

23 Statistik

Ziel dieses Kapitels ist es eine Intuition für grundlegende statistische Begriffe und deren Eigenschaften zu bilden. Sie sollen begreifen, dass jede Messung und damit jede Statistik grundsätzlich ungenau ist. Die Ungenauigkeit einer Messung kann ebenfalls abgeschätzt werden und *muss* angegeben werden.

Statistik «ist die Lehre von Methoden zum Umgang mit quantitativen Informationen» (Daten). Sie ist eine Möglichkeit, «eine systematische Verbindung zwischen Erfahrung (Empirie) und Theorie herzustellen».¹ Unter Statistik versteht man die Zusammenfassung bestimmter Methoden zur Analyse empirischer Daten. [...] Die Statistik wird als Hilfswissenschaft von allen empirischen Disziplinen und Naturwissenschaften verwendet, wie zum Beispiel der Medizin (Medizinische Statistik), der Psychologie (Psychometrie), der Politologie, der Soziologie, der Wirtschaftswissenschaft (Ökonometrie), der Biologie (Biometrie), der Chemie (Chemometrie) und der Physik. Die Statistik stellt somit die theoretische Grundlage aller empirischen Forschung dar. Da die Menge an Daten in allen Disziplinen rasant zunimmt, gewinnt auch die Statistik und die aus ihr abgeleitete Analyse dieser Daten an Bedeutung. Andererseits ist die Statistik ein Teilgebiet der reinen Mathematik.

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Statistik>, 18. Oktober 2018

✱ **Aufgabe 455** Man findet manchmal Werbungen für Anlagefonds, die sich damit brüsten, in den letzten fünf Jahren immer besser als der Börsendurchschnitt gewirtschaftet zu haben, im Gegensatz zu anderen Fonds. Wir wollen Anlagefonds mit Münzwürfen nachstellen. Zahl heisst jeweils «der Fonds erwirtschaftet mehr Gewinn als der Börsendurchschnitt», Kopf heisst «weniger».

Nehmen Sie zwei Münzen und werfen Sie jede fünf mal. Notieren Sie sich, wie viel mal Sie «Zahl» geworfen haben. Wer hat die «beste» Münze?

Diskutieren Sie das Resultat und den Zusammenhang mit obiger Werbung für Anlagefonds.

✱ **Aufgabe 456** Eine Münze wird 50 mal geworfen und die Anzahl Würfe mit «Zahl» gezählt.

- Wie viel mal «Zahl» erwarten Sie durchschnittlich?
- Führen Sie ~~den~~ ^{Alan} Versuch mindestens einmal durch und notieren Sie an die Wandtafel, wieviel mal Sie «Zahl» geworfen haben. Notieren Sie daneben auch die prozentuale Abweichung vom erwarteten Wert.
- Kopieren Sie alle Resultate von der Wandtafel in Ihr Heft und berechnen Sie folgende Grössen: Total der Anzahl Würfe, total der Würfe mit «Zahl», die erwartete Anzahl Würfe «Zahl» und die prozentuale Abweichung davon.
- Machen Sie eine Grafik, aus der ersichtlich ist, welche Anzahl «Zahlwürfe» wie viel mal vorgekommen ist.

✱ **Aufgabe 457** Mit einer Münze kann ein zufälliges Ergebnis Kopf/Zahl erzeugt werden. Das kann dann als Ja/Nein, 0/1 oder z.B. als eine der beiden Mannschaften interpretiert werden, die das Anspiel erhält.

- Geben Sie eine Methode an, wie eine natürliche Zahl zwischen 0 und 3 (inklusive) mit wiederholten Münzwürfen erzeugt werden kann.
- Suchen Sie in der Klasse Personen, die in a) die gleiche Methode wie Sie vorgeschlagen haben. Überprüfen Sie dann durch mehrmaliges Wiederholen der Methode, ob alle Zahlen auch in etwa gleich häufig erzeugt werden. Tragen Sie dazu Ihre Resultate zusammen und zeichnen Sie die Häufigkeiten grafisch auf.
- Erklären Sie die gemessenen Häufigkeiten.
- Schlagen Sie eine Methode mit wiederholten Münzwürfen vor für die Erzeugung zufälliger natürlicher Zahlen von 0 bis und mit 15. Alle Zahlen sollen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugt werden.
- Schlagen Sie eine Methode vor für die gleichwahrscheinliche zufällige Erzeugung der natürlichen Zahlen von 0 bis und mit 2.

