8 Prozentrechnen

Merke

Prozent (bzw. Promille) heisst «pro Hundert» (bzw. «pro Tausend») und steht somit für Hundertstel (bzw. Tausendstel). Damit gilt z.B. $42\% = \frac{42}{100} = 0.42 = 420‰$.

Aufgabe 152 Geben Sie die Prozentzahlen als reelle Zahl an, bzw. die Zahlen als Prozente.
Beispiel: $42\% = 0.42$

a) 53%	b) 2	c) -0.18	d) 120%
e) -20%	f) 10	g) -1234%	h) $\sqrt{2}$

8.1 Prozente als Teile von Grössen

Gegeben ist eine Grösse a, wie z.B. die Anzahl Schüler einer Schule (1152). Man kennt einen Prozentsatz p (als reelle Zahl!), z.B. beträgt der Anteil Männer 42%. Wie viele männliche Schüler sind an der Schule?
Dreisatz (Holzhackermethode):

Allgemeine Lösung Achtung: p ist eine Zahl, und keine Prozentzahl. Es gilt also $p = p \cdot 100\%$.

Merke

Um $p \cdot 100\%$ einer Grösse g auszurechnen, wird einfach **multipliziert**: $g \cdot p$.

8.2 Prozentuale Zunahme und Abnahme

Aufgabe 153 Eine Grösse g_{alt} wird um $p \cdot 100\%$ vergrössert. Wie gross ist die neue Grösse g_{neu}?

✎

Wird um $p \cdot 100\%$ verkleinert, sieht die Formel wie folgt aus:

✎

Typische Beispiele

✎

Aufgabe 154 Eine Grösse g wächst zunächst um $p \cdot 100\%$ und schrumpft danach um $q \cdot 100\%$.

a) Wie gross ist der Unterschied, wenn die Grösse erst um $q \cdot 100\%$ schrumpft und erst danach um $p \cdot 100\%$ wächst?

b) Was erhält man, wenn $p = q$? Wie gross ist der prozentuale Unterschied der alten und neuen Grösse?

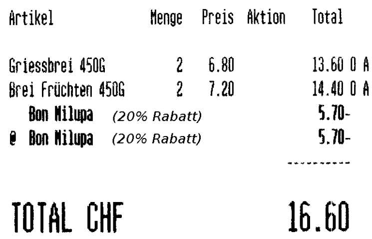
Aufgabe 155

Grosse Einkaufszentren verteilen öfters Rabatt-Coupons. In gewissen Fällen können diese kumuliert werden.

a) Wie wurde in diesem Fall (siehe Quittung) kumuliert?

b) Was ist das Problem bei dieser Art zu kumulieren?

c) Wie sollte eigentlich mathematisch korrekt kumuliert werden? Wie gross wäre dann der effektive Rabatt?



Artikel	Menge	Preis	Aktion	Total
Griessbrei 450G	2	6.80		13.60 0 A
Brei Früchten 450G	2	7.20		14.40 0 A
Bon Milupa		(20% Rabatt)		5.70-
@ Bon Milupa		(20% Rabatt)		5.70-

TOTAL CHF				16.60

Aufgabe 156 Lösen Sie folgende Textaufgaben. Geben Sie jeweils an, welche Grösse 100% entspricht.
Hinweis: Die Aufgaben wurden kreiert von Priska Casanova Blöchliger.

a) Ein Menu wird in einem Restaurant nach einer Preiserhöhung um 2.5% für 22.50 CHF angeboten. Wie teuer war das Menu vor der Preiserhöhung?

b) Der Preis eines Autos erhöht sich durch die Zahlung in Raten auf 42'109.20 CHF, gegenüber 38'990 CHF bei sofortiger Zahlung. Um wie viel Prozent teurer ist der Ratenkauf gegenüber sofortiger Zahlung? Um wieviel Prozent billiger ist die sofortige Zahlung gegenüber dem Ratenkauf?

c) Ein Angestellter bekommt nach Abzügen von 7% 4240.10 CHF Nettolohn ausbezahlt. Wie hoch ist sein Bruttolohn?

d) Eine Immobilienmarklerin verlangt für einen Hausverkauf 1.5% des Kaufpreises. Wie hoch ist ihr Honorar bei einem Einfamilienhaus à 890'000 CHF?

