KAP. 21 LOGARITHMEN OHNE HILFSMITTEL

1) Berechne

a) $\log_2\left(\sqrt[3]{4}\right)$

b) $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{64}\right)$

c) $\log_4\left(8\cdot\sqrt[4]{32}\right)$

d) $\log_{\frac{1}{4}}\left(16\cdot\sqrt{2}\right)$

e) $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[5]{81}\right)$

f) $4^{\frac{\ln(27)}{\ln(8)}}$

g) $\log_5\left(e^{-2\cdot\ln(25)}\right)$

h) $\log_{\sqrt{2}}\left(e^{-3\cdot\ln(8)}\right)$

2) Löse die Gleichung

a) $\log_4(x-1)+2=\log_4(6x+1)$

b) $0=\ln\frac{2x}{1-3x}$

c) $x=\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[3]{25}\right)$

d) $\log(2x+4)-\log(x)=\log(x+5)-\log(x-1)$

e) $\ln(3x+3)+\ln(x+2)-\ln(x^2-1)=\ln(6)$

Lösungen zu Logarithmen ohne Hilfsmittel:

1) a) $\frac{2}{3}$ b) -12 c) $\frac{17}{8}$ d) $-\frac{9}{4}$ e) $\frac{8}{5}$ f) 9

g) -4 h) -18

2) a) x = 1.7 b) $x=\frac{1}{5}$ c) $x=-\frac{2}{3}$ d) L = {4;-1} e) L = {4}

KAP. 22 FOLGEN UND REIHEN OHNE HILFSMITTEL

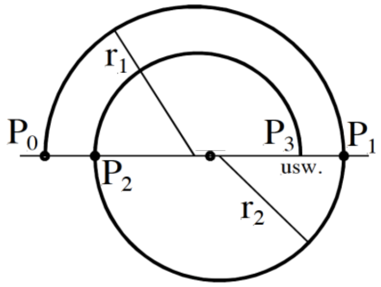
1) Wie viele gerade Verbindungslinien gibt es zwischen den Eckpunkten eines 11-Eckes? Begründe die Antwort.

2) Die Masszahlen der Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Umfang 39 bilden eine arithmetische Folge. Welchen Inhalt hat die Dreiecksfläche?

3) Gegeben ist eine aus Halbkreisen zusammengesetzte Spirale (siehe Abb.). Die Radien bilden eine geometrische Folge mit r_1 = 10 cm und r_2 = 8 cm.

a) Wie viele Radien sind grösser als 1 mm? Resultat als Formel genügt.

b) Wie lang ist die gesamte Spirale?

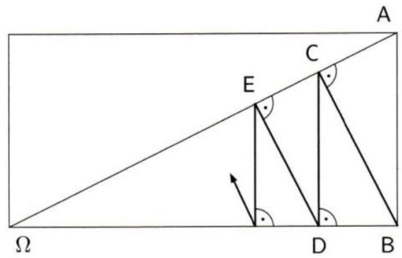


4) Der kleine Max hat aus 78 Einheitswürfeln drei Türme gebaut, deren Höhen eine arithmetische Zahlenfolge bilden. Nun nimmt er vom mittleren Turm acht Klötze weg und legt vier davon auf den kleinsten und die anderen vier auf den grössten. Jetzt bilden die Turmhöhen eine geometrische Zahlenfolge. Berechnen Sie die ursprünglichen Höhen der Türme!

5) Untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz. Falls ein Grenzwert existiert, berechne ihn:
$\frac{5}{6}+\frac{25}{36}+\frac{125}{216}+\ldots$

6) Von A aus bewegt man sich im rechts abgebildeten Winkelfeld im „Zickzack“ gegen den Scheitelpunkt Ω. Dabei trifft man immer unter einem rechten Winkel auf dem angepeilten Begrenzungsschenkel auf.

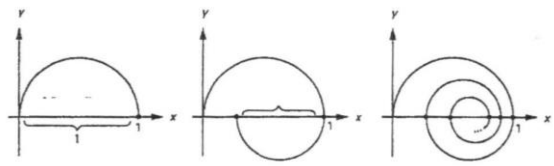
Wie lang ist der aus unendlich vielen Teilstrecken bestehende Weg von A über B nach Ω, wenn der erste Streckenabschnitt AB ein Meter lang ist und der Sinus des Winkels BΩA = 0.8 ist.



7) Eine Spirale wird aus unendlich vielen Halbkreisen konstruiert, deren Durchmesser eine geometrische Folge mit $q=\frac{3}{4}$ bilden und deren Zentren auf der x-Achse liegen. Der erste Durchmesser hat die Länge 1.

a) Wie gross ist die Summe der Längen aller unendlich vielen halbkreisbogen?

b) Um welchen Punkt auf der x-Achse herum windet sich die Spirale unendlich oft?



Lösungen zu Folgen und Reihen ohne Hilfsmittel:

1) 55

2) $a = 9\frac{3}{4}$ $b = 13$ $c = 16\frac{1}{4}$ $A = 63\frac{3}{8}$

3) $n > \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} + 1$ b) 50π cm

4) 2, 26 und 50

5) 5

6) $s = \frac{5}{2}$

7) a) 2π b) $\frac{4}{7}$

KAP. 22 FOLGEN UND REIHEN MIT HILFSMITTEL

1) Bestimme das allgemeine Glied der Zahlenfolge: -44, 39, -34, 29, …

2) Eine Folge hat die Eigenschaft, dass jedes Folgeglied der Durchschnitt aus seinem Vorgänger und seinem Nachfolger ist. $\left(a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{für alle } n \geq 2\right)$

   a) Um was für eine Folge handelt es sich? (Es ist keine Begründung verlangt)

   b) Das siebte Glied dieser Folge hat den Wert 30 und das dreizehnte den Wert 26. Wie viele positive Glieder hat die Folge?

3) Von einer arithmetischen Folge (a_n) ist bekannt, dass $a_3 = 9$ und $a_{29} = 139$ sind. Berechne a_1, Differenz d, sowie die Summe $s_{30} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{30}$.

4) Berechne: $\sum_{k=1}^{\infty} 0.99^k$

5) Das zweite Glied einer geometrischen Folge lautet $a_2 = 36$, das dritte $a_3 = -24$.

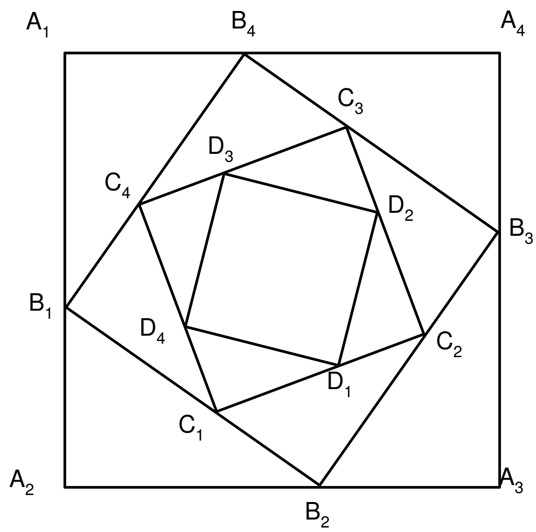
   Wie lautet das erste Glied a_1 und wie gross ist der Reihenwert

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

6) Gegeben ist die Folge (b_n) mit $b_n = \frac{8}{2^{n-2}}$.