3 Zahlen

¹Horst Rinne (2008): *Taschenbuch der Statistik*. (4. Auflage), Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, S. 1



✘ **Aufgabe 458** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit einen «Joland zu pullen», d.h. bei 50 Münzwürfen genau 4 mal «Zahl» zu werfen?

Grundidee: Wirft man eine Münze 50 mal, kann das Resultat mit Nullen und Einsen aufgeschrieben werden (0 ist «Kopf», 1 ist «Zahl»). Man erhält also ein «Wort» mit 50 Zeichen.

Jedes dieser Wörter erhält man mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Es gibt genau ein Wort mit 0 Einsen, 50 Wörter mit genau einer Eins und noch viel mehr Wörter mit mehr Einsen.

Die erste Frage, die wir beantworten wollen, ist die Frage, wie viele Wörter der Länge 50 es überhaupt gibt. Danach zählen wir, wie viele Wörter es gibt mit Länge 50 mit genau vier Einsen. Der Quotient der beiden Zahlen ergibt die Wahrscheinlichkeit.

Gesamte Anzahl Wörter mit Länge 50 Für die gesamte Anzahl Wörter mit Länge 50 betrachten wir erst einmal Wörter der Länge 1, 2, usw.

Länge	Anzahl	Systematische Aufzählung aller Wörter
1	2	0, 1
2	4	
3	8	00, 01, 10, 11
4	16	
50	2 ⁵⁰	
n	2 ⁿ	

Um einzusehen, dass sich die Anzahl jedesmal verdoppelt, helfen folgende Überlegungen:

- Man erhält alle Wörter, indem man den vorhergehenden einmal '1', einmal '0' davor schreibt.
- Man erhält jede Binärzahl von 0 bis 2ⁿ-1 genau 1 mal.
- 2 Möglichkeiten pro Position.

Anzahl Wörter mit Länge 50 mit genau vier Einsen Um die Anzahl zu zählen, fragen wir uns, auf wie viele Arten können solche Wörter gebildet werden. Wir stellen uns dazu 50 Stellen mit Nullen gefüllt vor. Dann platzieren wir vier Einsen.

Für die Platzierung der ersten Eins haben wir 50 Möglichkeiten. Für die zweite Eins haben wir noch 49 Möglichkeiten (auf den Platz der ersten Eins dürfen wir diese nicht setzen). Für die dritte Eins bleiben noch 48 und für die vierte Eins noch 47 Möglichkeiten. Total haben wir also

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 5'527'200 \text{ Möglichkeiten.}$$

Aber *Achtung!* Wir haben jedes einzelne Wort mehrfach gezählt. Als Beispiel soll das Wort 10110010...0 dienen. Dieses Wort wurde z.B. mit der Platzierung 10230040...0 erreicht (wobei die Ziffern für die Nummer der Platzierung stehen). Aber natürlich auch mit der Platzierung 40320010...0. Wir müssen also folgende Frage beantworten:

Auf wie viele Arten können vier Einsen auf vier Positionen platziert werden? *Selina*

Für die erste Eins haben wir 4 Möglichkeiten, für die zweite noch 3, für die dritte 2 und die letzte nur noch 1 Möglichkeit. Total also

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ Möglichkeiten.}$$

Wir haben oben also jedes Wort 24-fach gezählt. Damit ist die Anzahl Wörter mit Länge 50 und genau 4 Einsen

$$\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 230'300. \quad \textit{Selina}$$



Die Wahrscheinlichkeit, einen «Joland zu pullen» ist also genau so gross, wie aus 2^{50} Wörtern zufällig eines der 230'300 Wörtern zu erwischen:

$$\frac{230300}{2^{50}} = \frac{57'575}{281'474'976'710'656} \approx 2.045 \cdot 10^{-10} \text{ also etwa 1 zu } \underline{5 \text{ Milliarden.}}$$

Alan

Ivo

P Selina

* **Aufgabe 459** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp im Schweizer Zahlenlotto zu gewinnen?

