liegen, andererseits auf der Mittelsenkrechte m_{AB}.

1. Winkel α bei A abtragen $\to$ Tangente t
2. $\perp$ zu t durch A $\to$ r
3. $m_{AB} \cap r$ $\to$ M
4. $k(M, \overline{MA})$ $\to$ Gesuchter Ortsbogen



Lösung zu Aufgabe 82 ex-geom-ort-ortsbogen1

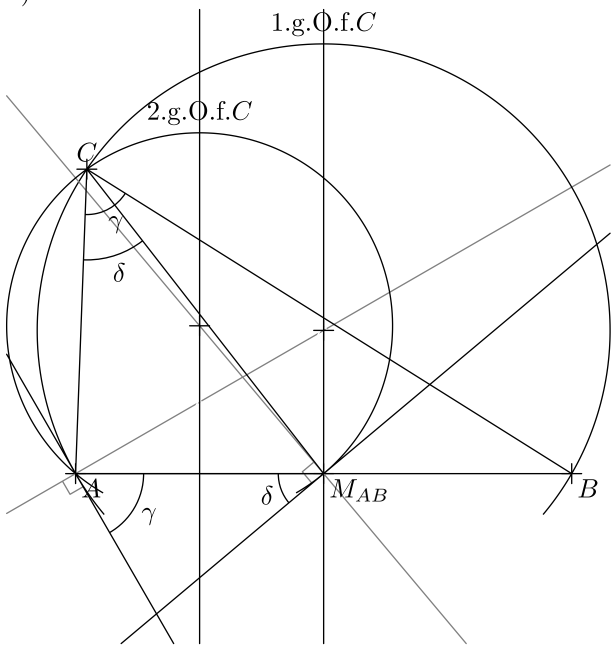
a)



1. $\parallel$ zu AB im Abstand h_c $\to$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 2 Lösungen (die 2 an AB gespiegelten Lösungen mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

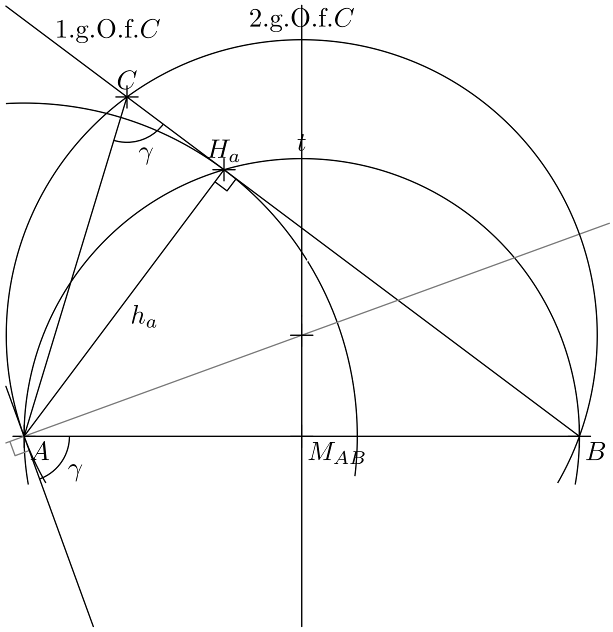
b)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu δ über $[AM_{AB}]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

c)



Zuerst wird der Höhenfusspunkt H_a konstruiert, womit man die Lage der Seite a erhält.

1. Thaleskreis über $[AB]$ $\to t$
2. $t \cap k(A, h_a)$ $\to H_a$
3. BH_a $\to$ 1.g.O.f.C
4. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

Lösung zu Aufgabe 83 ex-geom-ort-kegelschnitte1

a) Es gilt $\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = d$ also $\overline{P_1B_2} = d - \overline{B_1P_1}$. Analog dazu gilt $\overline{P_2B_2} = d - \overline{B_1P_2}$.