   Bestimme den Grenzwert der Folge. Wie viele Glieder liegen ausserhalb der ε-Umgebung mit ε = 0.0001?

7) Die Flächeninhalte der Quadrate $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, … bilden einen geometrische Folge. $\overline{A_1B_1} = 8\,\text{cm}$, $\overline{B_1A_2} = 6\,\text{cm}$.



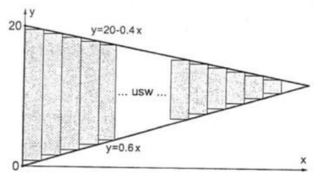
   a) Berechne die Summe der unendlich vielen Glieder der Folge.

   b) Das wievielte Quadrat ist das erste, dessen Fläche kleiner als 1 mm² ist.

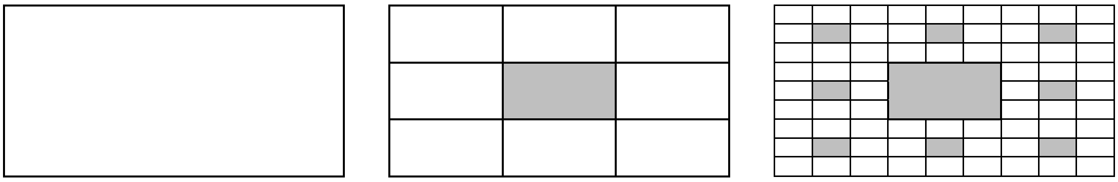
   c) Wie lang ist der aus den unendlich vielen Teilstrecken $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$, …, bestehende Streckenzug?

8) Holzbrätter der Breite 1 m mit abnehmenden Längen werden zu dem abgebildeten dreieckigen Muster zusammengefügt.

Berechne durch Aufsummieren: Welche Gesamtlänge ergibt sich, wenn alle Bretter (Breite auf Breite) aufeinander gestellt werden?



9) Aladdin erhält von seinem Lampengeist einen fliegenden Teppich mit zwei Meter Länge und einem Meter Breite geschenkt. Nach dem ersten Flug stellt er zu seiner Überraschung fest, dass der Teppich durch Streifen in 9 gleich grosse Rechtecke eingeteilt war, und das mittlere Rechteck sich allmählich auflöst. Am nächsten Tag fliegt er wieder raus, muss sich aber so geschickt hinsetzen, dass er nicht durch das Loch in der Mitte hinuterrutscht. Zu hause angekommen sieht er verblüfft, wie sich jedes der 8 verbliebenen kleinen Rechtecke wieder durch Streifen in 9 noch kleinere Rechtecke zerlegt hatte, von denen sich wiederum das mittlere vor seinen Augen in Luft auflöst.



Am Anfang | Nach dem 1. Flug | Nach dem 2. Flug

Wie lange kann Aladdin noch fliegen, wenn er dazu mindestens 0.5 m^2 Stoff braucht?

(Dieses Problem ging auch als Sierpinskischer Flickenteppich in die mathematische Fachliteratur ein und geht zurück auf den polnischen Mathematiker WACLAW SIERPINSKI (1882-1969))

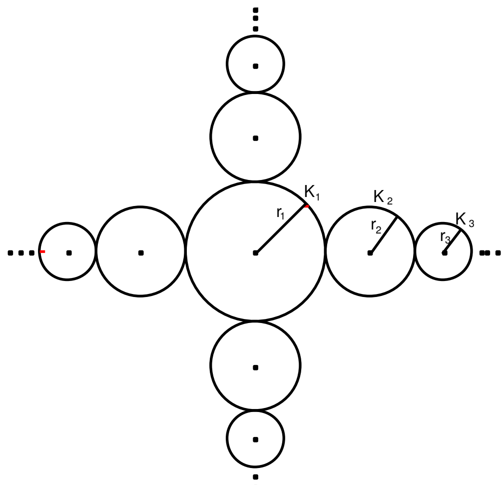
10) An den Kreis K_1 schliessen punktsymmetrisch in den vier Richtungen der Koordinatenachsen sich berührende Kreise so an, wie die Figur zeigt. Die Kreisradien bilden eine ins Unendlich gehende geometrische Folge:

$r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm

a) Berechnen Sie die Summe der Flächen der unendlich vielen Kreise der Figur.

b) Wie viele Kreise der Figur haben eine Fläche, die grösser als 10^{-3} mm^2 ist?

c) Wie gross ist der Radius des kleinsten Kreises, der die Figur (bestehend aus den unendlich vielen Kreisen) umschliesst?



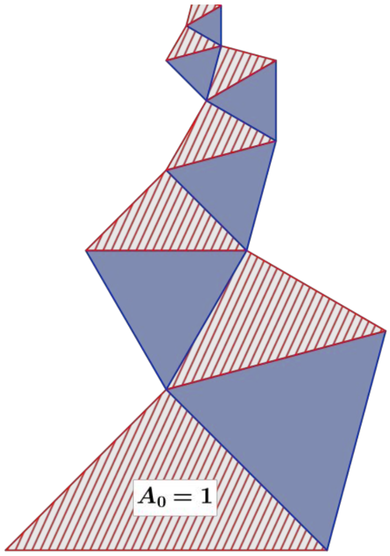
11) Das Wasser in einem Aquarium enthält am Anfang 8 l Sauerstoff. Von Woche zu Woche reduziert sich der Sauerstoffgehalt auf die Hälfte der vor einer Woche vorhandenen Menge. Um diese Abnahme teilweise auszugleichen, werden am Ende einer jeden Woche 2 l Sauerstoff von aussen zugeführt.

a) Modelliere den Prozess mit einer rekursiven Folge (a_n).

b) Bestimme den Wert, dem sich die Folge (a_n) annähert.

c) Stelle das explizite Bildungsgesetz auf.

12) Der „Dreiecksturm“ im Bild besteht abwechselnd aus gleichschenklig-rechtwinkligen und gleichseitigen Dreiecken. Welchen Inhalt hat der nach oben unbegrenzt fortgesetzte Turm, wenn das grösste gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck den Inhalt $A_0 = 1$ hat?



