14 Rationale Exponenten

Merke Potenzgesetze

Bei einer Potenz x^y nennt man x die **Basis** und y den **Exponenten**.
Für ganzzahlige Exponenten $n, m \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Daraus lassen sich folgende Gesetze ableiten:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Die Potenzgesetze, die wir für natürliche Exponenten bewiesen haben, wurden auf ganzzahlige Exponenten erweitert. Jetzt möchten wir diese Gesetze auf gebrochene Exponenten erweitern, so dass die bekannten Gesetze weiterhin gültig bleiben.

Aufgabe 241 Finden Sie heraus, wie $5^{\frac{1}{2}}$ definiert werden sollte, damit die Potenzgesetze weiterhin gültig sind. *Hinweis: Potenzieren Sie mit einem geeigneten natürlichen Exponenten, damit etwas Bekanntes entsteht.*

Aufgabe 242 Begründen Sie, warum man $5^{\frac{1}{2}}$ nicht als $-\sqrt{5}$ definieren kann. *Hinweis: Betrachten Sie dazu* $\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

Definition 29

Für $a \in \mathbb{R}_0^+$ (eine nicht-negative reelle Zahl) definieren wir:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Damit folgen aus den Potenzgesetzen die Wurzelgesetze:

Merke

Für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$$

Achtung:

B Summen sind doof: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. B

Aufgabe 243 Schreiben Sie das Resultat als eine einzige Potenz mit einem rationalem Exponenten.
Beispiel: $\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

a) $x^2 \cdot \sqrt{\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{\sqrt{x^3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}}}$

d) $x^2 \cdot \dfrac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x^5} \cdot x}$

e) $\dfrac{\left(\sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{\left(\sqrt{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}}$

f) $\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}$

14.1 n-te Wurzeln

Aufgabe 244 Bei der temperierten Klavierstimmung ist das Verhältnis der Frequenzen zweier aufeinanderfolgenden Tönen immer gleich (z.B. von e zu f). Für die Oktave (12 Halbtöne) ist das Verhältnis $1:2$. Mit welchem Faktor λ muss die Frequenz eines Tones multipliziert werden, damit der Ton einen Halbton höher wird? *Hinweis: Tut man dies 12 Mal, erhält man eine Oktave, also eine Frequenz-Verdoppelung. Stellen Sie damit eine Gleichung für λ auf und potenzieren Sie die Gleichung mit einem geeigneten Exponenten, um diese aufzulösen.*

Definition 30 n-te Wurzeln

Für $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist die n-te Wurzel aus a (geschrieben $\sqrt[n]{a}$) als jene Zahl definiert, die mit n potenziert a ergibt:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Merke

Die Wurzelgesetze sind auch für n-te Wurzeln gültig.

Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind **nur für positive Basen** definiert.

Aufgabe 245 Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat als eine einzige Potenz von x mit rationalem Exponenten:

a) $\sqrt{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[2]{x^5}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}}{\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x^5}}}$

c) $\left(\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}}$

d) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}}}$

f) $\sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x}}}}$

Aufgabe 246

a) Die Schweizer Nationalbank gibt zur Zeit (November '16) Bundesanleihen mit einer Laufzeit von 42 Jahren heraus. Der gesamte Zins (mit Zinseszins über die 42 Jahre) beläuft sich auf 23.3%. Wie gross ist der jährliche Zinssatz?
Hinweis: Stellen Sie eine Gleichung für den jährlichen Zinssatz auf, isolieren Sie dann die Potenz und potenzieren Sie dann die Gleichung auf beiden Seiten mit einem geeigneten Exponenten.
Siehe auch `http://www.snb.ch/de/ifor/finmkt/chmarket/id/finmkt_chmarket_fedbonds`.

b) Eine Quinte ist ein Tonabstand von 7 Halbtönen. Wird eine Violine nach Gehör gestimmt, werden die Quinten (Tonabstand zweier Saiten) rein gestimmt. Das Frequenzverhältnis ist genau $1 : \frac{3}{2}$. Das Klavier hingegen ist temperiert gestimmt. Wenn man annimmt, dass das Kammer-a (a1) beider Instrumente auf genau 440 Hz gestimmt ist, um wieviel Prozent unterscheiden sich die Frequenzen der Quinte darüber (e2) der beiden Instrumente? Siehe auch Aufgabe 244.
Zusatzaufgbe: Mit Hilfe eines Computers (z.B. mit Geogebra) schätzen Sie die Frequenz der entstehenden Schwebung ab, wenn beide Instrumente das e2 spielen. Können Sie diese Frequenz exakt berechnen?