- a) Früher musste für einen Tipp sechs (unterschiedliche) Zahlen aus 45 ausgewählt werden.
- b) Heute müssen für ein ~~8~~ Tipp sechs (unterschiedliche) Zahlen aus 42 ausgewählt werden, plus eine Glückszahl aus 6.

Selina

* **Aufgabe 460** Wir betrachten ein Leiterspiel bei dem mit einem normalen Würfel mit Zahlen 1 bis 6 gewürfelt wird. Es wurde behauptet, dass das Feld 28 oft ein Spezialfeld ist, weil die Wahrscheinlichkeit, dieses zu erreichen grösser sei als für andere Felder. Der Grund sei, dass man im Durchschnitt 3.5 würfelt, dass also Vielfache von 7 mit grösserer Wahrscheinlichkeit besucht werden.

- a) Simulieren Sie die Situation mit einer Tabellenkalkulation und vergleichen Sie die Besuchshäufigkeiten der Felder 27, 28 und 29. Können Sie zuverlässig Unterschiede feststellen? Was ist mit den Feldern 5, 6 und 7? Können Sie sich die Resultate plausibel erklären?
- b) Berechnen Sie die exakten Wahrscheinlichkeiten P_i für den Besuch der Felder 0 bis 30.

für andere Felder Selina

23.1 Lage- und Streuungsmasse

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass wir einen reellen Wert messen möchten und dass die Messung mehrmals wiederholt wird. Als Resultat hätten wir nicht nur gerne eine Schätzung für den wahren Wert, sondern auch noch ein Intervall, worin der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (typischerweise 95%) liegen soll.

Die Anzahl Messwerte wird im Folgenden mit n und die einzelnen Messwerte mit x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnet. Beispiele solcher Messungen sind z.B. die Zeugnisnote in Mathematik, Blutdruckwerte, CO_2 -Werte in der Atmosphäre, die Grösse von Naturkonstanten, etc.

23.1.1 Lagemasse

Das verbreitetste Lagemass ist der **Durchschnitt**, auch **Mittelwert** oder **arithmetisches Mittel** genannt.

Merke Mittelwert

$$\mu = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Anstatt μ (mü, griechisches 'm') ist auch die Notation \bar{x} gebräuchlich.

Ein weiteres Lagemass, das ebenfalls oft angetroffen wird, ist der sogenannte **Median**, auch **Zentralwert** genannt. Er wird meist wie folgt berechnet:

Merke Median

Erst werden die Messwerte aufsteigend sortiert. Der Median ist dann der Wert in der Mitte der Liste (bei ungeradem n), bzw. der Mittelwert der beiden Werte in der Mitte der Liste (bei geradem n).

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{sonst} \end{cases}$$



✘ **Aufgabe 461** In einer Bar sind 20 «normale» Leute. Wie gross schätzen Sie den Median und den Mittelwert der Einkommen der anwesenden Gäste?

Der CEO eines Schweizer Grosskonzerns betritt die Bar. Wie sieht es jetzt mit dem Median und dem Mittelwert der Einkommen der anwesenden Gäste aus?

Welches der beiden Lagemasse ist in diesem Fall angemessener? *Tim*

✘ **Aufgabe 462** In einer Klasse mit 20 Schülern war der Notendurchschnitt bei einer Prüfung 4.42, wobei eine Schülerin die Prüfung nicht geschrieben hatte. Nach der Nachprüfung war der Notendurchschnitt eine 4.48. Die genaue Aufgabenstellung fehlt da absichtlich. Diskutieren und berechnen Sie!

Streuungsmaße

Ein Streuungsmaß gibt an, wie sehr eine Wertereihe «fluktuiert», d.h. wie verschieden die Werte sind, oder wie sehr «verstreut» die Werte sind.