Lösungen zu Folgen und Reihen mit Hilfsmittel:

1) $a_n = (-1)^n \cdot (49 - 5n)$

2) a) um eine arithmetische Folge b) 50 Glieder sind positiv

3) $a_1 = -1$, $d = 5$ $s_{30} = 2145$

4) 99

5) $a_1 = -54$, $s = -32.4$

6) 18

7) a) 400.17 b) ab dem 16. Glied c) 28 cm

8) 190

9) $F_n = 2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$, nach dem 11. Flug muss er aufhören

10) a) 118.75 cm^2 b) 69 c) 15 cm

11) a) $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} + 2$ b) 4 c) $a_n = 8 - \sum_{k=1}^{n} 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

12) $A = 2 + \sqrt{3}$

KAP. 23 VEKTORGEOMETRIE OHNE HILFSMITTEL

0) Erläutere kurz in Worten einer interessierten Person die verschiedenen Produkte im Zusammenhang mit Zahlen und Vektoren.

1) Gegeben sind: die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie die Ebene

   E: x + 2y – 5 z + 9 = 0.

   a) Bestimmen Sie den Durchstosspunkt D von g durch E.

   b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(2 / -1 /3) von der Geraden g.

2) Von einem Trapez ABCD mit AB parallel CD sind gegeben:
   $A(1/1/1)$, $B(5/-3/8)$ und $D(1/2/3)$.

   Berechne C so, dass die Seite $\overline{CD}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{AB}$.

3) Die Gerade g verläuft durch A und B, die Gerade h durch C und D.
   Untersuche, ob g und h sich schneiden. Ermittle gegebenenfalls den Schnittpunkt und den Schnittwinkel oder den Abstand von g und h. A(1/1), B(5/1), C(8/6), D(8/-4)

4) Gegeben sind die beiden Ebenen E: 6x-2y+9z=-15 und F: 6x-2y+9z=18.

   a) Begründe, warum E und F parallel sind.

   b) Berechne den Abstand der beiden Ebenen.

5) Von einem Rechteck ABCD kennt man A(4/1/5) und D(7/5/3). Man weiss, dass die Ecke B auf der Geraden durch P(8/6/2) und Q(9/9/0) liegt. Berechne die Koordinaten von B und C.

6) Gegeben sind die beiden Ebenen E: x + y + z - 1 = 0 und F durch A(0/0/5), B(0/0/6) und C(-2/1/2).

   a) Wie gross ist der Abstand des Ursprunges von E?

   b) Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden durch E und F.

7) Gegeben ist die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ a \end{pmatrix}$ und die Ebene E: 2x – y + 3z – 7 = 0.

   a) Welche spezielle Lage hat g für den Fall a = 0?

   b) Wie muss a gewählt werden, damit g parallel zu E liegt?

   c) Wie gross ist dann der Abstand von g zu E?

8) Welcher Punkt P des Raumes hat von $A(2|-1|5)$ und von $B(-3|-3|2)$ den gleichen Abstand und liegt dem Punkt $C(9|4|9)$ am nächsten?

Lösungen zu Vektorgeometrie ohne Hilfsmittel:

0) Vgl. Skalarprodukt und Vektorprodukt in den Unterlagen

1) a) D(1/0/2) b) $\sqrt{3}$

2) C(3/0/6.5)

3) Sie schneiden sich unter 90º, S(8/1)

4) b) 3

5) B(6/0/6) C(9/4/4)

6) a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $g:\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

7) a) Sie ist parallel zur xy-Ebene, weil der Richtungsvektor parallel zur xy-Ebene ist.

b) $g:\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$

c) $d=\frac{2}{\sqrt{14}}$

8) P(-1/0/3)

KAP. 23 VEKTORGEOMETRIE MIT HILFSMITTEL

1) Von einem Parallelogramm ABCD sind die Eckpunkte A(1/1/1), C(-5/3/2) und D(-2/-4/-2) gegeben.

a) Berechne die Koordinaten des Eckpunktes B.

b) Welchen Winkel bilden die beiden Diagonalen miteinander?

c) Berechne die Fläche des Parallelogramms.

~~d) Welchen Abstand hat die Ebene durch die Punkte A, B, C vom Koordinatenursprung~~?

2) $A(3/5/5)$, $B(1/1/1)$, $C(5/3/-3)$
ABCD ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe $h = 9$.

a) Berechne den Punkt D.

b) Berechne die beiden möglichen Spitzen S der Pyramide. (Wenn es dir nicht gelingt, S auszurechnen, rechne in den folgenden Teilaufgaben mit $S(10/-2/4)$ weiter.)

c) Berechne den Winkel, den eine Seitenkante mit der Grundfläche einschliesst.

d) Berechne den Winkel, den eine Seitenfläche mit der Grundfläche einschliesst.

3) Gegeben sind die Punkte A(1|5|-2), B(5|8|-2), S(11|0|-2) und die Gerade $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Zeige, dass das Dreieck ABS rechtwinklig ist und berechne die Längen der drei Seiten.

~~b) Gib eine Koordinatengleichung der Ebene E = (ABS) an.~~

c) Zeige, dass die Gerade h parallel zur Geraden g = (AB) ist, aber nicht mit ihr zusammenfällt.

d) Bestimme die Punkte C und D auf h so, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

4) Gegeben sind die Punkte A(0/4/7), B(2/-2/17), C(-17/15/10), D(5/9/30), die Ebene E_1: x + 2y = 0 und die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Die Gerade g und die Gerade h = (AB) schneiden sich im Punkt S. Bestimme die Koordinaten von S und untersuche, ob S zwischen den Punkten A und B liegt.

b) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene F = (ABC) und den Winkel zwischen E_1 und F.

5) Spiegle den Punkt P(2 / 4 / −3) an der Geraden g = (AB) mit A(0 / 4 /1) und B(2 / 6 /1).

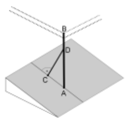
6) Eine senkrechte Telefonstange AB steht an einem Hang (schiefe Ebene). Sie besitzt eine Stütze CD, welche rechtwinklig zur Hang-Ebene steht. Die Stange AB liegt auf der Geraden

$a: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Stütze CD auf $b: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

a) Berechne die Koordinaten von D.

b) Die Stütze CD hat die Länge 4.5. Berechne die Koordinaten von C.

c) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene des Hanges?



Lösungen zu Vektorgeometrie mit Hilfsmittel:

1)	a) B(-2/8/5)	b) $\varphi = 69.61°$	c) 41.69	d) 0.336	
2)	a) D(7/7/1)	b) S(10/-2/4) S‘(-2/10/-2)		c) $\varphi = 64.76°$	d) $\varphi = 71.6°$
3)	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 5$ $\lvert\overrightarrow{BS}\rvert = 10$	$\lvert\overrightarrow{AS}\rvert = 11.18$	b) E:-z - 2 = 0	c) Abstand = 5	d) D(1/5/3) C(5/8/3)
4)	a) S(3/-5/22), S liegt ausserhalb		b) F: 8x +11y + 5z – 79 = 0	$\varphi = 22.21°$	
5)	Fusspunkt ist bei T(1/5/1)		P‘(0/6/5)		
6)	a) D(2/3/4)	b) C(4/3.5/8)	c) E: 4x + y + 8z – 83.5 = 0		

24 UND 27 DIFFERENTIALRECHNUNG OHNE HILFSMITTEL

1) Erkläre den folgenden Begriff: Die Funktion f ist stetig an der Stelle x_0. Was ist der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion?