c) Mit welchem Streckfaktor λ muss ein Würfel gestreckt werden, damit sich sein Volumen halbiert? Anwendung: Ein Würfel mit Kantenlänge 10 cm hat ein Volumen von 1 l. Welche Kantenlänge hat ein Würfel von 0.5 l Volumen?

14.2 Normalform von Wurzeltermen

Definition 31 Normalform

Ein Wurzelterm in Normalform sieht wie folgt aus:

$$q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \ldots + q_m\sqrt{n_m} \qquad \text{mit } q_0, \ldots, q_m \in \mathbb{Q} \text{ und } n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$$

wobei alle n_i voneinander verschieden und wurzelfrei sind (d.h. sie haben keine Quadratzahl als Teiler).

Merke Normalform

- Wurzeln im Nenner: Erweitern. Beispiel $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Quadrate unter der Wurzel: Vorziehen. Beispiel $\sqrt{27} = \sqrt{9\cdot 3} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3}$.

Aufgabe 247 Schreiben Sie in Normalform. *Hinweis: Primfaktorenzerlegung kann helfen.*

a) $\sqrt{240}$ b) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}$ c) $\sqrt{8}+\sqrt{32}$ d) $\sqrt{4000}$

e) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}}$ g) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)$ h) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 248 Bringen Sie auf Normalform. Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ d) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

14.3 Wurzelgleichungen

Merke

Wird eine Gleichung auf beiden Seiten **quadriert**, ist das eine **Gewinnumformung**, d.h. es können Lösungen dazu kommen, die keine Lösung der ursprünglichen Gleichung sind. Es muss am Schluss also eine **Probe** gemacht werden.

Aufgabe 249 Lösen Sie nach x auf:

a) $\sqrt{x+7} = 7$ b) $\sqrt{x+7} = -7$

c) $\sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x+7}$ d) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x-3} = \sqrt{x+7}$

Aufgabe 250 Lösen Sie die Gleichungen mit folgender Lösungsstrategie: Nach dem ersten Quadrieren wird noch eine Wurzel übrigbleiben. Formen Sie dann die Gleichung so um, dass die Wurzel alleine auf einer Seite steht und quadrieren Sie nochmals.

a) $\sqrt{4x+5} = \sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}$ b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$

14.4 Berechnung von n-ten Wurzeln

Aufgabe 251 Mit Hilfe eines Taschenrechners, aber **nur** unter der Verwendung der Grundoperationen (Addtion, Subtraktion, Multiplikation, Division), bestimmen Sie auf 5 Stellen nach dem Komma genau.

a) $\sqrt{378}$ b) $\sqrt{9779}$

Beschreiben Sie Ihr Verfahren so genau, dass eine Mitschülerin dieses nachvollziehen könnte. Schätzen Sie ab, wie viele Rechenoperationen (bzw. Tastendrücke auf dem TR) Sie in etwa brauchen, um die 5 Nachkommastellen zu bestimmen. Schätzen Sie ab, wie viele Schritte Sie bräuchten, um 10 Nachkommastellen zu erhalten.

Aufgabe 252 Berechnet man eine Wurzel, entspricht das der Berechnung der Quadratseite s eines Quadrates mit gegebenem Flächeninhalt A. Also $s = \sqrt{A}$.
Dazu geht man nun wie folgt vor:

Schritt 1 Man schätze s (z.B. 1).

Schritt 2 Man berechne die Seite b eines Rechtecks mit Fläche A, wenn die andere Seite s (die aktuelle Schätzung) ist.

Schritt 3 Die Wurzel muss dazwischen liegen. Neue Schätzung s ist der Durchschnitt von s und b.

Schritt 4 Wenn die aktuelle Schätzung s nicht gut genug ist, gehe zu Schritt 2. Sonst Ende.

