1 Kombinatorik

Die Kombinatorik beschreibt Methoden und Verfahren des Abzählens. beim Berechnen von Wahrscheinlichkeiten muss oft die Anzahl Möglichkeiten von Auswahlen oder Gruppierungen bestimmt werden, insbesondere beim Laplace-Ansatz. Das richtige und fehlerfreie Zählen ist hierbei eine besondere Herausforderung, es darf nichts vergessen und auch nichts doppelt gezählt werden.

Einstiegsaufgabe: Hast du richtig gezählt?

Im folgenden sind einige typische kombinatorische Fragestellungen aufgelistet.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einem Bücherkorb mit 25 verschiedenen Büchern vier auszuwählen?

b) Wie viele unterschiedliche Sitzordnungen sind für eine Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern denkbar, wenn es keine freien Plätze gibt?

c) Auf einer Albumseite hat es Platz, um drei Fotos nebeneinander anzuordnen. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann man die Albumseite gestalten, wenn 5 Fotos zur Auswahl stehen?

d) In einem Debattierklub müssen der Präsident, der Aktuar und der Kassier neu gewählt werden. Vor der eigentlichen Wahl dürfen die total 37 Mitglieder auf vorbereiteten Listen Vorschläge machen für 1. Präsident, 2. Aktuar und 3. Kassier.
Wie viele unterschiedliche komplette Listen mit je drei Vorschlägen sind theoretisch möglich, wenn einerseits kein Name mehrmals auf einer Liste stehen darf und sich andererseits jedes Mitglied auch selbst für eines der drei Ämter vorschlagen kann?

e) Wie viele unterschiedliche Wurfserien gibt es beim viermaligen Münzwurf, in denen
   i) nie Kopf vorkommt?
   ii) genau einmal Kopf vorkommt?
   iii) genau zweimal Kopf vorkommt?
   iv) genau dreimal Kopf vorkommt?

Lösungen: 12'650, 620'448'401'733'239'439'360'000, 60, 46'620, 1, 4, 6, 4.

1.1 Grundprinzipien der Kombinatorik

Das Additions- und Multiplikationsprinzip bilden zusammen die Grundlage der Kombinatorik.

Beispiel: Schülerauswahl, Teil 1

In einer Schule können die Klassen 2A, 2B und 2C an einer Veranstaltung teilnehmen. Die Klasse 2A umfasst 23 Schüler, die Klasse 2B 18 Schüler und die Klasse 2C 26 Schüler. Nur ein Schüler darf an der Eröffnungsdiskussion teilnehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diesen Schüler aus den drei Klassen auszuwählen.

Für die Lösung des Beispiels müssen die Schülerzahlen der einzelnen Klassen addiert werden. Dieses Vorgehen entspricht dem Additionsprinzip, denn es kann genau ein Schüler aus der Klasse 2A **oder** der Klasse 2B **oder** der Klasse 2C gewählt werden. Man erhält somit $23 + 18 + 26 = 67$ Möglichkeiten, einen Schüler auszuwählen.

Das Additionsprinzip wird oft unbewusst verwendet.

Das Additionsprinzip
Die Anzahl Elemente einer Menge M soll bestimmt werden. Die Menge ist dabei in paarweise disjunkte, d.h. sich paarweise gegenseitig ausschliessende Teilmengen A, B, C aufgeteilt:

$$M = A \cup B \cup C, \text{ mit } A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$$

Die Anzahl Elemente $|M|$ der Menge M erhält man durch Addition der Anzahl Elemente aller Teilmengen:

$$|M| = |A| + |B| + |C|$$

Das sprachliche Merkmal des Additionsprinzips ist, dass die Mengen durch ein **oder** verknüpft werden.

Bemerkung: Das Additionsprinzip gilt allgemein für $n \geq 2$ Teilmengen, solange diese sich jeweils paarweise gegenseitig ausschliessen. Das bedeutet, dass ein Element jeweils nur in genau einer der Teilmengen vorkommen darf.

Beispiel: Schülerauswahl, Teil 2

Für eine weitere Diskussionsrunde wird aus den Klassen 2A, 2B und 2C je ein Schüler ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das dreiköpfige Diskussionsteam zusammenzustellen?

Das lässt sich mit den folgenden Überlegungen lösen:
In der Klasse 2A gibt es 23 Möglichkeiten einen Teilnehmer zu bestimmen **und** für jede mögliche Wahl gibt es wiederum 18 mögliche Kandidaten aus der Klasse 2B. Zusammen ergibt dies $23 \cdot 18 = 414$ Möglichkeiten. Für jede dieser 414 Möglichkeiten gibt es nun **zusätzlich** noch 26 mögliche Kandidaten aus der Klasse 2C, d.h. $23 \cdot 18 \cdot 26 = 10'764$ Möglichkeiten, das dreiköpfige Diskussionsteam zusammenzustellen.

Das Multiplikationsprinzip
Man darf zweimal nacheinander aus mehreren Möglichkeiten auswählen. Bei der ersten Auswahl hat man n_1 Möglichkeiten, bei der zweiten Auswahl n_2 Möglichkeiten. Bei jeder der n_1 ersten Auswahlen hat man im zweiten Schritt nochmals n_2 Auswahlmöglichkeiten. Daher müssen die beiden Werte miteinander multipliziert werden. Man hat somit folgende Anzahl Möglichkeiten, die zwei Auswahlen zu treffen:

$$n_1 \cdot n_2 \text{ verschiedene Möglichkeiten}$$

Das sprachliche Merkmal des Multiplikationsprinzips ist, dass die Mengen durch ein **und** verknüpft werden.

Bemerkung: Das Multiplikationsprinzip gilt allgemein für $k \geq 2$ Auswahlmöglichkeiten, solange diese voneinander unabhängig sind. Die Anzahl Möglichkeiten für die i-te Auswahl ist entsprechend immer n_i, unabhängig davon, was in den vorhergegangenen Auswahlen konkret ausgewählt wurde. Sind k Auswahlen zu treffen, so gibt es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$ verschiedene Möglichkeiten.

Eine zentrale Fragestellung in der Kombinatorik ist folgende: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Grundmenge von n Elementen k-mal ein Element auszuwählen. Je nach Fragestellung kann ein Element mehrfach oder auch nur einmal ausgewählt werden. Manchmal spielt auch die Reihenfolge der gewählten Elemente eine Rolle. Es werden die folgenden Typen und Anordnungen untersucht.