2) Leite die angegebenen Funktionen ab und vereinfache soweit wie möglich

a) $(2x+1)^3$

b) $f(x)=\frac{x}{\pi - x^2}$

c) $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-x}$

d) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

e) $f(x)=\frac{4x^3+1}{4x^3-2}$

f) $f(x)=a\cdot\sin(bx)\cdot e^{-x}$

g) $f(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_0)$

h) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

i) $f(x)=x\cdot e^{1-2x}$

j) $f(x)=\sin(\cos(x))$

k) $f(x)=x\cdot\sin(\frac{1}{3}\cdot x^2+2)$

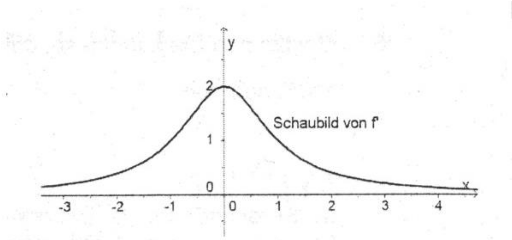
l) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}$

3) Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f‘ einer Funktion f. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, falsch oder können nicht entschieden werden? Begründe deine Antworten

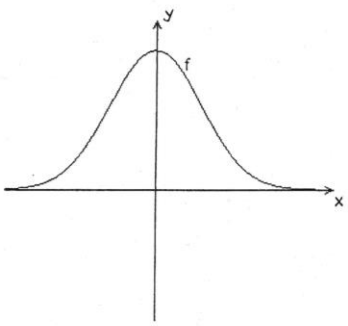
a) f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$

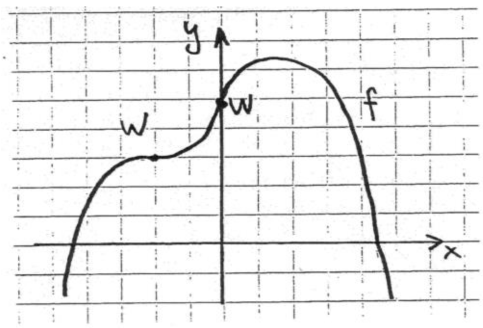
b) Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse

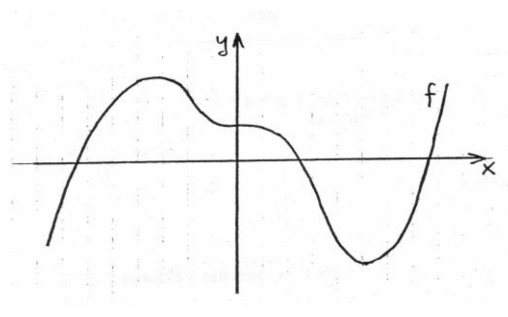
c) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$

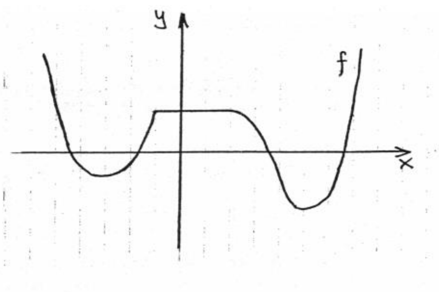


4) Gegeben ist der Graph einer Funktion. Zeichne mit Farbe, qualitativ richtig, den Graphen der Ableitungsfunktion f‘ direkt in die Figur.









5) Bestimme die Gleichung der Tangenten im Punkt P des Graphen der angegebenen Funktion f.

$f(x) = \frac{3 - x}{3x + 1}$ $\qquad$ $P(-2/y_P)$

6) Bestimme b derart, dass die Tangenten an den Stellen 0 und 2 an den Graphen von f zueinander senkrecht stehen.

$f(x) = \frac{5}{24}x^3 + \frac{b}{2}x$

7) Bestimme a und b so, dass der Graph von f in A(2/1) ein Extremum hat.

$f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx}$

8) Gegeben ist die Funktion f. Bestimme die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von f.

$f(x) = e^{-(x-1)^2}$

9) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die x-Achse im Koordinatenursprung und hat im Punkt P(1/6) einen Wendepunkt. Um welche Funktion handelt es sich?

Lösungen zu Differentialrechnung ohne Hilfsmittel:

1) Theorieheft

2) a) $6(2x + 1)^2$ $\quad$ b) $\frac{\pi + x^2}{(\pi - x^2)^2}$ $\quad$ c) $\frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2}$ $\quad$ d) $\frac{2}{(1 - x)^2}$ $\quad$ e) $\frac{-36x^2}{(4x^3 - 2)^2}$ $\quad$ f) $a \cdot e^{-x}[b\cos(bx) - \sin(bx)]$

g) $A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ $\quad$ h) $-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad$ i) $e^{(1-2x)}(1 - 2x)$ $\quad$ j) $-\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$

k) $\sin(\frac{x^2}{3} + 2) + \frac{2}{3}x^2\cos(\frac{x^2}{3} + 2)$ $\quad$ l) $\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot x^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 x}$

3) a) richtig $\quad$ b) falsch $\quad$ c) falsch

5) $y = -\frac{2}{5}x - \frac{9}{5}$

6) -4 oder -1

7) $a = \frac{1}{4}$ und $b = 1$

8) H(1/1)

9) $f(x) = -3x^3 + 9x^2$

KAP. 24 UND 27 DIFFERENTIALRECHNUNG MIT HILFSMITTEL

1) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2$

Bestimme die Nullstellen von f, die Extremalpunkte und den Wendepunkt des Graphen und zeichne diesen für $-1 \le x \le 7$.

2) Für welche Werte von m besitzt der Graph von $f(x) = \frac{8x + m}{\left(x^2 - 4\right)^2}$ horizontale Tangenten?

3) $y = f(x) = e^{1-x} + 2x$

a) Berechne die Extremalstelle von f

b) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von f die y-Achse?

4) Die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2}$ hat in P(-1/-2) die Steigung m = -1

und hat die Nullstelle x = 1. Bestimme a, b und c.

5) Gegeben sind die Funktionen f_1: $y = e^x$ und f_2: $y = e^{2-x}$.

a) Berechne den Schnittpunkt S der beiden Graphen.

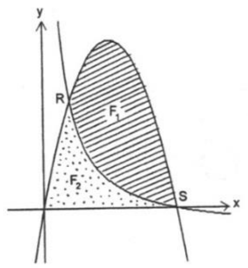
b) Berechne die Tangente an den Graphen von f_1 im Punkt S und bestimme ihren Schnittpunkt und ihren Schnittwinkel mit der x-Achse.

6) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x - x^3$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen, die Extrempunkte und zeichnen Sie den Graphen von f(x).

b) In welchen Punkten des Graphen von f(x) verlaufen die Tangenten parallel zur Geraden mit der Gleichung $13x - 4y + 20 = 0$?