Wie viele Durchgänge brauchen Sie, um 5 Nachkommastellen zu bestimmen? Wie viele Durchgänge für 10 Stellen?

Aufgabe 253 Mit Hilfe eines Taschenrechners, aber **nur** unter der Verwendung der Grundoperationen (Addtion, Subtraktion, Multiplikation, Division), bestimmen Sie auf 5 Stellen nach dem Komma genau.

a) $\sqrt[3]{10'974}$ b) $\sqrt[3]{37'037}$

c) $\sqrt[4]{77'160}$ d) $\sqrt[5]{5'292}$

Aufgabe 254 Entwickeln Sie ein Verfahren wie in Aufgabe 252 für 3. Wurzeln. Versuchen Sie, das Verfahren auf n-te Wurzeln zu verallgemeinern.

14.5 Potenzfunktionen

Definition 32 Potenzfunktion

Eine Potenzfunktion kann in der Form

$$f(x) = a \cdot x^p$$

geschrieben werden, mit $a \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{Q}$.

Merke Definitionsbereich

Der Definitionsbereich einer Potenzfunktion hängt von p ab:

$p \in \mathbb{N}^+$ *«N plus»*	$\mathbb{D} =$	$f(x) =$
$p \in \mathbb{Z}_0^-$ *«Z Null minus»*	$\mathbb{D} =$	$f(x) =$
$p \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$ *«Q plus ohne N»*	$\mathbb{D} =$	$f(x) =$
$p \in \mathbb{Q}^- \setminus \mathbb{Z}$ *«Q minus ohne Z»*	$\mathbb{D} =$	$f(x) =$

Aufgabe 255 Bestimmen Sie die Parameter a und p folgender Potenzfunktionen. Die Funktionsterme müssen z.T. erst umgeformt werden.

a) $f(x) = 3x^4$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ d) $f(x) = 1$

e) $f(x) = 0$ f) $f(x) = x$ g) $f(x) = -\sqrt{4x}$ h) $f(x) = \frac{9}{(-3x)^3}$

Aufgabe 256 Auf ein A4-Blatt, mit Nullpunkt in der Blattmitte, zeichnen Sie ein Koordinatensystem, das das Intervall $[-1.5, 1.5]$ auf der x-Achse und $[-3, 3]$ auf der y-Achse abdeckt. Die Einheit soll etwa 4 cm betragen. In dieses Koordinatensystem, zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^p$ für Werte von $p = 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{2}$.

Aufgabe 257 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Potenzfunktionen, die Sie in Aufgabe 256 gezeichnet haben mit dem achsenparallelen Rechteck, aufgespannt durch die Punkte $(-1.5, 3)$ und $(1.5, -3)$.

Aufgabe 258 Beschreiben Sie, wie folgende Funktionsgraphen für sehr grosse $n \in \mathbb{N}$ aussehen würden:

a) $f(x) = x^n$ für gerade n b) $f(x) = x^n$ für ungerade n c) $f(x) = \sqrt[n]{x}$

d) $f(x) = x^{-n}$ für gerade n e) $f(x) = x^{-n}$ für ungerade n f) $f(x) = x^{-\frac{1}{n}}$

Aufgabe 259 Um die Helligkeit von LEDs zu regulieren, wird i.A. nicht der Strom durch die LED reguliert, da dies eine komplizierte und/oder energetische ineffiziente elektronische Schaltung zur Folge hätte. Statt dessen wird die LED schnell ein- und ausgeschaltet. Je nach zeitlichem Anteil der Anschaltphase, wird die LED verschieden hell wahrgenommen. Man spricht vom «Duty-Cycle». 0% heisst immer ausgeschaltet, 100% heisst immer eingeschaltet, 25% heisst z.B. während 250 μs eingeschaltet und während 750 μs ausgeschaltet (was einer Frequenz von 1 kHz entspricht).

Die menschliche Wahrnehmung der Lichtintensität ist nicht linear, d.h. der wahrgenommene Helligkeitsunterschied zwischen 10% und 20% Duty-Cycle ist viel grösser, als zwischen 80% und 90%.

Sei $x \in [0, 1]$ die wahrgenommene Intensität. Gesucht ist eine Funktion $f(x)$, die den passenden Duty-Cycle, ebenfalls $\in [0, 1]$ liefert. Skizzieren Sie, wie die Funktion $f(x)$ in etwa aussehen könnte. Wie könnte der Funktionsterm von $f(x)$ konkret aussehen?