Permutation, Variation und Kombination
Bei einer **Permutation** werden alle n Elemente der Grundmenge ausgewählt und in eine Reihenfolge gebracht. Bei einer **Variation** wird die Reihenfolge der k Elemente berücksichtigt, bei einer **Kombination** hingegen nicht.

Viele Beispiele aus der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich gut auf das sogenannte Urnenmodell zurückführen. Daher lohnt es sich, sich intensiver mit dem Urnenmodell auseinanderzusetzen.

Beispiel: Das Urnenmodell

Eine Urne ist ein Behälter oder ein Gefäss, in dem sich n Objekte befinden, zum Beispiel verschiedenfarbige Kugeln oder mit unterschiedlichen Nummern versehene Karten. Wird k-mal je ein Objekt aus der Urne gezogen, so wird das Resultat **Stichprobe vom Umfang** k genannt. Die Stichproben können auf ganz unterschiedliche Arten gezogen werden, was auf die Anzahl der möglichen Stichproben einen wesentlichen Einfluss hat. Die Reihenfolge kann beim Ziehen berücksichtigt werden (oder nicht) und ein gezogenes Objekt kann wieder in die Urne zurückgelegt werden (oder nicht), bevor das nächste Objekt gezogen wird.

Im Folgenden werden die verschiedenen Typen von Anordnungen anhand des Urnenmodells veranschaulicht und erklärt. Gleichzeitig werden Formeln entwickelt, die eine direkte Berechnung der dazugehörigen Anzahlen erlaubt.

1.2 Permutation

Bei einer Permutation werden immer alle n Elemente ausgewählt, also alle n Objekte aus der Urne gezogen und in eine Reihenfolge gebracht.

Die Anzahl Möglichkeiten wird anhand des Multiplikationsprinzips berechnet. Für die erste Ziehung hat man n Objekte zur Verfügung, für die zweite Ziehung ein Objekt weniger, d.h. nur noch $n-1$. Für jede weitere Ziehung steht jeweils ein Objekt weniger zur Verfügung, bis bei der letzten Ziehung nur noch ein einziges Objekt zur Verfügung steht.

Permutation
Die Anzahl Permutationen wird mit $P(n)$ bezeichnet und es gilt die Formel:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

n-Fakultät
Das Symbol $n!$ (gelesen „n-Fakultät“) ist eine Abkürzung für das Produkt aller natürlichen Zahlen von n an absteigend bis 1.

Zusätzlich wird festgelegt: $1! = 1$ und $0! = 1$.

Beispiel: Urnenmodell, Permutation

In einer Urne liegen zehn von 0 bis 9 durchnummerierte Kugeln. Die Kugeln werden alle gezogen und in der Reihenfolge des Ziehens nebeneinander gelegt. Wie viele unterschiedliche Anordnungen aller Kugeln sind denkbar?

In diesem Beispiel ist $n = 10$ die Anzahl der Kugeln. Man zieht eine Kugel aus der Urne und legt sie auf den Tisch. Dann zieht man wieder eine Kugel und legt sie rechts neben die erste Kugel. Bei der ersten Ziehung hatte man zehn Kugeln zur Verfügung, bei der zweiten Ziehung sind es noch neun Kugeln, bis bei der letzten Ziehung nur noch eine Kugel in der Urne liegt. Dies ergibt somit $P(n) = n! = 3'628'000$ mögliche Anordnungen für zehn Kugeln.

Bisher wurde stillschweigend angenommen, dass alle Elemente der Permutation unterscheidbar sind. Ist dies nicht der Fall, so wird von einer **Permutation mit sich wiederholenden Elementen** gesprochen. Der Einfachheit halber wird auch der Begriff **Permutation mit Wiederholung** verwendet.

Sind von den n Elementen k_1 Elemente nicht unterscheidbar, so sind diese auf ihren Plätzen austauschbar, ohne dass sich dabei eine neue Reihenfolge ergibt. Auf diese Weise sind jeweils genau $k_1!$ Anordnungen identisch. Die gesuchte Anzahl berechnet sich somit durch $\frac{P(n)}{k_1!}$. Die gleiche Überlegung gilt, wenn es m Gruppen mit jeweils $k_1, k_2, ..., k_m$ identischen Elementen gibt.

Permutation mit Wiederholung
Eine Permutation von n Elementen, von denen sich jeweils $k_1, k_2, ..., k_m$ Elemente nicht unterscheiden lassen, heisst Permutation mit sich wiederholenden Elementen oder Permutation mit Wiederholung und wird mit $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$ bezeichnet. Es gilt die Formel:

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!} \quad (k_1 + k_2 + ... + k_m = n \text{ mit } k_i, n \in \mathbb{N})$$

Beispiel: Urnenmodell, Permutation mit Wiederholung

In einer Urne befinden sich fünf blaue, drei rote, eine grüne und drei gelbe Kugeln. Auf wie viele unterscheidbare Arten können die zwölf Kugeln aus der Urne gezogen und nebeneinander in einer Reihe angeordnet werden?

$$P_{12}(5, 3, 1, 3)\frac{12!}{5! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 3!} = 110'880 \text{ Möglichkeiten}$$

1.3 Variation und Kombination ohne Wiederholung

Bei den nächsten beiden Aufgabentypen werden aus einer Menge mit n Elementen k Elemente ausgewählt. Dabei kann jedes Element höchstens einmal gewählt werden, d.h. die ausgewählten Elemente dürfen sich nicht wiederholen. Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Objekten, wobei die gezogenen Objekte jeweils auf die Seite gelegt werden, so dass jedes Objekt höchstens einmal gezogen werden kann. Dies wird „Ziehen ohne Zurücklegen“ genannt. Spielt die Reihenfolge der Ziehung eine Rolle, so wird von einer **Variation ohne Wiederholung der Länge** k ($k \leq n$) gesprochen.

Wie bei der Permutation hat man für die erste Ziehung n Möglichkeiten, für die zweite Ziehung $n-1$ Möglichkeiten usw. Bei der letzten, der k-ten Ziehung hat man bereits $k-1$ Objekte gezogen und auf die Seite gelegt, daher stehen nur noch $n-(k-1) = n-k+1$ Objekte zum Ziehen zur Verfügung. Anhand des Multiplikationsprinzips kann man die Anzahl Variationen ohne Wiederholungen berechnen:

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Der Term $(n-k)$ entspricht dabei der Anzahl Objekte, die nach der letzten Ziehung in der Urne verbleiben.