1. $k(P_1, d - \overline{B_1P_1})$ $\to k_1$, 1.g.O.f.B_2
2. $k(P_2, d - \overline{B_1P_2})$ $\to k_2$, 2.g.O.f.B_2
3. $k_1 \cap k_2$ $\to$ 2 Lösungen

b)

$$\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = \overline{B_1P_2} + \overline{P_2B_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{P_1B_2} - \overline{P_2B_2} = \overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$$

Die rechte Seite ist konstant, die linke Seite die Differenz der Abstände von B_2 zu zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2. Alle Punkte B_2 liegen also auf einem Hypbel-Ast mit Brennpunkten P_1 und P_2 und Abstandsunterschied $\overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$.

Lösung zu Aufgabe 84 ex-geom-ort-kegelschnitte2

a) Der 1.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{1,1} = k(Z_1, r_1 + r_3)$ und $k_{1,2} = k(Z_1, r_1 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_1 > r_3$.

Der 2.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{2,1} = k(Z_2, r_2 + r_3)$ und $k_{2,2} = k(Z_2, r_2 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_2 > r_3$.

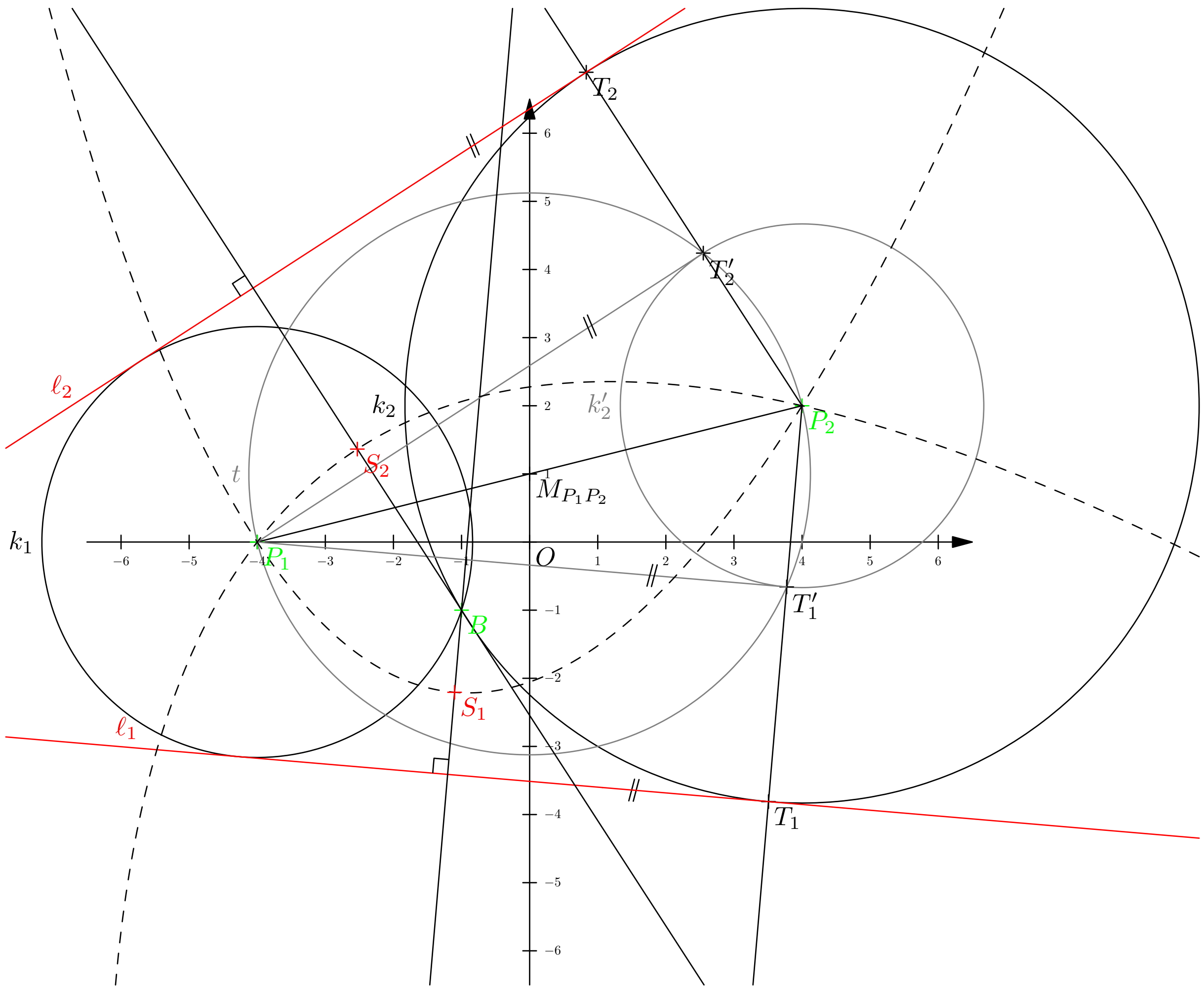
Die Schnittpunkte dieser beiden geometrischen Örter ergeben die möglichen Kreiszentren. Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben (jeder Kreis kann mit den anderen beiden zwischen 0 und 4 Schnittpunkte bilden).

b) Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich nicht und liegen nicht ineinander. Der kleinste Kreis liegt also genau zwischen den beiden Kreisen. Das Kreiszentrum liegt also auf Z_1Z_2 und zwar genau in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Kreise mit $[Z_1Z_2]$.

c) Es gilt $\overline{Z_3Z_1} = r_3 + r_1$ und $\overline{Z_3Z_2} = r_3 + r_2$. Man kennt zwar r_3 nicht, aber für die Differenz gilt: $\overline{Z_3Z_1} - \overline{Z_3Z_2} = (r_3 + r_1) - (r_3 + r_2) = r_1 - r_2$. Damit ist die Abstandsdifferenz zu zwei Punkten konstant, die Punkte Z_3 liegen also auf einem Hyperbelast mit Brennpunkten Z_1, Z_2 und Abstandsdifferenz $r_1 - r_2$.

Lösung zu Aufgabe 85 ex-geom-ort-kegelschnitte3

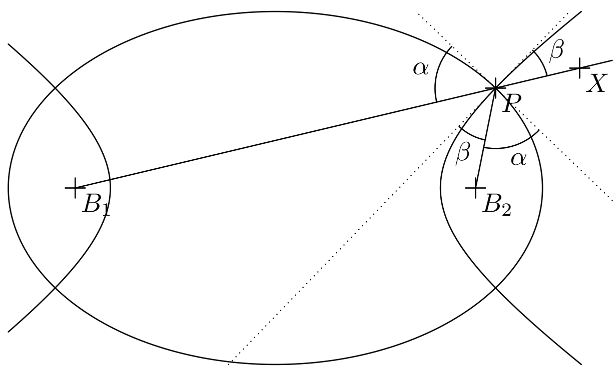
Es gilt $\overline{P_1B} = P\ell$ und damit muss ℓ den Kreis $k(P_1, \overline{P_1B})$ berühren. Analog dazu für P_2. Die Leitlinien sind also gemeinsame Tangenten an diese beiden Kreise. Da sich die Kreise schneiden (in B), gibt es nur zwei solche Tangenten und damit 2 Lösungen.