Warum ein Streuungsmaß interessant ist, soll wie folgt motiviert werden: *Daria* Man nimmt an, man hat zwei unterschiedliche Messungen durchgeführt, die aber das Gleiche messen sollen. Beide Messungen produzieren zwei Wertereihen mit gleich vielen Werten. Die Streuung der ersten Wertereihe ist aber grösser als die der zweiten. Welcher Mittelwert ist «vertrauenswürdiger»? Bzw. bei welcher Messung kann ein kleineres «Vertrauensintervall» angegeben werden?

Es gibt verschiedene Varianten, die Streuung zu messen. Eine geläufige Variante (weil mathematisch einfach zu analysieren) ist die «Standardabweichung» (mit 'd!').

STDEV
STDABW

Merke Standardabweichung

Die (empirische) Standardabweichung einer Wertereihe x_1, x_2, \dots, x_n ist

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

wobei μ der Mittelwert und σ der griechische Kleinbuchstaben «sigma» ('s') ist.

Handwritten notes: $\mu = 4.3$, $4.5, 6, 3, \dots, 5$

Wie der Mittelwert ist die Standardabweichung nicht robust, d.h. deren Wert wird stark durch **Ausreisser** beeinflusst.

✘ **Aufgabe 463** Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung folgender Wertereihen:

- a) 105, 100, 100, 95, 105, 98. *$\mu = 100.5$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot (4.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 5.5^2 + 4.5^2 + 2.5^2)}$*
- b) Eine Folge von 100 Einsen. *≈ 3.937*
- c) Eine Folge mit 785 Einsen und 215 Nullen. Zusatzfrage: welches Experiment könnte diese Daten geliefert haben?
- d) 1, 2, 3, ..., 101. Verwenden Sie dazu die Summenzeichen-Funktion des TR, zu erreichen mit «menu, 4, 5». Auf dem Ti-89 mit `sum(Ausdruck, Laufvariable, untere Grenze, obere Grenze)`.

Ein weiteres Streuungsmaß ist der sogenannte «**Interquartilsabstand**». Dabei sind die «**Quartile**» ein Spezialfall der Quantile, die informell wie folgt definiert sind:

Zu einer Wertereihe x_1, x_2, \dots, x_n ist der p -Quantil ein Wert q so, dass ca. $100 \cdot p\%$ der Werte kleiner oder gleich q ist.

Ein Spezialfall ist der Median, der dem 0.5-Quantil, bzw. dem 50%-Quantil entspricht. Wie auch beim Median, gibt es verschiedene Definitionen für die Berechnung der Quantile. Wir verwenden hier die gleiche Definition, wie gängige Tabellenkalkulationsprogramme.

b) $\mu = 1$, $\sigma = 0$ (keine Streuung!)

c) $\mu = 0.785$, $\sigma \approx 0.411$

d) $\mu = 51$, $\sigma \approx 29.3$

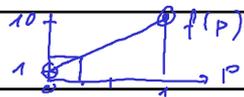


*Zahl $\in [0,1]$ z.B. $p = 0.25, n = 10$
 $f(p) = 3.25 \quad x_1, \dots, x_{10}$*

Definition 60 *p*-Quantil

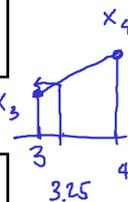
Erst werden die Werte aufsteigend sortiert: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Aus p wird eine Position mit einer linearen Funktion $f(p)$ zwischen 1 und n berechnet, so dass $f(0) = 1$ und $f(1) = n$. Ist $f(p)$ eine natürliche Zahl, ist das p -Quantil gleich $x_{f(p)}$.
Sonst rundet man $f(p)$ auf die nächste natürliche Zahl i ab. Man bestimmt eine lineare Funktion $g(p)$ so, dass $g(i) = x_i$ und $g(i+1) = x_{i+1}$. Das p -Quantil ist dann $g(p)$.