Hinweis: Diese Art von Umrechnung zwischen energetischer und wahrgenommener Helligkeit wird in der digitalen Bildverarbeitung auch «Gammakorrektur» genannt (siehe online für mehr Information dazu).

14.6 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 260 Für positive Basen und natürliche Exponenten, beweisen Sie die Potenzgesetze (siehe Merke-Box «Potenzgesetze» auf Seite 79). D.h. schreiben Sie einfach nachvollziehende Umformungen auf, damit die Gesetze einleuchten.

Aufgabe 261 Repetieren Sie Aufgaben 243 und 245.

Aufgabe 262 Das Hypervolumen eines 4-dimensionalen Hyperwürfels mit Seitenlänge s ist s^4.
Wie lange ist die Seitenlänge eines 4-dimensionalen Hyperwürfels mit Hypervolumen a) 1 m^4 und b) 0.5 m^4?
c) Mit welchem Streckfaktor muss ein 4-dimensionaler Hyperwürfel gestreckt werden, damit sich sein Hypervolumen verhundertfacht?

Aufgabe 263 Ohne die Gleichungen zu lösen, begründen Sie, warum folgende Gleichungen keine Lösung haben. Betrachten Sie dazu z.B. die Vorzeichen der Seiten der Gleichungen, welche Werte für x auf beiden Seiten überhaupt in Frage kommen und die Tatsache, dass wenn für positive Zahlen a, b gilt $a < b$, dann ist auch $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

a) $\sqrt{x+4} = -4$ b) $-\sqrt{x-5} = 5$ c) $\sqrt{x-4} = \sqrt{-x-4}$

d) $x^2 = -\sqrt{x+2}$ e) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$ f) $\sqrt{x-4} = 2 - x$

14.7 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 241 ex-hoch-einzweitel-herleiten
Wenn man mit 2 potenziert erhält man, laut Potenzgesetzen:

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5^1 = 5$$

Also muss $5^{\frac{1}{2}}$ jene Zahl sein, die quadriert 5 ergibt. Diese Zahl nennen wir $\sqrt{5}$.

Lösung zu Aufgabe 242 ex-hoch-einzweitel-ist-positiv
$\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{4}\cdot 2} = 5^{\frac{1}{2}}$. Ein Quadrat ist immer positiv, daher muss $5^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{5}$ sein.

Lösung zu Aufgabe 243 ex-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

a) $x^2 \cdot \sqrt{\sqrt{x}} = x^2 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{9}{4}}$

b) $\sqrt{\sqrt{x^3}} = \left(\left(x^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$

d) $x^2 \cdot \dfrac{\sqrt{x^3}\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x^5}\cdot x} = x^2 \cdot \dfrac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{8}}}}{x^{\frac{5}{2}}\cdot x} = x^2 \cdot \dfrac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}} = \dfrac{x^{\left(2+\frac{3}{2}+\frac{3}{8}\right)}}{x^{\frac{7}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{31}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}} = x^{\left(\frac{31}{8}-\frac{7}{2}\right)} = x^{\frac{3}{8}}$

e) $\dfrac{\left(\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{\left(\sqrt{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{9}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{3}{2}}$

f) $\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}} = \sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}} = \sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot x^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{x\cdot\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}} = \sqrt{x\cdot x^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{x^{\frac{15}{8}}} = x^{\frac{15}{16}}$

Lösung zu Aufgabe 244 ex-zwoelfte-wurzel-aus-zwei
Für den Faktor λ gilt

$$\lambda^{12} = 2$$

Um den Exponenten 12 zum Verschwinden zu bringen, werden beide Seiten mit $\frac{1}{12}$ potenziert:

$$\left(\lambda^{12}\right)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{12}}$$
$$\lambda = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1.059463$$