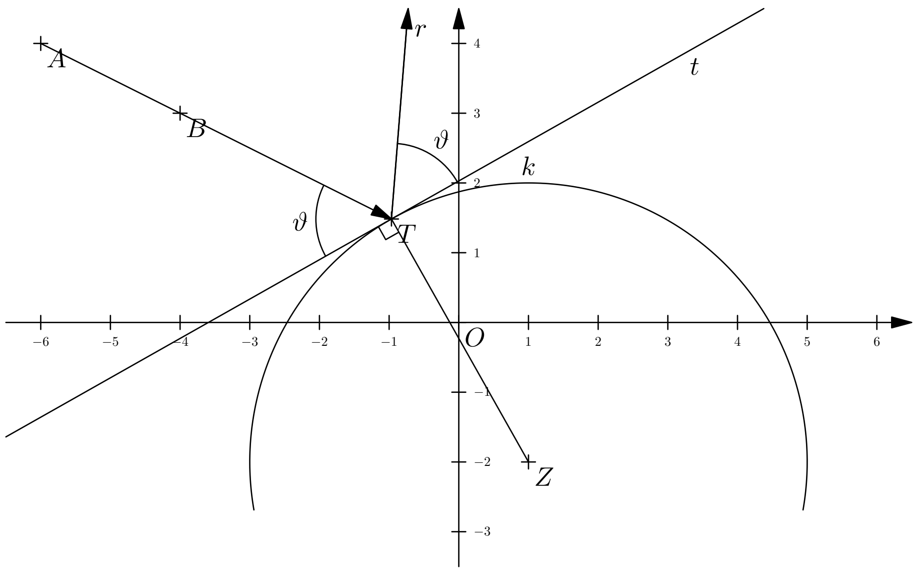
1. $k(P_1, \overline{P_1B}$ $\rightarrow k_1$
2. $k(P_2, \overline{P_2B}$ $\rightarrow k_2$
3. $k(P_2, \overline{P_2B} - \overline{P_1B}$ $\rightarrow k_2'$
4. Thaleskreis über $[P_1P_2]$ $\rightarrow t$
5. $t \cap k_2'$ $\rightarrow T_1', T_2'$
6. $[P_2T_1' \cap k_2$ $\rightarrow T_1$
7. $[P_2T_2' \cap k_2$ $\rightarrow T_2$
8. $\parallel$ zu P_1T_1' durch T_1 $\rightarrow \ell_1$
9. $\parallel$ zu P_1T_2' durch T_2 $\rightarrow \ell_2$
10. $M_{B\ell_1}$ $\rightarrow S_1$
11. $M_{B\ell_2}$ $\rightarrow S_2$

Lösung zu Aufgabe 86 ex-geom-ort-kegelschnitte4

Seien B_1 und B_2 die gemeinsamen Brennpunkte und P ein Schnittpunkt der beiden Kurven.
Aus der Reflexionseigenschaft (Winkel α) in der Ellipse folgt, dass die Tangente an die Ellipse in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_1PB_2$ ist.
Analog bei der Hyperbel (Winkel β) folgt, dass die Tangente an die Hyperpel in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_2PX$ ist.
Da die Geraden B_1P und PX identisch sind, bilden die Tangenten das Winkelhalbierendenpaar zu den Geraden B_1P und B_2P und stehen somit senkrecht aufeinander, was zu beweisen war.

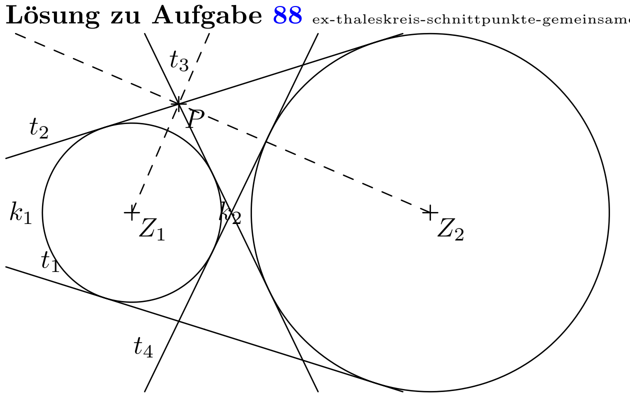


Lösung zu Aufgabe 87 ex-thaleskreis-reflexion-an-kreis



1. $g \cap k$ $\rightarrow T$
2. $\perp$ zu ZT durch T $\rightarrow$ Tangente t
3. $\vartheta = \sphericalangle(g, t)$ $\rightarrow$ Einfallswinkel θ (theta)
4. ϑ an t bei T abtragen $\rightarrow$ Lösung r

Lösung zu Aufgabe 88 ex-thaleskreis-schnittpunkte-gemeinsamer-tangenten



Der Beweis wird hier exemplarisch für den Punkt $P = t_2 \cap t_3$ geführt. Da t_2 und t_3 Tangenten an k_1 sind, halbiert Z_1P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. Analog teilt auch Z_2P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. D.h. Z_1P und Z_2P sind ein Winkelhalbierendenpaar und somit rechtwinklig aufeinander, was beweist, dass P auf dem Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ liegt.