$f(x) = mx + q$



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{1} \quad q = 1 \quad f(p) = 9 \cdot p + 1$

Steigung Achsenabschnitt



Merke

Weiter definiert man das 1. Quartil als das 0.25-Quantil und das 3. Quartil als das 0.75-Quantil. Oft spricht man auch von Perzentilen, wenn p ein ganzzahliges Vielfache von $\frac{1}{100}$ ist.

Aufgabe 464

Gegeben sind 2 reelle Zahlen a und b . Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f jener linearen Funktion $f(t)$ für die $f(0) = a$ und $f(1) = b$ gilt.

Aufgabe 465

- a) Berechnen Sie das p -Quantil für $p = 0.1, p = 0.25$ und $p = 0.5$ für die Wertereihe 4, 6, 5, 4, 2.
- b) Für vorhergehende Aufgabe, sortieren Sie die Werte aufsteigend und zeichnen Sie die Punkte (i, x_i) in ein Koordinatensystem ein verbinden Sie benachbarte Punkte mit einer Strecke. Zeichnen Sie von $x = 1$ bis $x = 5$ eine zweite Skala von 0 bis 1 ein. Wie können damit die Quantile grafisch bestimmt werden?
- c) Berechnen Sie das 0.25-Quantil (das erste Quartil) für die Wertereihe 1, 2, 3, ..., 10.

23.2 Streuung des Mittelwerts

Dem Mittelwert einer Messreihe kann ebenfalls eine Streuung zugeordnet werden. Diese Streuung könnte man empirisch ermitteln, indem das Experiment viele Male wiederholt wird. Das ist aber meistens nicht praktikabel. Man kann aber mathematisch Folgendes für die Standardabweichung σ_μ des Mittelwerts μ nachweisen:

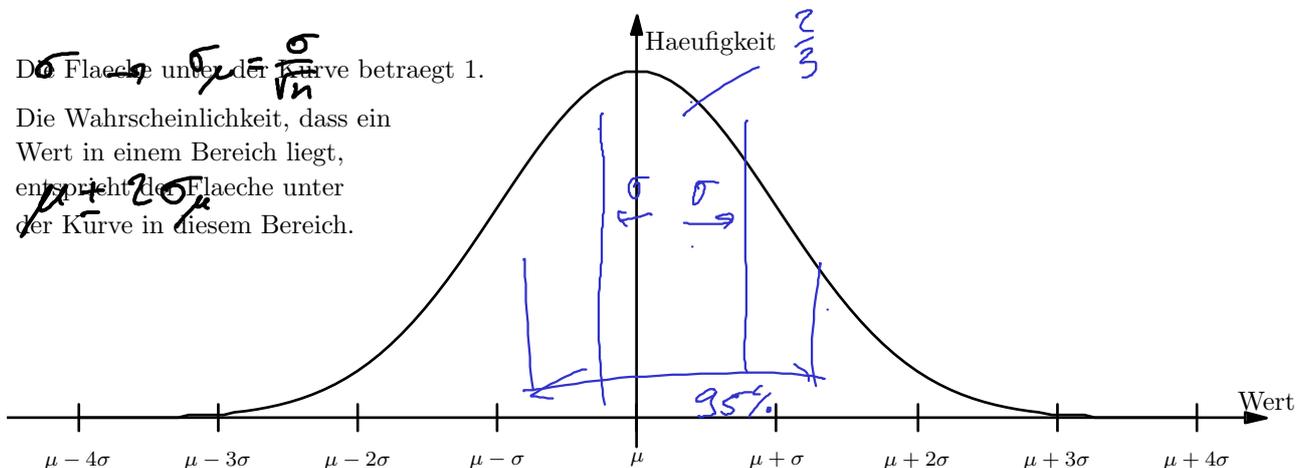
$\sigma_\mu \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma$ in guter Näherung für $n \geq 50$.

Hat man weniger als 50 Messwerte, wird mit obiger Formel die Streuung unterschätzt, d.h. ein davon abgeleitetes Vertrauensintervall ist zu klein (es ist dann die sogenannte t -Verteilung zu benutzen).