e) Ein langjähriger Kunde eines Möbelgeschäfts erhält 20% auf alle Betten. Er kauft sich ein neues Einzelbett und bezahlt dafür 79.20 CHF. Wie viel bezahlt ein Kunde für das Bett, welcher nicht von diesem Rabatt profitiert?

f) Fritz hat am Jahresanfang 987.25 CHF auf seinem Sparkonto. Während des Jahres hat er kein Geld auf das Konto einbezahlt und nichts abgehoben. Am Jahresende weist das Konto einen Saldo von 1'011.95 CHF auf. Wieviel Prozent Zins hat Fritz erhalten?

g) Martin ist bei seiner Geburt 50 cm lang und 3200g schwer. An seinem 2. Geburtstag misst er 88 cm und wiegt 10.8kg. Um wieviel Prozent ist er seit der Geburt gewachsen? Wie erklären Sie sich den grossen Unterschied der Prozentzahlen?

h) Anna macht Sirup: Auf einen Liter Wasser gibt sie einen Deziliter Sirupkonzentrat. Wie viel Prozent der Flüssigkeit sind Wasser? Welche Angabe fehlt, um die Aufgabe wirklich zu lösen?

i) Der Frauenanteil der Angestellten einer Firma mit 900 Angestellten beträgt 45%. Wie viele Männer sind bei dieser Firma angestellt?

Aufgabe 157

a) Für ein Möbelhaus haben Sie zwei kumulierbare Rabatt-Coupons für ein bestimmtes Sofa. Der eine Coupon bewirkt eine Reduktion um 15% des Preises, der andere einen Nachlass um 100 CHF. Spielt die Reihenfolge des Einlösens eine Rolle? Wenn ja, welche Reihenfolge ist für den Kunden vorteilhafter?

b) Ein Supermarkt gibt Rabatt-Coupons heraus, von denen maximal drei kumuliert werden können. Werden 3 Coupons kumuliert, soll der Rabatt etwas weniger als 50% betragen. Wie gross ist der Rabatt pro Coupon, je nachdem auf welche Art kumuliert wird?

c) In einer SVP-Anzeige (ca. 2007?) wurde die Entwicklung der muslimischen Wohnbevölkerung der Schweiz aus historischen Daten wie folgt prognostiziert:

1980	1990	2000	2010	2020	2030	2040
1.125%	2.25%	4.5%	9%	18%	36%	72%

Welcher mathematischer Gesetzmässigkeit folgen die Prozentzahlen? Warum ist diese Gesetzmässigkeit völlig unrealistisch? Geben Sie eine ganz einleuchtende Begründung warum diese Gesetzmässigkeit unhaltbar ist.

d) Ein Aktie verliert $p \cdot 100\%$ an Wert (mit $0 < p < 1$). Um wieviele Prozent q muss die Aktie wieder zulegen, damit sie wieder gleich viel wert ist? Finden Sie erst eine Formel, um q aus p zu berechnen. Erstellen Sie dann eine Tabelle mit p und q für $p = 5\%, 10\%, 20\%, 50\%, 90\%$.

e) Ein Kapital K_0 wird zu $p \cdot 100\%$ angelegt. Am Ende des Jahres wird der Zins zum Kaptial hinzugeschlagen und man erhält K_1. Dieses neue Kapital wird wieder gleich verzinst und man erhält nach zwei Jahren K_2, etc. Schreiben Sie die Formel für K_1, K_2 und K_3 einmal additiv und einmal multiplikativ auf.

Aufgabe 158

a) Lösen Sie die Ungleichungen von Aufgabe 149, indem Sie die Ungleichungen auf die Form «Bruch $<$ oder ≤ 0» bringen und die Vorzeichen der Faktoren analysieren.