7) Gegeben: $f_1: \; y = ax - x^2$ und $f_1: \; y = \frac{a}{x} - 1$ $(a > 1)$



a) Bestimme die fehlenden Koordinaten der Schnittpunkte $R(1/y_R)$ und $S(x_S/0)$

b) Berechne für a = 6 den spitzen Schnittwinkel von f_1 und f_2 bei der gemeinsamen Nullstelle.

8) Bei der Herstellung eines Artikels entstehen feste Kosten von 500 Fr. pro Tag. Die Material- und Lohnkosten belaufen sich auf 10 Fr. pro Stück. Bei der Produktion von x Stück entstehen weitere Kosten von $0.004x^2$ Franken. Der Verkaufspreis beträgt 15 Fr. pro Stück. Bei welcher Tagesproduktion erwirtschaftet die Firma am meisten Gewinn?

Lösungen zu Differentialrechnung mit Hilfsmittel:

1) Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$, lok. Maximum bei x = 0, lok. Minimum bei x = 4, Wendepunkt bei x = 2

2) $m = \frac{-2(3x^2 + 4)}{x}$

3) a) $x \approx 0.307$ b) $\alpha = 90^\circ - 35.69^\circ = 54.31^\circ$

4) a = 0 b = 0 c = -1

5) S(1/e) $y = e \cdot x$ $\alpha \approx 69.8^\circ$

6) Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ lok. Maximum bei $\sqrt{\frac{4}{3}}$ lok. Minimum bei $-\sqrt{\frac{4}{3}}$ $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

7) R(1/a-1) S(a/0) $\alpha \approx 71.05^\circ$

8) Bei 625 Stück

KAP 25 STOCHASTIK OHNE HILFSMITTEL

1) Ein Fahrradschloss (Zahlenschloss) besteht aus 4 unabhängig voneinander beweglichen Rädern, die jeweils 6 Ziffern (von 1 bis 6) enthalten. Das Schloss öffnet sich nur bei einer ganz bestimmten Zahlenkombination. Wie viele Stellungen (Zahlenkombinationen) hat das Fahrradschloss und wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Einstellung das Schloss zu öffnen?

2) In einer ersten Urne liegen 2 rote, 3 grüne und 4 blaue Kugeln. In einer zweiten Urne sind 1 rote, 4 grüne und 4 blaue Kugeln. Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben beide Kugeln dieselbe Farbe?

3) In einer Urne befinden sich 1 rote, 4 schwarze und 5 weisse Kugeln. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 3 Kugeln genau 2 weiss sind?

4) Je dicker eine Münze ist, umso wahrscheinlicher ist es, dass sie nach einem zufälligen Wurf auf dem Rand stehen bleibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Münze auf dem Rand stehen bleibt, beträgt $\frac{1}{10}$, dass sie Kopf respektive Zahl zeigt, sei gleich gross. Man wirft drei solche Münzen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen alle drei Lagen vor?

5) In der Schweiz sind rund 5% aller Personen farbenblind.

a) Die Kantonsschule am Burggraben zählt 1300 Schülerinnen und Schüler. Mit wie vielen farbenblinden Jugendlichen ist an der Kantonsschule am Burggraben zu rechnen?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 20 Schülerinnen und Schülern mindestens 1 Person farbeblind ist?

6) In der folgenden Aufgabe müssen Produkte nicht berechnet werden, Angaben wie $P = 1 - (1/19)^n$ sind zulässig.

Bei einem Roulettespiel trifft eine Kugel auf eine der 37 Zahlen 0, 1, 2, …, 35, 36. Alle diese Zahlen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für

A: Bei einem Kugellauf wird eine Zahl grösser als 33 getroffen.

B: bei zwei Kugelläufen wird eine Zahl grösser als 33 mindestens einmal getroffen.

C: bei zwei Kugelläufen wird keine der Zahlen 34, 35, 36 doppelt getroffen.

7) Drei etwas aussergewöhnlich beschriftete, ideale Spielwürfel zeigen je auf drei Seiten eine 1, auf zwei Seiten eine 2 und auf einer Seite eine 3. Nun werden die drei Würfel miteinander geworfen.
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Würfel dieselbe Augenzahl zeigen?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede Augenzahl (1, 2 oder 3) genau einmal oben liegt?

8) Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Komponenten des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ werden durch einen Wurf mit drei Würfeln bestimmt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\vec{a}$ senkrecht steht auf $\vec{b}$?

9) Du bewegst dich auf der x-Achse. Du wirst bei jeder ganzzahligen Marke eine Laplace-Münze und gehst bei „Kopf" nach rechts, bei „Zahl" nach links bis zur nächsten ganzen Zahl. Du startest mit dem ersten Münzwurf im Punkt (1/0). Mit welcher Wahrscheinlichkeit landest du nach 5 Schritten im Ursprung?

Lösungen zu Stochastik ohne Hilfsmittel:

1) $P = \frac{1}{1296}$

2) $P = \frac{10}{27}$

3) $P = \frac{5}{12}$

4) $P = \frac{243}{2000}$

5) Mit 65, P = 0.6415

6) A) $P = \frac{3}{37}$ B) $P = 1 - \left(\frac{34}{37}\right)^2$ C) $P = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^2$

7) a) $P = \frac{1}{6}$ b) $P = \frac{1}{6}$

8) $P = \frac{1}{12}$

9) $P = \frac{5}{16}$

KAP 25 STOCHASTIK MIT HILFSMITTEL

1) Transistoren sind defekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.08. Wie viele Transistoren muss man mindestens bestellen, damit man mit 99.9%-iger Sicherheit mindestens einen intakten Transistor hat?

2) In einem Gebiet ist durchschnittlich eine von 100 Personen farbenblind. Ein Forscherteam möchte Untersuchungen mit einer farbenblinden Person machen. Wie viele Personen muss das Team untersuchen, um mit 95-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens eine farbenblinde Person zu finden?

3) Eine Handelsfirma vertreibt Geräte mit einem Jahr Garantie, von denen erfahrungsgemäss 5% in dieser Zeit defekt werden, so dass Garantieleistungen erbracht werden müssen.

   a) Wie viele Garantiefälle sind bei 40 Geräten zu erwarten?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei 4 Geräten höchstens 2 Garantiefälle auf?

   c) Nach wie vielen verkauften Geräten überschreitet die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten mindestens eines Garantiefalles erstmals 90%?

4) a) Bei einer gewissen Samenart beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Same keimt, 72%. Wie viele Samen müssen ausgesät werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Same keimt, wenigstens 99% beträgt?

   b) Ein Spielautomat zeigt Zahlenpaare an. Jede Zahl ist Element der Menge {0, 1, 2, 3, ..., 12}, die Zahlenpaare sind also z.B. (6,4) oder (0,12). Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Zahlen 10 beträgt?

5) In einer Urne sind 2 weisse, 3 rote und 5 schwarze Kugeln. Es werden der Reihe nach 5 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einmal eine rote und viermal eine schwarze Kugel zu ziehen?