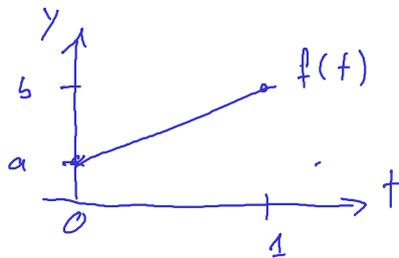
Weiter kann mathematisch gezeigt werden, dass **Mittelwerte** gemäss einer **Glockenkurve** verteilt sind (was man durch vielmaliges Wiederholen des Experiments anschaulich machen könnte).

Die Fläche unter der Kurve beträgt 1.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert in einem Bereich liegt, entspricht der Fläche unter der Kurve in diesem Bereich.



464 $f(0) = a$, $f(1) = b$



$f(t) = \underbrace{(b-a)}_{\text{Steigung}} \cdot t + \underbrace{a}_{\text{Achsenabschnitt}}$

Test: $f(0) = (b-a) \cdot 0 + a = a \checkmark$

$f(1) = b - a + a = b \checkmark$

Indizes \rightarrow $\begin{matrix} p=0 & \dots & \frac{1}{2} & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$

465

Werte aufsteigend: $2, 4, 4, 5, 6$

0.5-Quantil (Median) $x_3 = \underline{4}$ 0.25-Quantil

0.25-Quantil (1. Quantil) $x_2 = \underline{4}$

$f(p) = 1 + 4 \cdot p$ $f(0.25) = 1 + 1 = 2$





Für die Glockenkurve (Normalverteilung) mit der Spitze bei μ und der «Breite» σ gelten folgende Faustregeln:

Merke Faustregeln für die Glockenkurve

Im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ liegen ungefähr $\frac{2}{3}$ (68.3%) der Werte.
Im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ liegen ungefähr 95% (95.45%) der Werte.

Weitere Werte sind für $\pm 3\sigma$ 99.73%, für $\pm 4\sigma$ 99.993% und für $\pm 6\sigma$ 99.999998% (damit arbeiten die Physiker am CERN).

Daraus lassen sich jetzt für den Mittelwert **Vertrauensintervalle** bzw. **Konfidenzintervalle** bilden, d.h. Intervalle in der der wahre Wert mit grosser Wahrscheinlichkeit liegt (typischerweise 95%).

Merke Vertrauensintervall für den Mittelwert

Bei 50 Messungen oder mehr, liegt der wahre Wert mit Wahrscheinlichkeit 95% im Intervall $[\mu - 2\sigma_\mu, \mu + 2\sigma_\mu]$.

23.3 Repetitionsaufgaben

✂ **Aufgabe 466** Gegeben sind die Wertereihen (x_i) :

- a) 13, 7, 6, 10, 8, 12, 7, 9
b) Eine Folge aus 100 Nullen und 200 Einsen.

Berechnen Sie den Mittelwert μ , den Median \tilde{x} , die Standardabweichung σ und das erste und dritte Quartil $q_{0.25}$ und $q_{0.75}$.

✂ **Aufgabe 467** Mit einem Würfel wird 600 mal gewürfelt. Dabei werden 120 Sechsen gezählt.

Daraus erhält man eine Wertereihe aus Nullen (keine Sechsen gewürfelt) und Einsen (Sechsen gewürfelt). Berechnen Sie den Mittelwert μ sowie die Standardabweichung des Mittelwerts σ_μ . Geben Sie ein 95%-Vertrauensintervall für den «wahren» Wert an. Würden Sie sagen, dass der Würfel gezinkt ist?

✂ **Aufgabe 468** In einer online-Umfrage wurde gefragt: «Haben Sie eine Sehhilfe?»

Es antworten 80 Teilnehmer mit folgendem Resultat: 20 Teilnehmer antworten «Ja», der Rest «Nein». Es wird getitelt «25% der Schweizer benötigen eine Sehhilfe».

Wie beurteilen Sie die Zuverlässigkeit der Umfrage und der Schlussfolgerung?

✂ **Aufgabe 469** Im Euromillions müssen erstens 5 Zahlen aus 50 ausgewählt werden. Zusätzlich dazu müssen zweitens 2 Sterne aus 12 ausgewählt werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die erste Wahl? Wie viele für die zweite? Wie viele total? Was ist die Wahrscheinlichkeit die 5 richtigen Zahlen und die 2 richtigen Sterne auszuwählen?