b) $1 + z + z^2 + \dfrac{z^3}{1-z}$

c) $\dfrac{4}{z-1} + \dfrac{z}{z^2-1}$

d) $\dfrac{a+2b+t}{4at+8bt} - \dfrac{1}{4t}$

e) $\dfrac{u}{u-v} - \dfrac{4uv}{u^2-v^2} - \dfrac{v}{v-u}$

f) $\dfrac{b-c}{a^2+ac} - \dfrac{a-c}{ac+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$

g) $\left(\dfrac{2}{m-1} + m + 1\right) \cdot \left(\dfrac{1}{m^2-1} - \dfrac{2m}{m^4-1}\right)$

h) $\dfrac{1}{(x-2)(x-6)} < 0$

i) $\dfrac{6}{x-5} < \dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{x+5}{x-3} \leq 2$

8.3 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 152 ex-prozent-als-reelle-zahl

a) $53\% = 0.53$ b) $2 = 200\%$ c) $-0.18 = -18\%$ d) $120\% = 1.2 = \frac{6}{5}$

e) $-20\% = -0.2 = -\frac{1}{5}$ f) $10 = 1000\%$ g) $-1234\% = -12.34$ h) $\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 100\% \approx 141.42\%$

Lösung zu Aufgabe 154 ex-prozentrechnen-mehrfach-auf-und-ab

a) $g_{\text{neu}} = g_{\text{alt}} \cdot (1+p)(1-q) = g_{\text{alt}} \cdot (1-q)(1+p)$. Es macht also keinen Unterschied!

b) $g_{\text{neu}} = g_{\text{alt}} \cdot (1+p)(1-p) = g_{\text{alt}} \cdot (1-p^2)$. Die Grösse schrumpft also um $p^2 \cdot 100\%$, und zwar unabhängig davon, ob die Grösse erst wächst oder schrumpft.

Lösung zu Aufgabe 155 ex-prozente-kumulieren-bei-coop

a) Die Prozente wurden addiert und der effektive Rabatt beträgt 40%.

b) Mit 5 solchen Coupons (wenn sie kumulierbar wären) wäre die Ware gratis, mit noch mehr Coupons bekäme man zusätzlich noch Geld.

c) Der Betrag sollte zwei mal mit $1 - 0.2 = 0.8$ multipliziert werden, d.h. insgesamt mit 0.64, was einem Rabatt von 36% entspricht (und nicht 40%).

Lösung zu Aufgabe 156 ex-prozentrechnen-textaufgaben-priska

a) 100%: Preis x vor der Erhöhung. Der Preis nach der Erhöhung ist also

$$\begin{aligned} x \cdot (1 + 0.025) &= 22.50 && \mid : 1.025 \\ x &\approx 21.95 \end{aligned}$$

Der Preis vor der Erhöhung betrug 21.95 CHF.

b) **Teil 1**: 100%: Sofortige Zahlung s, Ratenzahlung: $r = (1+p)s$, mit p: Prozentualer Unterschied. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
(1+p)38990 &= 42109.2 \\
38990 + 38990p &= 42109.2 && \mid -38990 \\
38990p &= 3119.2 && \mid : 38990 \\
p &= 0.08
\end{aligned}$$

Der Ratenkauf ist also 8% teurer.

Teil 2: 100% Ratenzahlung r. Sofortige Zahlung $s = (1-q)r$, mit q: prozentualer Unterschied. Wir wissen von oben, dass $r = (1+p)s$. Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
s &= (1-q)(1+p)s && \mid : s \qquad s \neq 0 \\
1 &= (1-q)(1+p) && \mid : (1+p) \qquad p \neq -1 \\
\frac{1}{1+p} &= 1-q && \mid +q - \frac{1}{1+p} \\
q &= 1 - \frac{1}{1+p} \approx 0.074
\end{aligned}$$

Der Sofortkauf ist also um 7.4% billiger.

c) 100%: Bruttolohn b. Nettolohn:

$$\begin{aligned}
(1-0.07)\cdot b &= 4240.10 && \mid : 0.93 \\
b &\approx 4559.25
\end{aligned}$$

Der Bruttolohn beträgt 4559.25 CHF.

d) Honorar $= 890000 \cdot 0.015 = 13350$ CHF.

e) 100%: Vollpreis v. Reduzierter Preis:

$$\begin{aligned}
v \cdot (1-0.2) &= 79.20 && \mid : 0.8 \\
v &= 99
\end{aligned}$$

Der Vollpreis beträgt 99 CHF.