Variation ohne Wiederholung
Die Anzahl Variationen ohne Wiederholung der Länge k wird mit $V(n, k)$ bezeichnet und es gilt die Formel:

$$V(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n \text{ mit } k, n \in \mathbb{N})$$

Bemerkung: Eine Permutation ist eine Variation ohne Wiederholung mit $k = n$. Es gilt

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Beim Nenner $(n-n)!$ wird ersichtlich, weshalb $0! = 1$ gesetzt worden ist.

Beispiel: Urnenmodell, Variation ohne Wiederholung

In einer Urne liegen zehn von 0 bis 9 durchnummerierte Kugeln. Nun wird achtmal je eine Kugel aus der Urne gezogen. Die Kugeln werden in der Reihenfolge des Ziehens nebeneinander gelegt. Wie viele unterschiedliche Anordnungen sind denkbar?

In diesem Beispiel ist $n = 10$ die Anzahl der Kugeln und $k = 8$ die Anzahl Ziehungen (oder der Umfang der Stichprobe). Für die erste Ziehung hat man zehn Kugeln zur Auswahl, für die zweite Ziehung neun, für die dritte acht usw. Für die achte Ziehung stehen dann noch drei Kugeln zur Auswahl. Dies führt auf die Rechnung $V(10,8) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 3 = \frac{10!}{2!} = 1'814'400$ mögliche Anordnungen.

Wird bei einer „Ziehung ohne Zurücklegen“ von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen die Reihenfolge nicht berücksichtigt, so handelt es sich um eine **Kombination ohne Wiederholung der Länge** k $(k \leq n)$.

Die k Elemente einer Kombination lassen sich jeweils auf $k!$ Arten anordnen (Permutation). Jede dieser Anordnungen entspricht gerade einer Variation ohne Wiederholung der Länge k. Aus dem Multiplikationsprinzip folgt für die Anzahl Kombinationen ohne Wiederholungen der Länge k: $C(n,k) \cdot k! = V(n,k)$.

Kombination ohne Wiederholung
Die Anzahl Kombinationen, also Auswahlen oder Teilmengen, mit k Elementen wird mit $C(n,k)$ bezeichnet und es gilt die Formel:

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \quad (k \leq n \text{ mit } k, n, \in \mathbb{N})$$

Binomialkoeffizient
Das Symbol $\binom{n}{k}$ wird als „n tief k“ gelesen und heisst **Binomialkoeffizient**.

Bemerkung: Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Antwort auf zwei unterschiedliche Fragen:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen k auszuwählen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen $n-k$ Elemente **nicht** auszuwählen?

Daraus folgt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dies kann durch Ausschreiben der Binomialkoeffizienten auch rechnerisch bestätigt werden.

Beispiel: Urnenmodell, Kombination ohne Wiederholung

In einer Urne liegen zehn von 0 bis 9 durchnummerierte Kugeln. Es wird achtmal eine Kugel gezogen, auf einem vorbereiteten Blatt jeweils die entsprechende Ziffer durchgestrichen und die Kugel beiseite gelegt. Zum Schluss wird geschaut, welche Ziffern gestrichen wurden. Wie viele unterschiedliche „Strichlisten“ sind möglich?

Die Aufgabe entspricht der Fragestellung: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus zehn Elementen acht auszuwählen? Das entspricht $C(10,8) = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = \frac{90}{2} = 45$.

1.4 Variation und Kombination mit Wiederholung

Auch bei den folgenden beiden Aufgabentypen werden aus einer Menge mit n Elementen k Elemente ausgewählt. Dabei kann jedoch jedes Element bis zu k-mal ausgewählt werden, d.h. die ausgewählten Elemente dürfen sich wiederholen. Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Objekten wobei die gezogenen Objekte jeweils wieder in die Urne zurück gelegt werden. Somit stehen bei jeder Ziehung jeweils alle n Objekte zur Verfügung. Dies wird „Ziehung mit Zurücklegen“ genannt.

Spielt die Reihenfolge der Ziehung eine Rolle, so heisst die dazugehörige Anordnung **Variation mit Wiederholung der Länge** k. In diesem Fall gibt es für k keine Einschränkungen, d.h. k kann auch grösser als sein als n. Da bei jeder Ziehung jeweils alle n Objekte zur Verfügung stehen, ist die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten bei jeder der k Ziehungen dieselbe, nämlich n.

Variation mit Wiederholung
Die Anzahl Kombinationen, also Auswahlen oder Teilmengen, mit k Elementen wird mit $\overline{V}(n,k)$ bezeichnet und es gilt die Formel:

$$\overline{V}(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k \quad (k, n, \in \mathbb{N})$$

Beispiel: Urnenmodell, Variation mit Wiederholung

In einer Urne liegen zehn von 0 bis 9 durchnummerierte Kugeln. Es wird achtmal eine Kugel gezogen, die Nummer notiert und die Kugel zurück in die Urne gelegt. Wie viele unterschiedliche achtstellige Ziffernfolgen sind möglich?

Bei jeder Ziehung stehen alle zehn Kugeln zur Auswahl. Daraus folgt $\overline{V}(10,8) = 10^8$.

Wird bei einer „Ziehung mit Zurücklegen“ von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen die Reihenfolge nicht berücksichtigt, so wird von einer **Kombination mit Wiederholung der Länge** k gesprochen. Deren Anzahl zu bestimmen, ist die schwierigste Aufgabe in diesem Kapitel. Die folgende Idee führt auf die Lösung. Die Kreuze (X) in der nachfolgenden Darstellung geben an, welche der n Elemente mit welcher Vielfachheit gezogen wurden.

1	2	3	...	$n-1$	n
X		XX	...	X	

Die 1 wird gezogen, die 2 dagegen nicht, die 3 dafür zweimal usw. Das Resultat der Ziehung lässt sich dann durch das folgende „Muster“ beschreiben:

X||XX|...|X|

Für die n „Kammern“ unterhalb der n Elemente oder Zahlen brauch es $n-1$ Trennstriche (|).