Lösung zu Aufgabe 245 ex-nte-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

a) $\sqrt{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[2]{x^5}} = \sqrt{(x^2)^{\frac{1}{5}} \cdot (x^5)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{5}{2}}} = \left(x^{\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{29}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{29}{20}}$

b) $\dfrac{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x^5}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{x^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{8}} = x^{\frac{5}{24}}$

c) $\left(\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = x^{-\frac{1}{25}}$

d) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}} = x^{\frac{1}{n^3}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{x^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{30}}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{13}{60}}} = x^{\frac{7}{60}}$

f) $\sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x}}}} = \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}}} = \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \left(x^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}} = \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot x^{\frac{n+1}{n^2}}}} =$
$\sqrt[n]{x \cdot \left(x^{\frac{n^2+n+1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}}} = \left(x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^4}}$

Lösung zu Aufgabe 246 ex-nte-wurzeln-textaufgaben

a) Sei p der unbekannte jährliche Zinssatz. Damit ist nach 42 der Faktor, mit dem das anfängliche Kapital multipliziert wird:

$$\begin{aligned} (1+p)^{42} &= 1+0.233 && \mid (\cdot)^{\frac{1}{42}} \\ 1+p &= 1.233^{\frac{1}{42}} && \mid -1 \\ p &= \sqrt[42]{1.233} - 1 \approx 0.005 \end{aligned}$$

Der Zinssatz beträgt also 0.5%.

b) Das Frequenzverhältnis zweier benachbarter Halbtöne ist bei der temperierten Stimmung $\sqrt[12]{2}$. Der temperierten Quinte (7 Halbtöne) enstpricht also ein Verhältnis von $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 2^{\frac{7}{12}} \approx 1.498307$. Der prozentuale Unterschied zu 1.5 (reine Quinte) ist also

$$\frac{1.5 - 2^{\frac{7}{12}}}{1.5} \approx 0.0011286 \approx 0.1139\%$$

D.h. die Tonfrequenz vom e2 auf dem Klavier ist um gut 1‰ kleiner.

Zusatzaufgabe: Beim Kammer-a von 440 Hz ergibt sich für das reine e2 eine Frequenz von 660 Hz, für das temperierte e2 $440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \approx 659.26$ *Hz. Zeichnet man die entsprechenden Schwingungen in Geogebra, liest man eine Frequenz von ca.* $\frac{1}{1.4} \approx 0.7$ *ab. Man kann auch die Zeit berechnen, nachdem der Unterschied der Winkel beider Schwingungen genau 360° beträgt:*

$$\begin{aligned}
t \cdot 660 \cdot 360° &= t \cdot 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \cdot 360° + 360° && \mid : 360° \\
t \cdot 660 &= t \cdot 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} + 1 && \mid -t \cdot 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \\
t \cdot \left(440 \cdot 1.5 - 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}}\right) &= 1 && \\
t \cdot 440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right) &= 1 && \mid : \left(440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right)\right) \\
t &= \frac{1}{440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right)} \approx 1.342 &&
\end{aligned}$$

D.h. die Schwebung hat eine Periode (Schwingungsdauer) von 1.342 s, d.h. der Kehrwert davon ist die Frequenz, also $440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right) \approx 0.7448$ *Hz.*

c) Das Volumen wird mit Faktor λ^3 multipliziert. Wir suchen also λ so, dass:

$$\begin{aligned}
\lambda^3 &= \frac{1}{2} && \mid (\cdot)^{\frac{1}{3}} \\
\lambda &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.5} \approx 0.7937 &&
\end{aligned}$$

D.h. Ein Würfel mit Kantenlänge ca. 79.4 mm Kantenlänge hat ein Volumen von 0.5 l.

⚒ Lösung zu Aufgabe 247 ex-wurzelterme-mit-zahlen-auf-normalform-bringen

a) $\sqrt{240} = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 5} = 4 \cdot \sqrt{15}$

b) $\sqrt{35} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{21} = \sqrt{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

c) $\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2} + \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{4000} = \sqrt{2^5 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 20\sqrt{10}$ oder einfacher: $\sqrt{4000} = \sqrt{400 \cdot 10} = \sqrt{20^2 \cdot 10} = 20 \cdot \sqrt{10}$

e) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

f) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\dfrac{18}{12}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \sqrt{\dfrac{6}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

g) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{8} - \sqrt{6}\right) = \sqrt{2 \cdot 8} + \sqrt{3 \cdot 8} - \sqrt{2 \cdot 6} - \sqrt{3 \cdot 6} = 4 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{35}}{5}$