f) 100%: Guthaben $g = 987.25$ am Anfang. Guthaben am Schluss:

$$\begin{aligned}
(1+p)\cdot 987.25 &= 1011.95 && \mid -987.25 \\
p \cdot 987.25 &= 24.7 && \mid : 987.25 \\
p &\approx 0.025
\end{aligned}$$

Der Zins betrug 2.5%.

g) 100%: Gewicht, bzw. Grösse bei Geburt.
Zunahme Gewicht: $3.2 \cdot p = 10.8 - 3.2$ also $p = 237.5\%$.
Zunahme Grösse: $50 \cdot q = 88 - 50$ also $p = 76\%$.
Das Gewicht entspricht in etwa dem Volumen. Vergrössert man z.B. eine Würfelseite um Faktor 2 (d.h. um 100%), wächst das Volumen um Faktor 8 (d.h. 700%). Das Modell ist nicht realistisch (die Proportionen ändern sich während dem Wachstum), aber man würde bei einer Grössenzunahme um den Faktor 1.76 eine Gewichtszunahme von $1.76^3 \approx 5.45$, also 445% erwarten.

h) 100%: 1.1l fertiger Sirup. Anteil Wasser: $\frac{1}{1.1} \approx 0.909 \approx 91\%$.
Im Sirupkonzentrat hat es natürlich auch noch einen unbekannten Anteil an Wasser. Auch ist nicht klar, ob von Volumen- oder Gewichtsprozenten die Rede ist. Geht es um Volumenprozente ist die Antwort sogar annähernd 100%, da das Lösen von Zucker in Wasser das Volumen praktisch nicht ändert.

i) 100%: 900 Angestellte. Anzahl Männer: $900 \cdot 0.55 = 495$.

Lösung zu Aufgabe 157 ex-prozente-knifflige-aufgaben

a) Je grösser der Preis auf den der 15%-Coupon eingelöst wird, desto grösser die Reduktion. Es soll also dieser zuerst eingelöst werden, bevor noch die (konstanten) 100 CHF abgezogen werden.

b) Werden Prozente addiert, soll der Rabatt pro Coupon maximal $\frac{0.5}{3} \approx 16.5\%$ betragen. Also z.B. 15%. Wird jeweils der nächste Coupon über $p \cdot 100\%$ auf den bereits reduzierten Preis angewendet, beträgt der Gesamtrabatt bei 3 Coupons $1-(1-p)^3$. Soll dieser Rabatt 50% betragen, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^3 &= 0.5 && \mid -0.5+(1-p)^3 \\ 0.5 &= (1-p)^3 && \mid \sqrt[3]{\cdot} \quad \text{Die dritte Wurzel} \\ 0.793 &\approx 1-p \end{aligned}$$

D.h. der Rabatt kann pro Coupon bei 20% angesetzt werden. Der Rabatt für 3 Coupons beträgt dann $1-(1-0.2)^3 = 1-0.512 = 0.488 = 48.8\%$.

c) Die Prozentzahlen verdoppeln sich jedes Jahrzehnt.
Das ist völlig absurd, weil im Jahr 2050 dann 144% der Bevölkerung muslimisch wäre.

d) Der Wert nach dem Verlust ist $g_{\text{neu}} = g_{\text{alt}} \cdot (1-p)$. Dieser Wert wird mit $(1+q)$ multipliziert, wobei q der gesuchte Prozentsatz ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} g_{\text{alt}} \cdot (1-p) \cdot (1+q) &= g_{\text{alt}} && \mid : g_{\text{alt}} \\ (1-p)\cdot(1+q) &= 1 && \mid : (1-p) \\ 1+q &= \frac{1}{1-p} && \mid -1 \\ q &= \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{1-(1-p)}{1-p} = \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

p	q
5%	$\frac{1}{19} \approx 0.05263 = 5.263\%$
10%	$\frac{1}{9} \approx= 0.1111 = 11.11\%$
20%	$\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$
50%	$1 = 100\%$
90%	$9 = 900\%$

e)

Additiv	Multipliaktiv
$K_1 = K_0 + pK_0$	$K_1 = K_0(1+p)$
$K_2 = K_0 + pK_0 + p(K_0+pK_0)$	$K_1 = K_0(1+p)^2$
$K_3 = K_0 + pK_0 + p(K_0+pK_0) + p(K_0+pK_0+p(K_0+pK_0))$	$K_1 = K_0(1+p)^3$