Jedes dieser möglichen „Muster“ setzt sich aus $(n-1)$ Strichen und k Kreuzen zusammen, d.h. aus insgesamt $(n-1+k) = (n+k-1)$ Zeichen und Symbolen. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass es $(n+k-1)$ Plätze sind, die mit $(n-1)$ Strichen und k Kreuzen belegt werden müssen. Die Belegung von $(n+k-1)$ Plätzen mit k Kreuzen entspricht einer Kombination ohne Wiederholung, denn von den $(n+k-1)$ Plätzen müssen k zum Platzieren der Kreuze ausgewählt werden. Somit gibt es $C(n+k-1, k)$ Möglichkeiten.

Kombination mit Wiederholung
Die Anzahl Kombinationen mit Wiederholung wird mit $\overline{C}(n, k)$ bezeichnet. Aus den obigen Überlegungen folgt die Formel:

$$\overline{C}(n, k) = C(n+k-1, k) = \binom{n+k-1}{k} \quad (k, n, \in \mathbb{N})$$

Bemerkung: Anstatt aus den $(n+k-1)$ Plätzen k zum Platzieren der Kreuze auszuwählen, kann man $(n-1)$ Plätze für die Striche auswählen. Dazu hat man $C(n+k-1, n-1) = \binom{n+k-1}{n-1}$ Möglichkeiten.

Daraus folgt $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$. Durch Ausschreiben der Binomialkoeffizienten kann dies auch rein rechnerisch bestätigt werden.

Beispiel: Urnenmodell, Kombination mit Wiederholung

In einer Urne liegen zehn von 0 bis 9 durchnummerierte Kugeln. Es wird achtmal eine Kugel gezogen, auf einem vorbereiteten Blatt bei der entsprechenden Ziffer ein Kreuz gemacht und die Kugel zurück in die Urne gelegt. Am Schluss wird gezählt, wie oft die einzelnen Ziffern gezogen worden sind. Wie viele unterschiedliche Listen mit acht Kreuzen sind möglich?

Auf dem vorbereiteten Blatt werden die zehn Bereiche für die einzelnen Ziffern durch neun Trennstriche abgetrennt. Für jede Ziehung kommt ein Kreuz dazu. Dies führt auf die Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf $9 + 8 = 17$ Plätzen acht Kreuze zu platzieren?

Dies entspricht $\overline{C}(10, 8) = C(10+8-1, 8) = C(17, 8) = 24'310$ Möglichkeiten.

1.5 Übersicht über die sechs grundlegenden Aufgabentypen der Kombinatorik

Beispiel: Spielzeugauto

In einem Katalog sind neun Spielzeugautomodelle aufgeführt. Ein kleiner Junge darf sich vier Autos aussuchen.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die neun Spielzeugautomodelle im Katalog anzuordnen, wenn alle neun Modelle unetereinander auf einer Seite zu sehen sein sollen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die neun Spielzeugautomodelle im Katalog anzuordnen, wenn jeweils drei Modelle auf einer Seite stehen sollen, die Reihenfolge auf der Seite jedoch keine Rolle spielt?

c) Wie viele Möglichkeiten hat der Junge, vier Modelle zu wählen, wenn die vier Autos alle verschieden sein sollen?

d) Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn es auch mehrere Autos vom gleichen Modell sein können?

e) Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn die vier Autos verschieden sein sollen und er zusätzlich angeben soll, welches er am liebsten hätte, welches am zweitliebsten und welches am drittliebsten?

f) Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn es mehrere Autos vom gleichen Modell sein können und er noch angeben muss, welches von der Tante, welches vom Onkel, welches vom Opa und welches von den Eltern gekauft werden soll?

Die Anzahl der Spielzeugautomodelle ist $n = 9$. Der Junge kann viermal ein Auto wählen, d.h. $k = 4$. Im Urnenmodell entspricht dies einer Urne mit neun unterschiedlichen Kugeln, aus der viermal eine Kugel gezogen werden kann. Die folgenden Überlegungen helfen beim Lösen der Aufgaben.

a) Es werden alle Modelle (oder jede Kugel) ausgewählt und in eine Reihenfolge gebracht. Das entspricht einer Permutation: $P(9) = 9! = 362'880$.

b) Hier werden die Plätze im Katalog den Modellen zugeordnet. Es gibt drei nicht unterscheidbare Plätze auf der ersten Seite, drei nicht unterscheidbare Plätze auf der zweiten Seite und drei nicht unterscheidbar Plätze auf der dritten Seite. Die Plätze werden nun den neun Modellen zugeordnet. (Im Urnenmodell entspricht dies drei roten, drei schwarzen und drei weissen Kugeln, die in eine Reihenfolge gebracht werden sollen.) Das entspricht einer Permutation mit Wiederholung $P_9(3, 3, 3) = 1680$.

   Anstelle einer Permutation mit Wiederholung könnte man die Aufgabe auch mit Kombinationen ohne Wiederholung lösen. Zuerst werden aus den neun Modellen drei ausgewählt. Das entspricht $C(9, 3)$ Möglichkeiten. Dann werden aus den verbleibenden sechs Modellen drei ausgewählt, was $C(6, 3)$ entspricht. Anschliessend müssen noch drei aus drei Modellen gewählt werden wozu es genau $C(3, 3)$ Möglichkeiten gibt. Mit dem Multiplikationsprinzip folgt: $C(9, 3) \cdot C(6, 3) \cdot C(3, 3) = 1680$.

c) Die Reihenfolge spielt bei der Auswahl keine Rolle und jedes Modell kann höchstens einmal gewählt werden (ohne Wiederholung). Das entspricht einer Kombination mit Wiederholung: $C(9,4) = \binom{9}{4} = 126$.

d) Die Reihenfolge spielt bei der Auswahl keine Rolle und jedes Modell kann bis zu viermal gewählt werden (mit Wiederholung). Das entspricht einer Kombination mit Wiederholung: $\overline{C}(9,4) = \binom{12}{4} = 495$.

e) Hier spielt die Reihenfolge bei der Auswahl eine Rolle und jedes Modell kann höchstens einmal gewählt werden (ohne Wiederholung). Das entspricht einer Variation ohne Wiederholung: $V(9,4) = 3024$.

f) Die Reihenfolge spielt eine Rolle (das erste bekommt er von der Tante, das zweite vom Onkel usw.) und jedes Modell kann bis zu viermal gewählt werden (mit Wiederholung). Das entspricht einer Variation mit Wiederholung: $\overline{V}(9,4) = 6561$.

Um die richtige Formel für die Lösung einer Kombinatorikaufgabe zu wählen, muss bekannt sein, um welchen Aufgabentyp es sich handelt. Dabei können die folgenden Fragen und die tabellarische Zusammenfassung helfen.