6) In einer Urne befinden sich 4 weisse und 12 schwarze Kugeln.

   a) Es werden 5 Kugeln einzeln mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei
   a1) Genau eine weisse a2) mindestens 2 weisse a3) höchstens 2 weisse
   Kugeln gezogen werden?

   b) Wie oft müsste mindestens in die Urne gegriffen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal eine weisse Kugel zu ziehen mindestens 99.9% beträgt, wenn nach jedem Zug die herausgenommene Kugel wieder zurückgelegt wird?

7) In einer Urne liegen x rote, 7 blaue und 8 grüne Kugeln.

   A sei das Ereignis, in zwei Zügen ohne Zurücklegen zwei rote Kugeln zu ziehen.

   B sei das Ereignis, in zwei Zügen ohne Zurücklegen zwei blaue Kugeln zu ziehen.

   a) Die Wahrscheinlichkeit von B sei um $\frac{11}{190}$ grösser als die Wahrscheinlichkeit von A.
   Berechnen Sie daraus die Anzahl der roten Kugeln!

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von mindestens einer grünen Kugel bei fünf Zügen mit Zurücklegen!

   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier verschiedenfarbiger Kugeln bei zwei Zügen ohne Zurücklegen!

8) An einem Bogenschiessen- Turnier sind in der Frauenkategorie 8 von 20 Teilnehmerinnen Linkshänderinnen. Die anderen sind Rechtshänderinnen. Aus den Teilnehmerinnen werden 3 Bogenschützinnen zufällig ausgewählt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Linkshänderinnen sind?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Linkshänderinnen und eine Rechtshänderin ausgewählt wurden?

Die Wetterverhältnisse verschlechtern sich, und nun wird es für die Linkshänderinnen schwieriger, das Ziel zu treffen als für Rechtshänderinnen. Linkshänderinnen treffen das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7 und Rechtshänderinnen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9. In der ersten Runde steht jeder Bogenschützin 1 Schuss zu.

c) Eine Bogenschützin wird zufällig aus allen Teilnehmerinnen ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie das Ziel trifft?

d) Eine Bogenschützin wird zufällig ausgewählt. Man weiss, dass sie das Ziel getroffen hat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie Rechtshänderin ist?

In einer späteren Runde treten nur die Linkshänderinnen zum Wettschiessen an. Wiederum steht jeder Bogenschützin 1 Schuss zu.

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Bogenschützinnen das Ziel treffen?

f) Sina ist Linkshänderin. Wie viele Schüsse müsste sie mindestens zur Verfügung haben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal das Ziel zu treffen?

Lösungen zu Stochastik mit Hilfsmittel:

1) $n \geq 3$

2) $n \geq 299$

3) a) 2 b) P = 99.95 % c) $n \geq 45$

4) a) n = 4 b) $P = \frac{11}{169}$

5) P = 0.0938

6) a1) $P_1 = 0.3955$ a2) $P_1 = 0.3672$ a3) P = 0.8965 b) $n \geq 25$

7) a) x = 5 b) 0.922 c) 0.795

8) a) $P \approx 4.91\%$ b) $P \approx 29.5\%$ c) $P \approx 82\%$ d) $P \approx 65.85\%$ e) $P \approx 99.87\%$ f) $n = 4$

KAP. 26 INTEGRALRECHNUNG OHNE HILFSMITTEL

1) a) Was versteht man unter einer Stammfunktion F(x) einer (stetigen) Funktion f(x)?

b) Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

2) Berechne

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot\cos(x)\,dx$

b) $\int_0^1 (ux^4 - x + 1)\,dx$

c) $\int_0^2 (cx^3 + x - 1)\,dx$

d) $\int_0^1 (ax^3 - bx)\,dx$

e) $\int_{-2}^{-1} \frac{9-3x^2}{x^4}\,dx$

f) $\int_{-4}^{-1} \frac{16-4x^2}{x^4}\,dx$

g) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot(x^2 - 4x)\,dx$

~~h)~~ $\cancel{\int_{-3}^{0} \sqrt{1-x}\,dx}$

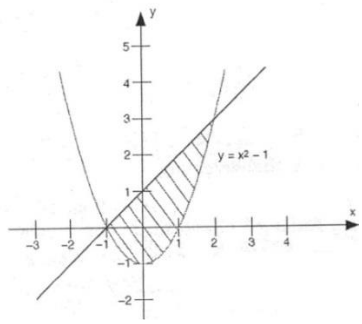
3) Berechne

a) $\int a\cdot\cos(x)\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^3}(x-1)\,dx$

c) $\int \sin(at - b)\,dt$

4) Berechne den Inhalt des schraffierten Flächenstücks. Die Schnittpunkte der beiden Graphen sind A(-1/0) und B(2/3).



5) Berechne die (geom.) Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

a) $f(x) = 1 - x^2$ und $g(x) = 3(x^2 - 1)$

b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ und $g(x) = 3x^2 + x + 1$

6) $y = f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$

Bestimme die Nullstellen und die Extremalstellen von f sowie die (geom.) Fläche unter der Kurve von f zwischen -1 und 2.

7) Die beiden Kurven $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a}}$ und $g(x) = a \cdot \sqrt{x}$ schliessen ein Gebiet mit dem Flächeninhalt A = 1 ein. Berechne a.

8) Skizziere den Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = \cos(x)$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

Verbinde zwei aufeinanderfolgende Hochpunkte mit einer Strecke und bestimme den Inhalt der von dieser Strecke und dem Graphen eingeschlossenen Fläche.

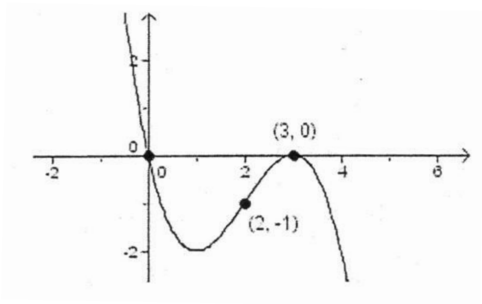
9) Bestimme a > 0 so, dass $\int_0^a (ax^3 - \frac{3}{2}x^2 - ax)\,dx = 0.$

10) $F(a) = \int_{-a}^{a} (x^2 + x + 1)\,dx$

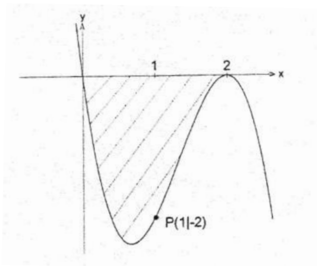
Untersuche F im Hinblick auf Extremal- und Wendestellen.