Lösung zu Aufgabe 158 ex-repetitions-aufgaben

a) Die Lösungen zu Aufgabe 152 finden Sie online im Kapitel 7 (Ungleichungen und Intervalle).

b) $1+z+z^2+\frac{z^3}{1-z} = \frac{(1-z)(1+z+z^2)}{1-z} + \frac{z^3}{1-z} = \frac{1+z+z^2-(z+z^2+z^3)}{1-z} + \frac{z^3}{1-z} = \frac{1-z^3}{1-z} + \frac{z^3}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

c) $\frac{4}{z-1} + \frac{z}{z^2-1} = \frac{4}{z-1} + \frac{z}{(z+1)(z-1)} = \frac{4(z+1)}{(z-1)(z+1)} + \frac{z}{(z+1)(z-1)} = \frac{4z+4+z}{(z-1)(z+1)} = \frac{5z+4}{z^2-1}$

d) $$\frac{a+2b+t}{4at+8bt} - \frac{1}{4t} = \frac{a+2b+t}{4t(a+2b)} - \frac{1}{4t} = \frac{a+2b+t}{4t(a+2b)} - \frac{a+2b}{4t(a+2b)} = \frac{a+2b+t-(a+2b)}{4t(a+2b)} = \frac{t}{4t(a+2b)} = \frac{1}{4(a+2b)}$$

e) $$\frac{u}{u-v} - \frac{4uv}{u^2-v^2} - \frac{v}{v-u} = \frac{u}{u-v} - \frac{4uv}{(u+v)(u-v)} - \frac{-v}{-(v-u)} =$$
$$\frac{u}{u-v} - \frac{4uv}{(u+v)(u-v)} + \frac{v}{u-v} = \frac{u(u+v)}{(u-v)(u+v)} - \frac{4uv}{(u+v)(u-v)} + \frac{v(u+v)}{(u-v)(u+v)} =$$
$$\frac{u(u+v)-4uv+v(u+v)}{(u+v)(u-v)} = \frac{u^2+uv-4uv+v^2+uv}{(u+v)(u-v)} = \frac{(u-v)^2}{(u+v)(u-v)} = \frac{u-v}{u+v}$$

f) $$\frac{b-c}{a^2+ac} - \frac{a-c}{ac+c^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2} = \frac{b-c}{a(a+c)} - \frac{a-c}{c(a+c)} + \frac{a^2+c^2}{ac(a+c)} =$$
$$\frac{c(b-c)}{ac(a+c)} - \frac{a(a-c)}{ac(a+c)} + \frac{a^2+c^2}{ac(a+c)} = \frac{c(b-c)-a(a-c)+a^2+c^2}{ac(a+c)} =$$
$$\frac{cb-c^2-(a^2-ac)+a^2+c^2}{ac(a+c)} = \frac{cb-c^2-a^2+ac+a^2+c^2}{ac(a+c)} = \frac{cb+ac}{ac(a+c)} = \frac{c(a+b)}{ac(a+c)} = \frac{a+b}{a(a+c)}$$

g) $$\left(\frac{2}{m-1}+m+1\right)\cdot\left(\frac{1}{m^2-1}-\frac{2m}{m^4-1}\right) =$$
$$\left(\frac{2}{m-1}+\frac{(m-1)(m+1)}{m-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{m^2-1}-\frac{2m}{(m^2+1)(m^2-1)}\right) =$$
$$\frac{2+m^2-1}{m-1}\cdot\left(\frac{m^2+1}{(m^2+1)(m^2-1)}-\frac{2m}{(m^2+1)(m^2-1)}\right) = \frac{m^2+1}{m-1}\cdot\frac{m^2+1-2m}{(m^2+1)(m^2-1)} =$$
$$\frac{1}{m-1}\cdot\frac{(m-1)^2}{m^2-1} = \frac{1}{m-1}\cdot\frac{(m-1)^2}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{m+1}$$

h) Diskussion der Vorzeichen der Faktoren:

		2		6	
$(x-2)$	− −	0	· · · · · ·		· · ·
$(x-6)$	− − −		− − − − − −	0	· · ·
Resultat	· · · ·	0	− − − − − −	0	· · ·

Man liest ab, wo der Term (in diesem Fall) negativ ist: $\mathbb{L} =]2,6[$

i) Diese Ungleichung kann auf zwei Arten gelöst werden. Entweder durch Multiplikation mit $(x-5)$, was eine Fallunterscheidung nach sich zieht, oder durch Umformung auf die Form «Produkt<0».