- Spielt die Reihenfolge eine Rolle?
- Können Elemente mehrfach ausgewählt werden?
- Werden alle n Elemente ausgewählt?
- Sind die Elemente alle verschieden voneinander, also unterscheidbar?

Es werden n Elemente ausgewählt.		
	Die Elemente sind alle unterscheidbar.	Es gibt m Gruppen von jeweils $k_1, k_2, ..., k_m$ identischen Elementen dabei ist $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$
	$P(n) = n!$	$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$

Bei vielen Aufgaben der Kombinatorik müssen das Additions- und das Multiplikationsprinzip sowie die verschiedenen Formeln der sechs Grundtypen geschickt verknüpft werden.

Beispiel: Laufwettbewerb

An einem Laufwettbewerb warten Läufer aus drei verschiedenen Teams. Das Team A besteht aus 5 Läufern, das Team B besteht aus 4 Läufern und das Team C besteht aus 3 Läufern. Beim Zieleinlauf kommen alle 12 Läufer nacheinander im Ziel an.

a) Bei wie vielen der möglichen Zieleinläufe besetzen die Läufer vom Team A die Plätze 1, 5, 8, 9 und 12?

Aus n Elementen wird k-mal ein Element ausgewählt. Alle Elemente sind unterscheidbar.		
	ohne Wiederholung ($k \leq n$)	mit Wiederholung
Reihenfolge wird berücksichtigt	$V(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\overline{V}(n,k) = n^k$
Reihenfolge wird nicht berücksichtigt	$C(n,k) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	$\overline{C}(n,k) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$

b) Wie viele mögliche Zieleinläufe gibt es, bei denen sich unter den ersten drei Läufern je ein Läufer aus Team A, B und C befindet?

c) Bei wie vielen der möglichen Zieleinläufe sind die ersten drei Läufer aus dem gleichen Team?

Für die Berechnung der gesuchten Anzahlen helfen die folgen Überlegungen.

a) Die fünf Läufer aus Team A können auf den fünf vorgegebenen Plätzen angeordnet werden. Dies entspricht einer Permutation $P(5) = 5!$. Die restlichen sieben Läufer können auf den restlichen sieben Plätzen angeordnet werden, $P(7) = 7!$. Verknüpft werden die beiden Permutationen durch das Multiplikationsprinzip.
Es gibt $5! \cdot 7! = 604'800$ mögliche Zieleinläufe.

b) Aus jedem Team muss ein Läufer ausgewählt werden. Dazu gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten. Für jede der möglichen Auswahlen gibt es $P(3) = 3!$ Möglichkeiten, die Läufer auf den ersten drei Plätzen anzuordnen. Die restlichen neun Läufer müssen auf den restlichen neun Plätzen angeordnet werden.
Somit gibt es $3! \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 9! = 130'636'800$ mögliche Zieleinläufe.

c) Sollen die ersten drei Läufer aus Team A sein, so können drei aus fünf Läufern ausgewählt werden. Da die Reihenfolge beim Zieleinlauf eine Rolle spielt handelt es sich hier um eine Variation ohne Wiederholung $V(5,3) = 60$. Die ersten drei Läufer können natürlich auch aus dem Team B sein. Dazu gibt es $V(4,3) = 24$ Möglichkeiten. Oder sie kommen aus Team C, dann gibt es $V(3,3) = 6$ Möglichkeiten. Verknüpft werden die drei Anzahlen durch das Additionsprinzip. Zusätzlich müssen die restlichen neun Läufer auf den restlichen neun Plätzen angeordnet werden.
Somit gibt es $(60 + 24 + 6) \cdot 9! = 32'659'200$ mögliche Zieleinläufe.

1.6 Der binomische Lehrsatz

Die **binomische Formel** zum Berechnen von $(a+b)^2$ lautet:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Die Formel ist ein Spezialfall des sogenannten **binomischen Lehrsatzes**. Der binomische Lehrsatz liefert eine Formel zu Berechnung von Potenzen von Summen $(a+b)^n$. Für kleine natürliche Exponenten n kann der Term durch Ausmultiplizieren schnell berechnet werden. Sobald n jedoch grösser ist als 4, wird die Berechnung anhand kombinatorischer Überlegungen einfacher und übersichtlicher.

Beispiel: Berechnung von $(a+b)^5$ anhand kombinatorischer Überlegungen

Wird die Potenz ausgeschrieben, folgt: $(a+b)^5 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$

Um das Produkt zu berechnen, gilt das Prinzip „Jeder Summand der einen Klammer wird mit jedem Summanden der anderen Klammern multipliziert". Dazu muss jeweils aus jeder der fünf Klammern ein Summand ausgewählt werden, diese werden dann miteinander multipliziert. So kann man z.B. aus der ersten Klammer a wählen, aus der zweiten Klammer b, aus der dritten Klammer a und aus der vierten und fünften Klammer b und erhält $a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot b = a^2b^3$.

Dies könne man nun für jede der $2^5 = 32$ möglichen Auswahlen machen und dann die so erhaltenen Produkte zusammenfassen. Mit kombinatorischen Überlegungen lässt sich die Lösung schneller finden.

Wie viele der 32 Produkte sind von der Form a^2b^3? Dies entspricht der Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den fünf Klammern genau zwei mal ein a auszuwählen? Das ist eine Kombination ohne Wiederholung (aus jeder Klammer kann jeweils höchstens einmal ein a ausgewählt werden), somit lautet die Antwort $\binom{5}{2}$.

Analog kann man berechnen, wie oft die restlichen Produkte $a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5$ vorkommen:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{5}a^5 + \binom{5}{4}a^4b + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^5 + \binom{5}{0}b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Diese Überlegungen gelten allgemein für die Berechnung von $(a+b)^n$.

Binomischer Lehrsatz
Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Neben der Berechnung der Binomialkoeffizienten anhand der Formel gibt es eine weitere Bestimmungsmöglichkeit: Das PASCAL'sche Dreieck.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \qquad & 1 \\
n=1 & & & & & & \binom{1}{1} & & \binom{1}{0} & & & & & & & 1\quad 1 \\
n=2 & & & & & \binom{2}{2} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{0} & & & & & & 1\quad 2\quad 1 \\
n=3 & & & & \binom{3}{3} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{0} & & & & & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
n=4 & & & \binom{4}{4} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{0} & & & & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
n=5 & & \binom{5}{5} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{0} & & & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\
n=6 & \binom{6}{6} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{0} & & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}
$$

Das PASCAL'sche Dreieck
Das PASCAL'sche Dreieck wird von oben nach unten anhand folgender Regeln aufgebaut:

1. Jede Zeile beginnt und endet mit einer Eins.
2. Werden zwei benachbarte Zahlen addiert, so ergibt sich die dazwischen liegende Zahl der tiefer liegenden Zeile.