11) Die Skizze zeigt den Graphen eines Polynoms, dessen Grad so klein wie möglich ist. Bestimme seine Gleichung und berechne die vom Graphen und der x-Achse eingeschlossene (geom.) Fläche.

a)



b)



Lösungen zu Integralrechnung ohne Hilfsmittel:

1) Theorieheft

2) a) 2 b) $\frac{u}{5} + \frac{1}{2}$ c) 4c d) $\frac{a}{4} - \frac{b}{2}$ e) $\frac{9}{8}$ f) $\frac{9}{4}$ g) $-\frac{99}{70}$ h) $\frac{14}{3}$

3) a) $a \cdot \sin(x) + C$ b) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$ c) $-\frac{1}{a}\cos(at - b) + C$

4) a) $A = \frac{9}{2}$

5) a) Schnittpunkte bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ $A = \frac{16}{3}$ b) Schnittpunkte bei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 1$ $A = \frac{1}{2}$

6) a) Nullstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ Extremalstellen bei $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ $A = \frac{23}{16}$

7) a) Schnittpunkte bei $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ $A = 3^{\frac{2}{5}}$

8) $A = 2\pi$

9) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ und $a_3 = -2$

10) Keine Extremalstellen, Wendestellen bei a = 2

11) a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x$ A = 3.375 b) $f(x) = -2x^3 + 8x^2 - 8x$ $A = \frac{8}{3}$

KAP. 26 INTEGRALRECHNUNG MIT HILFSMITTEL

1) Bestimme den Inhalt der beiden endlichen, vom Graphen der Funktion

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-3x+4$$

und der x-Achse eingeschlossenen (geom.) Flächenstücke. (Diese Aufgabe ist ausschliesslich mit dem Taschenrechner zu lösen. Es wird nur die Lösung bewertet.)

2) Gegeben: f: $y=x^3-x^2-4x$.

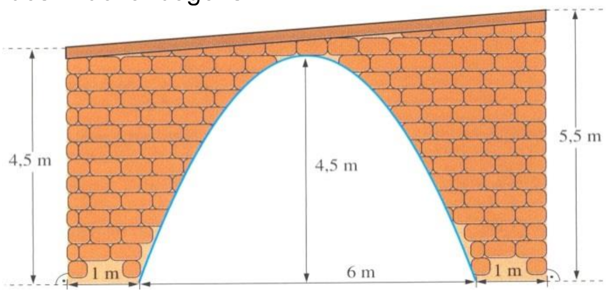
Welchen Inhalt hat die Fläche, die vom Graphen von f und der Kurventangente in $P(-1/y_P)$ begrenzt wird?

3) Der Bogen einer Flussbrücke hat die Form einer nach unten geöffneten Normalparabel. Die Auffahrten der Brücke liegen auf verschiedenen Höhen (vgl. Bild unten).

a) Übertrage die Figur in ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimme mit Hilfe der Angaben aus dem Bild eine Gleichung des Brückenbogens.

b) Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche des Bogens.

c) Die Brücke ist 4m breit. Wie viel Material (in m^3) wurde bei ihrer Herstellung verbraucht?



4) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x - x^3$.

a) Berechne die Nullstellen, die Extrempunkte und zeichnen Sie den Graphen von f(x).

b) In welchen Punkten des Graphen von f(x) verlaufen die Tangenten parallel zur Geraden mit der Gleichung $13x - 4y + 20 = 0$?

c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches die Kurve von f(x) zusammen mit der x-Achse im 1. Quadranten einschliesst.

d) Eine Gerade durch den Ursprung (0|0) soll nun dieses Flächenstück halbieren. Bestimmen Sie die Steigung dieser Geraden.

5) Gegeben sind die Funktionen $f: y=3\sqrt{x}$ und $g: y=\sqrt{36-3x}$

a) Zeichnen Sie die Graphen von f und g und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

b) Die beiden Graphen begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Flächenstück. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

6) Die Fläche zwischen den beiden Kurven $f_1: y=2\sqrt{x-1}$ und $f_2=\sqrt{2x+6}$ rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

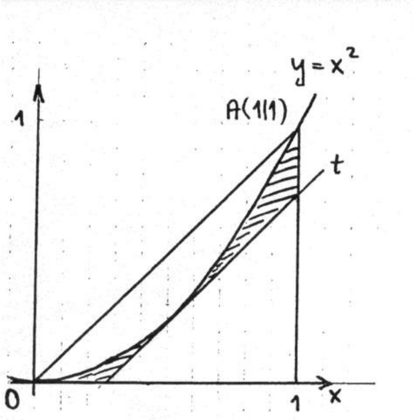
7) Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-3x+4$

a) Zeichne einen sauberen Graphen der Funktion f.

b) Der Graph einer quadratischen Funktion g(x) schneidet den Graphen von f(x) auf der y-Achse rechtwinklig. Ein weiterer gemeinsamer Punkt der beiden Graphen hat die x-Koordinate 4. Bestimme die Gleichung der Funktion g(x). Zeichne den Graphen von g(x) in dasselbe Koordinatensystem.

c) Die beiden Graphen umschliessen zwei Flächenstücke. Berechne deren Inhalte.

8) Berechne den Flächeninhalt des schraffierten, aus zwei Teilflächen zusammengesetzten Gebietes. Die Tangente t ist parallel zu OA.



9) Gegeben sind die Parabeln mit $f_1(x) = -\sqrt{a}x^2 + \frac{1}{\sqrt{a}}x$ und $f_2(x) = \sqrt{a} \cdot x^2 - \sqrt{a} \cdot x$ $(a > 0)$.

Setze 0.25 für a ein und zeichne die beiden Parabeln in ein Koordinatensystem. Wie gross ist die von den Parabeln umschlossene Fläche?

Lösungen zu Integralrechnung mit Hilfsmittel:

1) Schnittpunkte bei $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 4$. $A_1 = A_2 = \frac{81}{8}$

2) P(-1/2) t(x) = x + 3, Schnittpunkte von f(x) und t(x) bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$, $A = \frac{64}{3}$

3) a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$ b) Hohlraum: 18 m² Brücke: 40m² ΔA= 22m² c) Trapez: V = 160 m³, Bogen: 72 m³ $\Delta V = 88$ m³

4) a) Nullstellen bei $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$, Maximum bei (2.56/3.08), Minimum bei (-2.56/-3.08)

b) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, c) A = 4 d) m = 1.17

5) a) $S(3/3\sqrt{3})$ b) $V_1 = \frac{81\pi}{2}$ $V_2 = \frac{243\pi}{2}$ $V_{tot} = 162\pi$

6) Schnittpunkt bei x = 5. Nullstelle von $f_1(x)$ bei x = 1, Nullstelle von $f_2(x)$ bei x = -3 $V = 64\pi - 32\pi = 32\pi$