✂ **Aufgabe 470** Wir betrachten ein Poker-Spiel mit 52 Karten (4 Farben, Werte 2-10, J, Q, K, A). Eine Poker-Hand besteht aus 5 Karten. Wie viele mögliche Poker-Hände

- a) gibt es insgesamt?
b) gibt es mit vier Assen?
c) gibt es mit *genau* vier gleichen Werten?
d) gibt es mit *genau* drei gleichen Werten?
e) gibt es mit einem Full-House (d.h. 2 gleiche und 3 gleiche Werte)?

✂ **Aufgabe 471** Die Schulzimmerwetterstation (CO₂ Messgerät) im H21 überträgt die Daten drahtlos über das LoRa-Protokoll ins Informatiklabor im E-Stock. Cédric Solenthaler hat dabei für verschiedene Antennenkonfigurationen die gemessene Empfangsqualität aufgezeichnet, um herauszufinden, welche Konfiguration die beste Qualität liefert. Werten Sie die Messungen aus und beurteilen Sie.



23.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

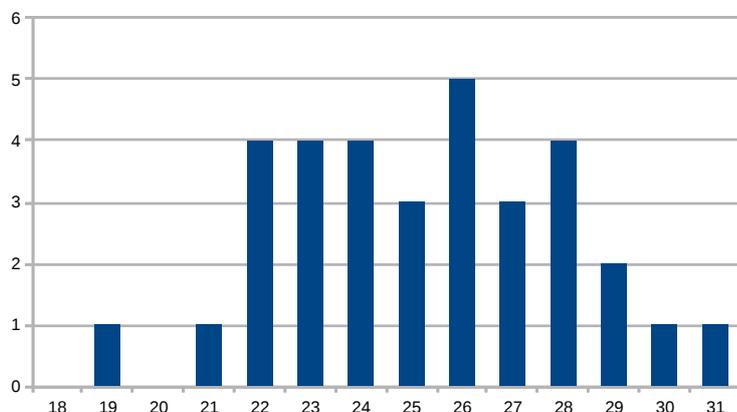
✱ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

✱ **Lösung zu Aufgabe 455** ex-bester-muenzwurf-fonds

✱ **Lösung zu Aufgabe 456** ex-muenze-durchschnitt

d) Ein mögliches Histogramm sieht wie folgt aus:



✱ **Lösung zu Aufgabe 457** ex-wuerfel-mit-muenze

a) Möglichkeit 1: 3 Würfe, Anzahl «Zahl» zählen. Möglichkeit 2: Münze 1 entscheidet gerade/ungerade, Münze 2 entscheidet 0/1 oder 2/3. Man könnte auch eine Binärzahl mit zwei Stellen erzeugen.

b) Bei Möglichkeit 1 kommen die 1 und die 2 drei mal so häufig vor wie die 0 und die 3. Bei Möglichkeit zwei sind die Häufigkeiten ausgeglichen.

c) Bei Möglichkeit 2 gibt es 8 gleich wahrscheinliche Varianten, wobei 0 für Kopf und 1 für Zahl steht: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

In $\frac{1}{8}$ der Fälle erhält man eine 0, in $\frac{3}{8}$ der Fälle eine 1, ebenso für die 2 und die 3 erhält man wieder nur in $\frac{1}{8}$ der Fälle.

Bei Möglichkeit 1 gibt es 4 gleich wahrscheinliche Varianten, die den Zahlen 0 bis 3 zugeordnet werden.

d) Binärzahl mit 4 Stellen, oder Intervallhalbierung. Erste Münze entscheidet < 8 oder ≥ 8 . Die nächste Münze halbiert die verbleibenden Zahlen etc.

e) Wie Möglichkeit 1, aber man wiederholt den Prozess, wenn eine 3 herauskommt.

✂ **Lösung zu Aufgabe 458** ex-wahrscheinlichkeit-4-von-50