Die zweite Regel lässt sich mithilfe der Binomialkoeffizienten auch so schreiben:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Den Beweis dafür findet man durch direktes Nachrechnen oder kombinatorische Überlegungen.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(a-b)^4 = (a+(-b))^4 &= a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 \\
&= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+2b)^5 &= a^4 + 4a^3(2b) + 6a^2(2b)^2 + 4a(2b)^3 + (2b)^4 \\
&= a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4
\end{aligned}
$$

1.7 Aufgaben

1. Aus einer Gruppe von 17 Schülern sollen fünf für ein Organisationskomitee ausgewählt werden. Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es?

2. In einem Wohnblock, zu dem acht reservierte Parkplätze gehören, wohnen acht Familien, von denen aber nur sieben ein Auto besitzen und demzufolge einen Parkplatz benötigen.
   a) Auf wie viele Arten können die sieben Familien ihre Autos auf diesen Parkplätzen parkieren?
   b) Wie ändert sich die Anzahl Möglichkeiten, wenn die achte Familie auch noch ein Auto kauft?

3. Zwölf verschieden zusammengestellte Nahrungspakete werden an fünf Familien verteilt. Die grösste Familie erhält vier Pakete, die anderen Familien je zwei. Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gibt es?

4. An einem Velorennen nehmen zwölf Velofahrer teil. Wie viele verschiedene Zieleinläufe sind theoretisch möglich,
   a) wenn alle Teilnehmer das Ziel erreichen?
   b) wenn nur zehn der zwölf Teilnehmer das Ziel erreichen?

5. Eine Gesellschaft aus sechs Frauen und sechs Männern soll in einem Kino in einer Sitzreihe mit zwölf Sitzplätzen Platz nehmen.
   a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es für die zwölf Personen, sich auch die Sitzplätze zu verteilen?
   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn rechts neben jedem Mann eine Frau sitzen soll?
   c) Wie viele Anordnungen sind möglich, wenn alle Frauen nebeneinander sitzen wollen?
   d) In der Pause bringt jemand 15 identische Popcorn-Packungen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Packungen auf die zwölf Personen zu verteilen, wenn es keinerlei Einschränkungen gibt (d.h. jede Person kann auch keine oder alle Packungen erhalten)?

6. Herr Müller besitzt acht Paar Socken, welche er in zehn verschiedenen Fächern aufbewahren kann. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann Herr Müller seine Sockenpaare in die Fächer verteilen, wenn die Sockenpaare
   a) alle unterschiedlich sind und jedem Fach beliebig viele Sockenpaare liegen dürfen?
   b) alle unterschiedlich sind und in jedem Fach höchstens ein Paar Socken liegen dürfen?
   c) alle identisch sind und in jedem Fach beliebig viele Sockenpaare liegen dürfen?
   d) alle identisch sind und in jedem Fach höchstens ein Sockenpaar liegen darf?

7. Die Menge M besitzt n Elemente. Bestimme die Anzahl Teilmengen dieser Menge m. *Hinweis:* Betrachte zuerst die einfachen Fälle $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$.

8. Wie viele vierstellige Zahlen mit lauter verschiedenen Ziffern gibt es? Welcher prozentualer Anteil davon ist ungerade?

9. An einem Tennis-Turnier nehmen fünf Männer und sieben Frauen teil. Wie viele unterschiedliche Spiel-Paarungen sind denkbar, bei denen zwei Frauen gegen zwei Männer spielen?

10. a) $P(23|14)$ ist ein Gitterpunkt im 1. Quadranten. Wie viele unterschiedliche kürzeste Gitterwege gibt es vom Ursprung $O(0|0)$ zu P?
    b) Wie viele kürzeste Gitterwege gibt es vom Punkt $Q(3|6)$ zum Punkt $R(12|45)$?
    c) $P(x|y)$ ist ein Gitterpunkt im 1. Quadranten: $x, y \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es $C(x+y, x) = \binom{x+y}{x}$ kürzeste Gitterwege gibt, die vom Ursprung $O(0|0)$ zum Punkt P führen.
    d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der kürzesten Wege von a) über den Zwischenpunkt $Z(5|6)$ führt?

11. a) Der Gitterpunkt $W(8|8|8)$ ist die Ecke eines Würfels, dessen diagonal gegenüberliegende Ecke der Ursprung $O(0|0)$ ist und dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Wie viele kürzeste Gitterwege führen vom Ursprung O zum Punkt W?
    b) Berechne den prozentualen Anteil der kürzesten Gitterwege von O nach W, die durch den Würfelmittelpunkt $M(4|4|4)$ führen.

12. a) Weise nach, dass es exakt $\frac{(x+y+z)}{x!\cdot y!\cdot z!}$ kürzeste Gitterwege gibt, die den Koordinatenursprung mit dem Punkt $P(x|y|z)$ verbinden.
    b) Wie viele kürzeste Gitterwege führen vom Punkt $E(1|5|3)$ nach $F(9|7|8)$?
    c) Berechne die Anzahl der kürzesten Gitterwege von $E(1|5|3)$ nach $F(9|7|8)$, wenn zusätzlich verlangt wird, dass sowohl die beiden ersten wie auch die beiden letzten Streckenabschnitte der Länge 1 vertikal verlaufen müssen, also parallel zur z-Achse.

13. Bestimme die Summe aller dreistelligen Zahlen, die je nur aus ungeraden Ziffern bestehen.

14. Auf Beginn eines Schuljahres treten zwölf neue Schülerinnen in ein Mädcheninternat ein und müssen nachträglich auf die bereits gebildeten Klassen verteilt werden. Vier dieser Schülerinnen kommen in die Klasse 1A, drei in die Klasse 1B und die restlichen in die Klasse 1C. Zwei der zwölf Schülerinnen sind Zwillingsschwestern. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie in die gleiche Klasse kommen, wenn die Zuteilung auf die drei Klassen zufällig erfolgt?