Lösung zu Aufgabe 89 ex-geom-ort-winkelhalbierende

Ein Kreis, der zwei Geraden berührt, muss sein Zentrum Z auf der Winkelhalbierenden haben. Die Konstruktion des Kreiszentrums und des Kreises ist wie folgt:

1. c $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. w_γ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $\perp$ zu b durch Z $\rightarrow g$
4. $g \cap b$ $\rightarrow$ Berührungspunkt P
5. $k(Z, \overline{ZP})$ $\rightarrow$ 1. Lösung

Lösung zu Aufgabe 90 ex-geometrische-oerter5

a)
1. w_{gh}^1, w_{gh}^2 $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar zu g im Abstand 1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z

Es gibt 4 Lösungen.

b)
1. Kreise $k(M_1, 3 \pm 1)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Kreise $k(M_1, 2.5 \pm 1)$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 6 Lösungen.

c)
1. Kreise $k(M, 3 \pm 1)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar zu g im Abstand 1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z

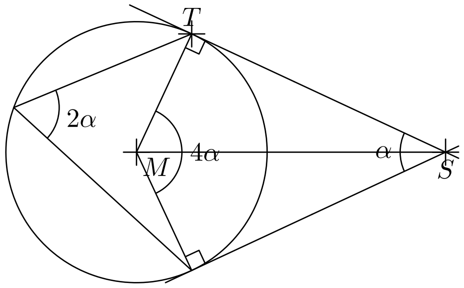
Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 7 Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 91 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen

Sei t die gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 im Punkt B. Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(t, g)$ ist ein Sehnen-Tangenten-Winkel für beide Kreise über den Sehnen $[BT_1]$ und $[BT_2]$. Der andere Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle(t_1, g)$ bzw. $\sphericalangle(t_2, g)$ ist gleich gross wie α. Damit haben wir in den Punkte T_1 und T_2 Wechselwinkel an der Geraden g und damit sind $t_1 \parallel t_2$.

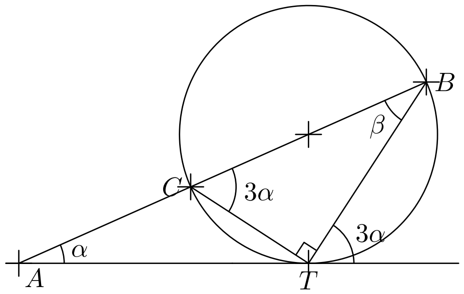
Lösung zu Aufgabe 92 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell

a)



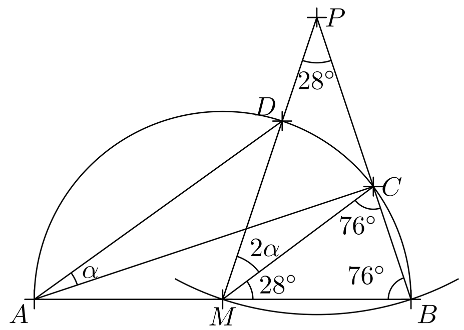
Der Zentriwinkel ist doppelt so gross wie der entsprechende Peripheriewinkel. MS halbiert die Winkel 4α und α.
Im $\triangle MST$ gilt: $180° = 90° + 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, also $\frac{5}{2}\alpha = 90°$ und damit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 90° = 36°$.

b)



$\sphericalangle TCB = 3\alpha$ (Peripheriew. zum Sehnen-Tangenten-W.in T.)
$\sphericalangle CTB = 90°$ (Thaleskreis über $[BC]$).
$\sphericalangle CBT = \beta = 180° - 3\alpha - 90° = 90° - 3\alpha$
$\sphericalangle ATB = 180° - 3\alpha$ (Nebenwinkel).
Im $\triangle ATB$ gilt: $180° = \alpha + (180° - 3\alpha) = (90° - 3\alpha) = 270° - 5\alpha$
Nach α aufgelöst erhält man $\alpha = 18°$.

c)



$\sphericalangle PMC = 2\alpha$ (Zentriwinkel zum Peripheriewinkel α)
$\triangle PMB$ ist gleichschenklig mit Basis $[MB]$ und Basiswinkeln $(180° - 28°)/2 = 76°$.
$\triangle MBC$ ist gleichschenklig mit Basis $[BC]$ und damit ist der Winkel an der Spitze $\sphericalangle BMC = 28°$.
Somit gilt $\sphericalangle PMB = 76° = 2\alpha + 28°$. Also $2\alpha = 76° - 28° = 48°$ und damit $\alpha = 24°$.