Lösung zu Aufgabe 248 ex-wurzelterme-mit-zahlen-auf-normalform-mit-binomischer

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{x+\sqrt{xy}}{x-y}$

Lösung zu Aufgabe 249 ex-wurzelgleichungen-easy

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} &= 7 && \mid (\cdot)^2 \\ x+7 &= 49 && \mid -7 \\ x &= 42 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{42+7} = \sqrt{49} = 7$. Also ist 42 eine Lösung der Ursprungsgleichung.

b) Die Gleichung hat keine Lösung.
Man könnte die Gleichung wie Aufgabe a) lösen, die Probe machen und feststellen, dass man eine Scheinlösung erhalten hat. Man könnte aber auch sofort einsehen, dass in der Ausgangsgleichung das Resultat einer Wurzel nie negativ (-7) sein kann.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} &= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x+7} && \mid (\cdot)^2 \\ x-3 &= \frac{4}{2}(x+7) \\ x-3 &= 2x+14 && \mid -x-14 \\ -17 &= x \end{aligned}$$

Probe: Die rechte Seite ergibt $\sqrt{-20}$, womit diese Gleichung keine Lösung hat.

d)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x-3} &= \sqrt{x+7} && \mid (\cdot)^2 \\ \frac{4}{2}\cdot(x-3) &= x+7 \\ 2x-6 &= x+7 && \mid -x+6 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Probe: $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{10} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{20}$

Damit ist $x = 13$ eine Lösung der Ursprungsgleichung.

Lösung zu Aufgabe 250 ex-wurzelgleichungen-hard

a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x+5} &= \sqrt{x-1}+\sqrt{x+4} && |(\cdot)^2\\
4x+5 &= x-1+x+4+2\sqrt{(x-1)(x+4)} && |-2x-3\\
2x+2 &= 2\sqrt{x^2+3x-4} && |:2\\
x+1 &= \sqrt{x^2+3x-4} && |(\cdot)^2\\
x^2+2x+1 &= x^2+3x-4 && |-x^2-2x+4\\
5 &= x
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man eine wahre Aussage, $x = 5$ ist also die Lösung der Gleichung.

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1} && |(\cdot)^2\\
x-2 &= x+3+x-1+2\sqrt{(x+3)(x-1)} && |-2x-2\\
-x-4 &= 2\sqrt{x^2+2x-3} && |(\cdot)^2\\
x^2+8x+16 &= 4x^2+8x-12 && |-x^2-8x+12\\
28 &= 3x^2 && |:3\\
\frac{28}{3} &= x^2\\
x &= \pm\sqrt{\frac{28}{3}}
\end{aligned}$$

Die negative Lösung scheidet aus, weil $\sqrt{x-1}$ nicht definiert ist. Die positive Lösung ist etwas grösser als 3 (da $\frac{28}{3} > 9$), damit sind alle Zahlen unter den Wurzeln positiv.

Allerdings ist $\sqrt{x-2}$ immer kleiner als $\sqrt{x+3}$ und damit ganz sicher kleiner als $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$. Somit hätte man auch von Anfang an sehen können, dass die Gleichung keine Lösung haben kann.

Resultat: Die Gleichung hat **keine Lösung**.