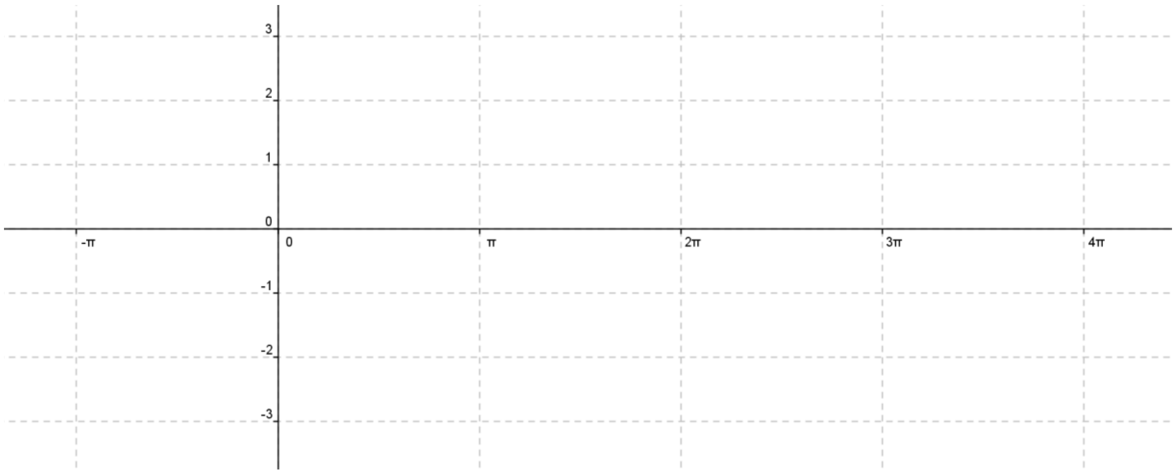
7) a) Parabel hat die Gleichung $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$ b) $A_1 = 1.865$ $A_2 = 19.556$

8) Berührungspunkt bei $x = \frac{1}{2}$ $t(x) = x - \frac{1}{4}$ $A = \frac{5}{96}$

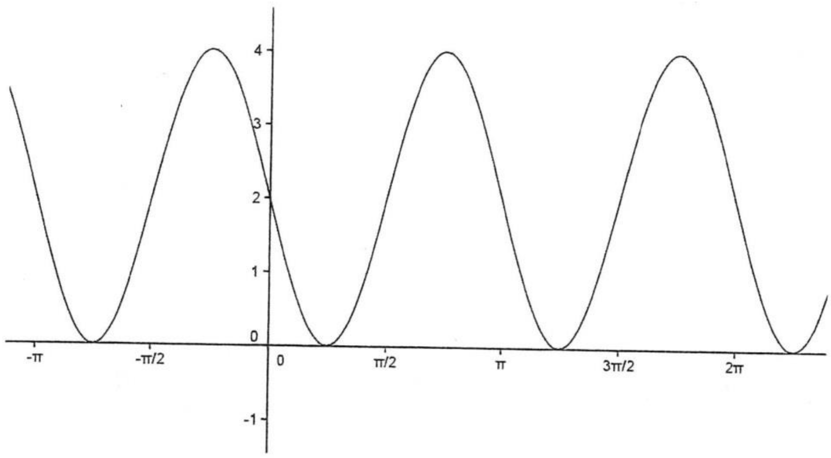
9) Schnittpunkte bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2.5$ A = 2.604

TRIGONOMETRIE

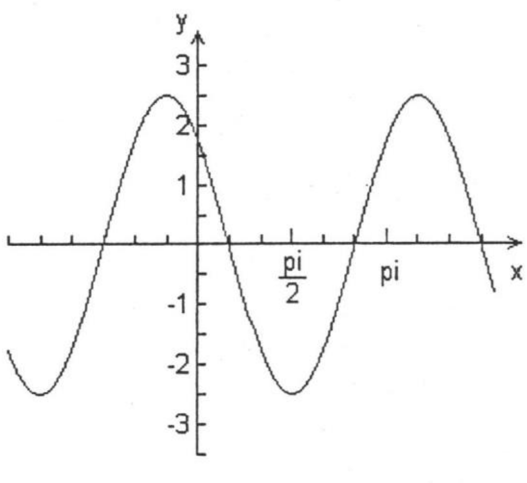
1) Zeichne eine halbe Periode des Graphen von $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{4} - \pi\right)$ in das Koordinatensystem ein.



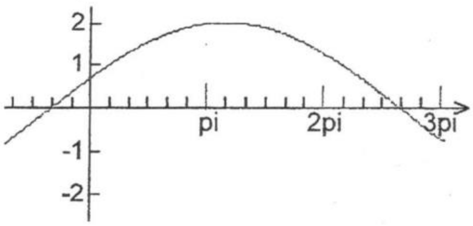
2) Notiere die Funktionsgleichung, die zum unten stehenden trigonometrischen Graphen passt.



3) Bestimme die allgemeine Sinusfunktion, die zu folgendem Graphen passt:



4) Bestimme die Funktionsgleichung, die zum folgenden Graphen einer Sinusfunktion passt.



5) Skizziere im gleichen Koordinatensystem (Einheit auf y-Achse angeben, wesentliche Stellen auf der x-Achse beschriften):

$$y_1 = \sin(x), \quad y_2 = 2\cdot\sin(2x)$$

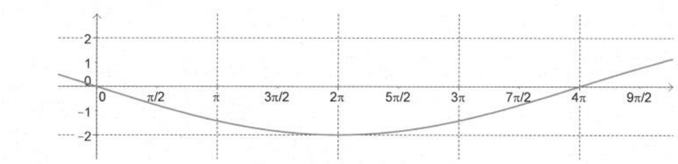
6) Skizziere die Graphen von $y_1 = 2\sin(x)$ und $y_2 = \sin(2x)$ im gleichen Koordinatensystem.

7) Bestimme sämtliche Lösungen für x zu

$$2\cdot\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Lösungen zu Trigonometrie II ohne Hilfsmittel:

1)

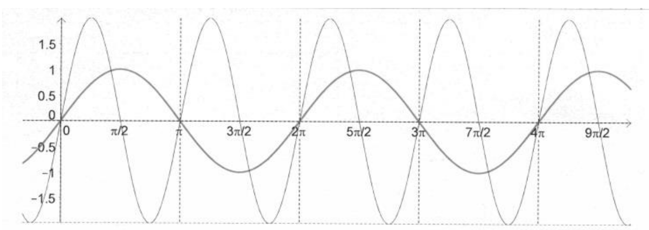


2) $y = 2 + 2\cdot\sin\left(2\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

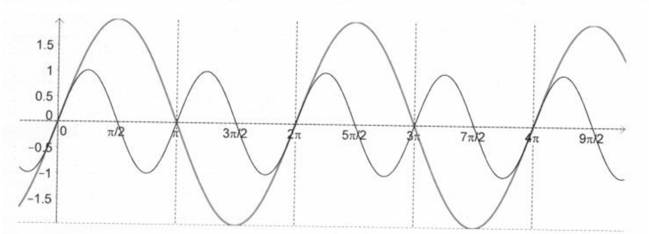
3) $y = 2.5\cdot\sin\left(1.5\cdot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

4) $y = 2\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\cdot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$

5)



6)



7) $x = \frac{7\pi}{36} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$ oder $x = \frac{23\pi}{36} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$