15. Zeige durch Nachrechnen, dass gilt:
    a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
    b) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$
    c) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$
    d) $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

16. Schreibe ohne Klammern und fasse soweit wie möglich zusammen.
    a) $(x+y)^8$ b) $(a^2+b^3)^4$ c) $(7x-6y)^3$ d) $(a^3-b^4)^5$ e) $(-a+2)^4$ f) $(-a+1)^7$

17. Wie lauten Die Koeffizienten von a^7b^4, a^8b^3 und a^2b^{10} in der binomischen Entwicklung von $(a-b)^{11}$?

18. Gegeben ist die Gleichung $x+y+z=12$.
    a) Wie viele Lösungen (x,y,z) hat diese Gleichung für den Fall, dass $x,y,z\in\mathbb{N}$?
    b) Wie Lösungen hat diese Gleichung für $x,y,z\in\mathbb{N}_0$

19. Lara wirft 6 Mal einen Würfel und notiert bei jeder Wurfserie die sechs nacheinander geworfenen Augenzahlen.
    a) Welche Wurfserien sind wahrscheinlicher, jene mit lauter verschiedenen Augenzahlen oder jene, bei denen alle sechs geworfenen Augenzahlen prim sind?
    b) Wahrsager K. Lug behauptet, dass bei mindestens zwei Dritteln aller denkbar möglichen Wurfserien wenigstens eine 6 notiert werden kann. Gelegenheitsspielerin Lara überprüft diese Behauptung rein rechnerisch. Zu welchem Schluss ist sie dabei gekommen?

1.8 Lösungen

1. $C(17,5)=\binom{17}{5}=\frac{17!}{5!\cdot 12!}=6188$

2. a) $P(8)=8!=40'320$
   b) Die Anzahl Möglichkeiten ändert sich nicht.

3. Die Familien A, B, C, D und E werden den zwölf Paketen zugeordnet. Folglich gibt es viermal ein Paket für die Familie A und je zweimal ein Paket für die Familien B, C, D und E: $P_{12}(4,2,2,2,2)=1'247'400$.

4. a) $P(12)=12!=479'001'600$
   b) $V(12,10)=\frac{12!}{2!}=239'500'800$

5. a) $P(12)=12!=479'001'600$
   b) Es gibt sechs feste „Männerplätze“ für die sechs Männer und sechs feste „Frauenplätze“ für die sechs Frauen: $6!\cdot 6!=(6!)^2=518'400$.
   c) Es gibt sechs Sitzplätze für die Männer und einen 6er Block für die sechs Frauen. Daher müssen sieben Elemente angeordnet werden, nämlich sechs Männerplätze und ein Frauenblock. Die Frauen können sich auf ihre sechs nebeneinander liegenden Plätze verteilen wie sie wollen. Dies führt auf $7!\cdot 6!=3'628'000$ verschiedene Sitzmöglichkeiten.
   Alternativer Lösungsweg: Die Frauen können die Plätze 1 bis 6 oder 2 bis 7 oder ... oder 7 bis 12 belegen. Das sind insgesamt sieben Möglichkeiten, auf die wieder je die Überlegungen der Teilaufgabe b) passen: $(7\cdot 6!\cdot 6!=7!\cdot 6!=3'628'000)$.
   d) Es wird 15 Mal eine Person ausgewählt und dieser eine Packung Popcorn gegeben. Da die Packungen nicht unterscheidbar sind, spielt die Reihenfolge der Personenauswahl keine Rolle: $\overline{C}(12,15)=\binom{26}{15}=7'726'160$.

6. a) Es gibt zehn Fächer, von denen Herr Müller achtmal ein Fach auswählen muss. Da die Socken verschieden sind, spiel es eine Rolle, in welcher Reihenfolge die Fächer ausgewählt werden. Da ein Fach auch mehrfach ausgewählt werden darf gilt: $\overline{V}(10,8)=10^8$.

b) Es gibt zehn Fächer, von denen Herr Müller achtmal ein Fach auswählen muss. Da die Socken verschieden sind, spielt es eine Rolle, in welcher Reihenfolge die Fächer ausgewählt werden. Da ein Fach höchstens einmal ausgewählt werden darf gilt: $V(10,8) = \frac{10!}{2!} = 1'814'400$.

c) Es gibt zehn Fächer, von denen Herr Müller achtmal ein Fach auswählen muss. Da die Socken nicht verschieden sind, spielt es auch keine Rolle in welcher Reihenfolge die Fächer ausgewählt werden. Da ein Fach auch mehrfach ausgewählt werden darf gilt: $\overline{C}(10,8) = \binom{17}{8} = 24'310$.

d) Es gibt zehn Fächer, von denen Herr Müller achtmal ein Fach auswählen muss. Da die Socken nicht verschieden sind, spielt es auch keine Rolle in welcher Reihenfolge die Fächer ausgewählt werden. Da ein Fach höchstens einmal ausgewählt werden darf gilt: $C(10,8) = \binom{10}{8} = 45$.

7. Betrachtet man eine Teilmenge, so hat jedes der n Elemente der Menge genau einen der beiden Zustände „ist Element der Teilmenge“ oder „ist nicht Element der Teilmenge“. Um die Anzahl der Teilmengen zu bestimmen, kann man auch die folgend Frage beantworten: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus zwei Zuständen n-mal einen auszuwählen? Dies entspricht einer Variation mit Wiederholung $\overline{V}(2,n) = 2^n$.

8. Es gibt $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ mögliche Zahlen. Eine ungerade Zahl endet mit einer ungeraden Ziffer: $\underbrace{5}_{\text{4. Ziffer}} \cdot \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 7}_{\text{1.−3. Ziffer}} = 2240$. Das heisst, 49,4 % dieser Zahle sind ungerade.

9. Es müssen je zwei Männer und zwei Frauen ausgewählt werden: $C(5,2) \cdot C(7,2) = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} = 210$.

10.

a) $C(37,14) = \binom{37}{14} = 6'107'086'800$

b) $C(48,9) = \binom{48}{9} = 1'677'106'640$

c) Ein kürzester Weg von $O(0|0)$ nach $P(x,y)$ besteht aus x horizontalen Abschnitten, die jeweils um eine Einheit nach rechts gehen und y vertikalen Abschnitten, die jeweils um eine Einheit nach oben verlaufen. Wenn ein nach rechts verlaufener horizontaler Abschnitt mit H bezeichnet wird und ein vertikal nach oben mit V, kann ein kürzester Weg wie folgt codiert werden: HHVVVHVH...VHVHH.