Fallunterscheidung: Multiplikation mit $(x-5)$:

Fall 1 $(x-5)>0$, d.h. $\boxed{x>5}$

$$\begin{aligned} 6 &< \frac{x-5}{2} && \mid \cdot 2 \\ 12 &< x-5 && \mid +5 \\ 17 &< x && \text{und } x>5 \\ \mathbb{L}_1 &=]17,\infty[\end{aligned}$$

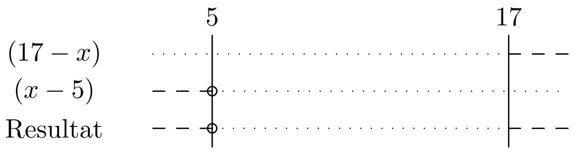
Fall 2 $(x-5)<0$, d.h. $\boxed{x<5}$

$$\begin{aligned} 6 &> \frac{x-5}{2} && \mid \cdot 2 \\ 12 &> x-5 && \mid +5 \\ 17 &> x && \text{und } x<5 \\ \mathbb{L}_2 &=]-\infty,5[\end{aligned}$$

Zusammengefasst: $\mathbb{L}=]-\infty,5[\,\cup\,]17,\infty[$

Vorzeichendiskussion:

$$\begin{aligned} \frac{6}{x-5} &< \frac{1}{2} && \mid -\frac{1}{2} \\ \frac{6}{x-5}-\frac{1}{2} &< 0 \\ \frac{2\cdot 6}{2(x-5)}-\frac{x-5}{2(x-5)} &< 0 \\ \frac{12-(x-5)}{2(x-5)} &< 0 && \mid \cdot 2 \\ \frac{17-x}{x-5} &< 0 \end{aligned}$$



Man liest ab, wo der Term negativ ist: $\mathbb{L}=]-\infty,5[\,\cup\,]17,\infty[$

j) Diese Ungleichung kann auf zwei Arten gelöst werden. Entweder durch Multiplikation mit $(x-3)$, was eine Fallunterscheidung nach sich zieht, oder durch Umformung auf die Form «Produkt<0».

Fallunterscheidung: Multiplikation mit $(x-3)$:

Fall 1 $(x-3)>0$, d.h. $\boxed{x>3}$

$$\begin{aligned} x+5 &\leq 2(x-3) & \\ x+5 &\leq 2x-6 & \quad \mid -x+6 \\ 11 &\leq x & \quad \text{und } x>3 \\ \mathbb{L}_1 &= [11,\infty[& \end{aligned}$$

Fall 2 $(x-3)<0$, d.h. $\boxed{x<3}$

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 2(x-3) & \\ x+5 &\geq 2x-6 & \quad \mid -x+6 \\ 11 &\geq x & \quad \text{und } x<3 \\ \mathbb{L}_1 &=]-\infty,3[& \end{aligned}$$

Zusammengefasst: $\mathbb{L}=]-\infty,3[\,\cup\,[11,\infty[$

Vorzeichendiskussion:

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-3} &\leq 2 & \quad \mid -2 \\ \frac{x+5}{x-3}-2 &\leq 0 & \\ \frac{x+5}{x-3}-\frac{2(x-3)}{x-3} &\leq 0 & \\ \frac{x+5-(2x-6)}{x-3} &\leq 0 & \\ \frac{11-x}{x-3} &\leq 0 & \end{aligned}$$

		3		11	
$(11-x)$	$\cdots$	|	$\cdots$	|	$--$
$(x-3)$	$--$	$\circ$	$\cdots$	|	$\cdots$
Resultat	$--$	$\circ$	$\cdots$	|	$--$

Man liest ab, wo der Term negativ oder Null ist: $\mathbb{L}=]-\infty,3[\,\cup\,[11,\infty[$