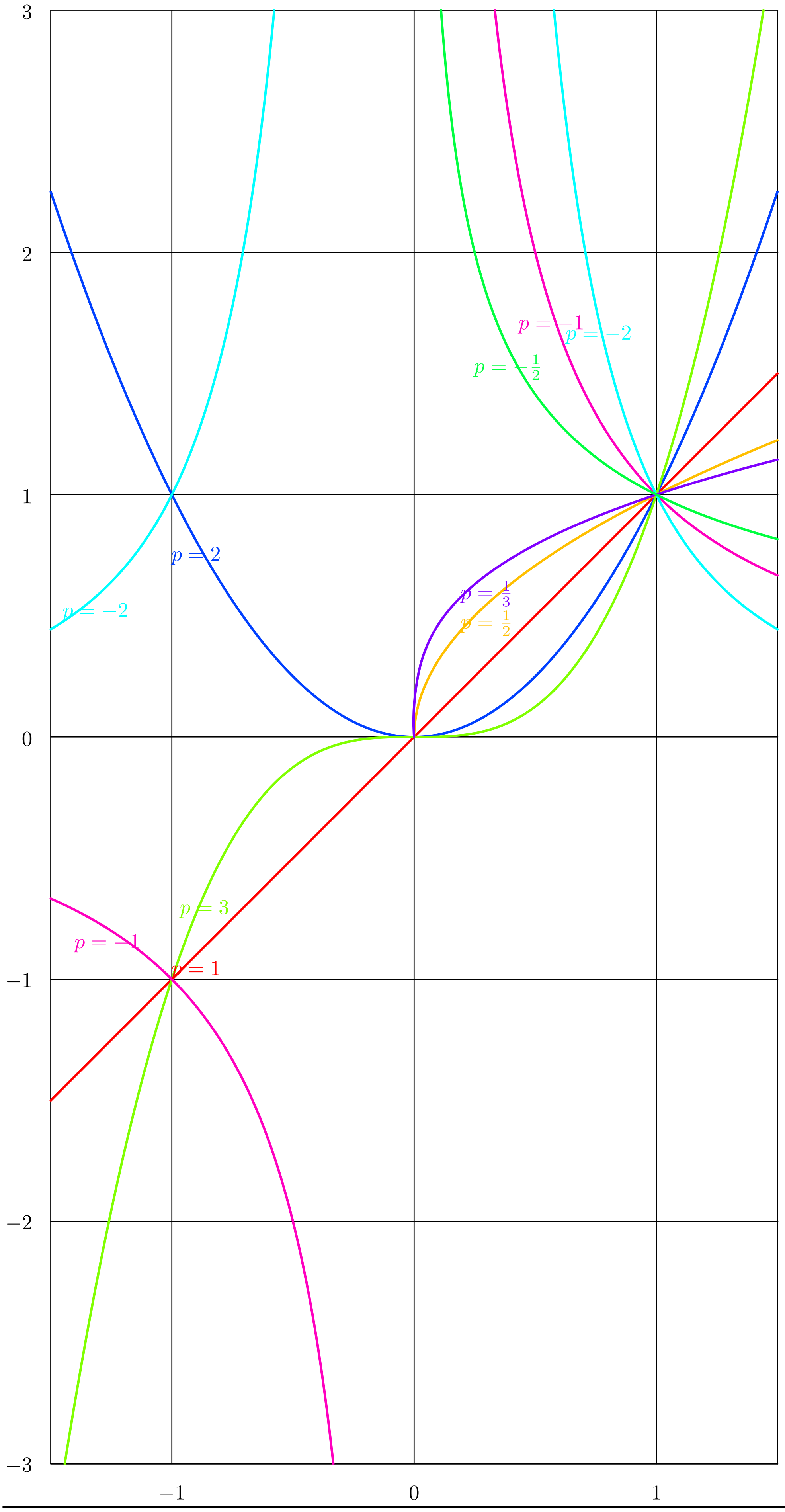
Lösung zu Aufgabe 255 ex-potenzfunktionen-parameter-bestimmen-formal

a) $a = 3$, $p = 4$ b) $a = -1$, $p = 2$ c) $a = \frac{1}{2}$, $p = -2$

d) $a = 1$, $p = 0$ ($f(x) = 1$ ist nur mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}^\star$ eine Potenzfunktion, weil $f(0) = 1 \cdot 0^0$ nicht definiert ist).

e) $a = 0$, p unbestimmt f) $a = 1$, $p = 1$ g) $a = -2$, $p = \frac{1}{2}$ h) $a = -\frac{1}{3}$, $p = -3$

Lösung zu Aufgabe 256 ex-potenzfunktionen-spinne-zeichnen


3
2
1
0
−1
−2
−3
−1
0
1
$p = -1$
$p = -2$
$p = -\frac{1}{2}$
$p = 2$
$p = -2$
$p = \frac{1}{3}$
$p = \frac{1}{2}$
$p = 3$
$p = -1$
$p = 1$