Dieser Weg führt also zuerst zwei Schritte nach rechts, dann drei Schnitte nach oben, dann nach rechts, wieder nach oben usw. Das Zeichen H kommt in dieser Zeichenkette x-mal vor, das Zeichen V genau y-mal. Da ein solcher Weg aus total $x+y$ Abschnitten besteht, wird sein Code aus $x+y$ Zeichen gebildet.

Ein solcher Weg-Code ist eine Kombination, denn er ist bestimmt, sobald wir wissen an welchen der $x+y$ möglichen Positionen im Code das Symbol H steht. Für H müssen x Stellen aus den $x+y$ möglichen Positionen ausgewählt werden, was auf exakt $C(x+y,x)$ Arten möglich ist: $C(x+y,y) = \binom{x+y}{x} = \frac{(x+y)!}{x! \cdot y!}$.

d) Die Anzahl Wege über Z ist $C(11,5) \cdot C(26,8) = 721'711'050$. Daraus folgt: $P = \frac{6'107'086'800}{721'711'050} = 0.118 = 11,8\,\%$

11. a) Von den 24 Schritten müssen 8 in z-Richtung gehen und von den verbleibenden 16 Schritten müssen 8 in y-Richtung gehen. Die restlichen 8 Schritte gehen dann in x-Richtung: $C(24,8) \cdot C(16,8) = \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} = \frac{24!}{8! \cdot 8! \cdot 8!} = 9'465'511'770$.

    Alternativer Lösungsweg: Auf jedem der möglichen Wege gibt es je 8 Schritte in x-, y- und in z-Richtung. Dies entspricht einer Permutation mit Wiederholung: $P_{24}(8,8,8) = 9'465'511'770$.

    b) Von O zu M gibt es $C(12,4) \cdot C(8,4) = 34'650$ mögliche Wege. Von M zu W sind es ebenfalls $C(12,4) \cdot C(8,4) = 34'650$ mögliche Wege. Dies ergibt einen Anteil von $P = \frac{(34'650)^2}{9'465'511'770} \approx 12{,}7\,\%$.

12. a) Von den $x+y+z$ Schritten müssen z in z-Richtung gehen und von den verbleibenden $x+y$ Schritten müssen y in y-Richtung gehen. (Die restlichen x Schritte gehen dann in x-Richtung):
    $C(x+y+z,z) \cdot C(x+y,y) = \frac{(x+y+z)!}{(x+y)! \cdot z!} \cdot \frac{(x+y)!}{x! \cdot y!} = \frac{(x+y+z)!}{x! \cdot y! \cdot z!} = P_{x+y+z}(x,y,z)$

    b) $C(15,5) \cdot C(10,2) = \frac{(8+2+5)}{8! \cdot 2! \cdot 5!} = 135'135$

    c) $C(11,1) \cdot C(10,2) = \frac{(8+2+1)}{8! \cdot 2! \cdot 1!} = 495$

13. Es gibt 5^3 dreistellige Zahlen, die nur aus ungerade Ziffern bestehen. Schreibt man alle Zahlen untereinander, so kommt in der Einerspalte, in der Zehnerspalte und in der Hunderterspalte jeder Ziffer genau 25 Mal vor. Somit kann man die Summe wie folgt bilden: $(1+10+100) \cdot 25 \cdot (1+3+5+7+9) = 69'375$.

14. Es gibt $P_{12}(4,3,5)$ Möglichkeiten, die Mädchen den Klassen zuzuteilen. In $P_{10}(2,3,5)$ sind die Zwillinge in der Klasse 1A. Analog sind sie in $P_{10}(4,1,5)$ Fällen in der Klasse 1B und in $P_{10}(4,3,3)$ Fällen in der Klasse 1C. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zwillinge in der gleichen Klasse eingeteilt werden: $P = \frac{P_{10}(2,3,5)+P_{10}(4,1,5)+P_{10}(4,3,3)}{P_{12}(4,3,5)} = \frac{7980}{27'720} = \frac{19}{6} \approx 28{,}8\,\%$.

15. a) *algebraisch:*
    $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

    b) *algebraisch:*

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot ((n-k)-1)!} \\
&= \frac{k}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

    c) $\frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

    d) $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot ((n+k-1)-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-(n-1))! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$

16. a) $x^8 + 8x^7y + 28x^6y^3 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$

    b) $a^8 + 4a^6b^3 + 6a^4b^6 + 4a^2b^9 + b^{12}$

    c) $343x^3 - 882x^2y + 756xy^2 - 216y^3$

d) $a^{15} - 5a^{12}b^4 + 10a^9b^8 - 10a^6b^{12} + 5a^3b^{16} - b^{20}$

e) $a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$

f) $-a^7 + 7a^6 - 21a^5 + 35a^4 - 35a^3 + 21a^2 - 7a + 1$

17. a^7b^4 kommt $\binom{11}{7} = 330$ Mal vor. a^8b^3 kommt $\binom{11}{8} = 165$ Mal vor und da $(-b)^3 = -b^3$ ist, ist der zu bestimmende Koeffizient -165. Der Term a^2b^{10} kommt in der binomischen Entwicklung gar nicht vor, da er ein Produkt aus zwölf Faktoren darstellt.

18. a) Wenn in $1+1+...+1 = 14$ zwei der dreizehn Pluszeichen „gelöscht“ werden, erhalten wir eine mögliche Lösung. Daraus folgt die Anzahl Lösungen insgesamt: $\binom{13}{2} = 78$

    b) Werden bei einer Reihe von vierzehn 1 zwei Trennstriche eingefügt, können Lösungen in $\mathbb{N}_0$ dargestellt werden. Auf sechzehn Plätze werden also zwei Trennstriche eingefügt: $\binom{16}{2} = 120$

19. a) $P(\text{„Augenzahl verschieden“}) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}$, $P(\text{„Augenzahl prim“}) = \frac{3^6}{6^6} = \frac{1}{64}$
    $\frac{1}{64} = \frac{5}{320} > \frac{5}{324}$: Es ist also minim wahrscheinlicher, lauter Primzahlen zu werfen.

    b) $1 - \frac{5^6}{6^6} = \frac{6^6-5^6}{6^6} \approx 0.66510 < \frac{2}{3}$. Die von K. Lug aufgestellte Behauptung ist nicht klug, sondern ein Lug.