Lösung zu Aufgabe 93 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen2

Hinweis: Dieser Beweis geht davon aus, dass $[AB]$ innerhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt:

Die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BDC$ sind Peripheriewinkel über $[AB]$ und damit, unabhängig von g immer gleich gross. Damit ist auch der dritte Winkel im $\triangle BDC$ immer gleich gross, was zu beweisen war.

Wenn $[AB]$ ausserhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt, ist der Peripheriewinkel das Komplement zu 180° und ein Aussenwinkel des Dreiecks, womit der Innenwinkel wieder gleich gross ist.

Lösung zu Aufgabe 94 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen3-geogebra

Annahme: $[AC]$ und $[AD]$ sind die Diagonalen (andernfalls sind C und D zu vertauschen).

Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle ADB$ sind Peripheriewinkel über den Sehnen $[DC]$ und $[AB]$. Diese Winkel sind immer gleich gross, auch wenn die Sehne $[CD]$ auf k wandert. Diese Winkel sind Innenwinkel im $\triangle AXD$ und damit ist der Winkel $\sphericalangle AXD$ auch immer gleich gross. Damit liegen alle möglichen Punkte X auf einem Ortsbogen über $[AB]$.

Lösung zu Aufgabe 95 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell2

Diese Lösung ist für den Fall $\beta > \gamma$.

Sei $T = t \cap a$.

$\sphericalangle BAT = \gamma$ (Sehnen-Tangenten-Winkel zum Peripheriewinkel γ).

β ist Aussenwinkel im $\triangle ABT$ und damit $\beta = \gamma + \delta$ und somit $\delta = \beta - \gamma$.

Im Falle $\gamma = \beta$ gibt es keinen Schnittpunkt (der Winkel zwischen den Geraden ist dann 0°). Wenn $\gamma > \beta$ ist $\delta = \gamma - \beta$ mit ähnlicher Herleitung.

Lösung zu Aufgabe 96 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell3

a) Sei $X = AD \cap CE$ der Diagonalenschnittpunkt.

Es gilt: $\sphericalangle CED = \beta$ (Peripheriewinkel über $[CD]$) und $\sphericalangle AEC = 90° - \alpha$ (Innenwinkelsumme im $\triangle AXE$). Und damit:

$\varepsilon = 90° - \alpha + \beta$

Analog erhält man $\gamma = 90° - \beta + \alpha$.

Im $\triangle EDC$ ist der Winkel bei E gleich gross wie β und der Winkel bei C gleich gross wie α (Periepheriewinkel über gleichen Sehnen). Damit ist

$\delta = 180° - \alpha - \beta$.

b) Der Winkel $\sphericalangle DZC = 2\beta$ ist Zentriwinkel zum Peripheriewinkel β über der Sehne $[CD]$ im kleinen Kreis. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewnkel über $[CD]$ im grossen Kreis. Peripheriewinkel auf gegenüberliegenden Seiten der Kreissehne ergänzen sich zu 180° (die entsprechenden Sehnen-Tangenten-Winkel sind Nebenwinkel). Also gilt folgende Beziehung zwischen α und β:

$$2\beta = 180° - \alpha$$

Hinweis: Die obige Beziehung kann natürlich auch umgeformt und nach α oder β aufgelöst werden.

Lösung zu Aufgabe 97 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen4

Sei $X = w_\gamma \cap u$, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit dem Umkreis. Zu zeigen ist also, dass $X \in m_{AB}$.

Es gilt: $\sphericalangle ACX = \sphericalangle XCB = \frac{1}{2}\gamma$. Da beide Winkel Peripheriewinkel im Umkreis sind, müssen die entsprechenden Sehnen $[AX]$ und $[BX]$ gleich lang sein, d.h. $X \in m_{AB}$, was zu beweisen war.