Lösung zu Aufgabe 257 ex-potenzfunktionen-spinne-analysieren

$p = 1$	$(-1.5, -1.5)$ und $(1.5, 1.5)$
$p = 2$	$(-1.5, 2.25)$, und $(1.5, 2.25)$
$p = 3$	$\left(-\sqrt[3]{3}, -3\right)$, und $\left(\sqrt[3]{3}, 3\right)$
$p = -1$	$\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$ und $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ und $\left(-1.5, -\frac{2}{3}\right)$ und $\left(1.5, \frac{2}{3}\right)$
$p = -2$	$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 3\right)$ und $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 3\right)$ und $\left(-1.5, \frac{4}{9}\right)$ und $\left(1.5, \frac{4}{9}\right)$
$p = \frac{1}{2}$	$\left(1.5, \sqrt{1.5}\right)$
$p = \frac{1}{3}$	$\left(1.5, \sqrt[3]{1.5}\right)$
$p = -\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{9}, 3\right)$ und $\left(1.5, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right)$

Lösung zu Aufgabe 258 ex-potenzfunktionen-grosse-n

Zuerst ist zu bemerken, dass diese Funktionen immer druch den Punkt $(1, 1)$ gehen, egal was n für einen Wert hat. Für positive Exponenten gehen die Funktionen durch den Punkt $(0, 0)$.

a) Auf $]-1, 1[$ ist die Funktion fast 0, dann steigt sie sehr steil druch den Punkt $(-1, 1)$ bzw. $(1, 1)$ an. Es ergibt sich eine Art «eckiges U».

b) Auf $]-1, 1[$ ist die Funktion fast 0. Im positiven Bereich steigt die Funktion durch den Punkt $(1, 1)$ sehr steil an, im negativen Bereich fällt die Funktion durch $(-1, -1)$ sehr steil ab.

c) Die Funktion ist praktisch 1 für x-Werte grösser Null. Bei Null fällt die Funktion sehr steil auf $(0, 0)$ ab. Es ergibt sich eine Art «liegendes L».

d) Auf $]-1, 1[$ ist der Funktionswert sehr gross. Bei $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ fällt der Funktionswert sehr schnell auf fast 0 ab. Ausserhalb von $[-1, 1]$ ist der Funktionswert nahe bei Null. Es ergeben sich «zwei L».

e) Wie d), ausser dass die Funktion im negativen Bereich selbst negativ ist (und das «L» nach unten an der x-Achse gespiegelt wird).

f) Die Funktion ist nahezu konstant 1, ausser gegen Null hin steigt die Funktion steil an und strebt gegen unendlich (und nicht für $x = 0$ nicht definiert). Für sehr grosse x geht die Funktion langsam gegen 0).

Lösung zu Aufgabe 259 ex-potenzfunktionen-intervall-bijektion

Die Funktion $f(x)$ sollte erst langsamer ansteigen als $f(x) = x$, dann gegen $x = 1$ schneller, aber immer noch durch den Punkt $(1, 1)$ gehen.
Dazu bieten sich Potenzfunktionen an, z.B. $f(x) = x^2$ oder $f(x) = x^3$. Was besser passt, muss ausprobiert und hängt nicht zulezt von den verwendeten Bauteilen und der Umgebungshelligkeit ab.

Lösung zu Aufgabe 262 ex-volumen-hyperwuerfel-strecken

a) 1 m.
b) $s^4 = 0.5$, also $s = \sqrt[4]{0.5} \approx 0.8409$ m.
c) Das Volumen wird mit λ^4 multipliziert. Also $\lambda^4 = 100$ und damit $\lambda = \sqrt[4]{100} = \sqrt{10} \approx 3.1623$.

Lösung zu Aufgabe 263 ex-wurzelgleichungen-warum-keine-loesung

Es werden die Abkürzungen LS und RS für linke und rechte Seite der Gleichung verwendet.

a) LS ist positiv, RS negativ (und nicht Null).

b) LS ist negativ (oder Null), RS ist positiv (nicht Null).

c) LS: $x \geq 4$. RS: $x \leq -4$. Beides nicht gleichzeitig möglich.

d) LS: ist positiv (oder Null für $x = 0$). RS ist negativ (oder Null für $x = -2$).

e) $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2}$ und damit erst recht $\sqrt{x+1} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$.

f) LS: $x \geq 4$ und LS ist positiv oder Null. RS ist negativ für $x \geq 4$.