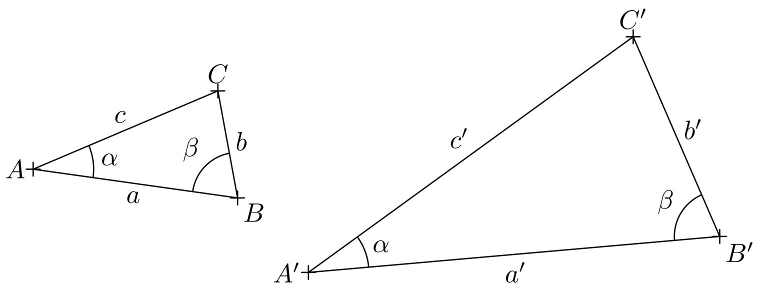
12 Ähnlichkeit und Streckung

Definition 21

Stimmen zwei Dreiecke in **zwei Winkeln** überein, so sind diese **ähnlich**. Insbesondere sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich.



$$a : b = a' : b' \qquad a : c = a' : c' \qquad b : c = b' : c'$$

Merke

Ein **Verhältnis** ist einfach eine **Division** der entsprechenden Grössen. Das Resultat ist eine reelle Zahl. Eine Verhältnisgleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$a : b = x : y \iff \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \underset{|\cdot by}{\iff} ay = bx$$

Produkt der Innenglieder = Produkt der Aussenglieder.
D.h. Innenglieder (bzw. Aussenglieder) können vertauscht werden:

$$a : b = x : y \iff a : x = b : y$$

Aufgabe 205 Zeigen Sie, dass für ähnliche Dreiecke (wie oben) auch gilt: $a : a' = b : b' = c : c'$.

Definition 22

Das Verhältnis sich entsprechender Seiten zweier ähnlicher Dreiecke wird **Streckungsfaktor** genannt und oft mit λ (lambda, griechisches «l») bezeichnet. D.h.

$$\lambda = a' : a = b' : b = c' : c$$

Aufgabe 206 Messen Sie oben ungefähr ab, mit welchem Faktor das Dreieck $\triangle ABC$ gestreckt wurde, um $\triangle A'B'C'$ zu erhalten. Mit welchem Streckfaktor muss $\triangle A'B'C'$ gestreckt werden, um $\triangle ABC$ zu erhalten?

Aufgabe 207

a) Ein Dreieck wird mit Faktor $\lambda = 3$ gestreckt. Wie vielmal grösser wird der Flächeninhalt?

b) Gleiche Frage mit Streckungsfaktor $\lambda = 4$.

c) Gleiche Frage mit Streckungsfaktor $\lambda = \frac{1}{10}$.

d) Gleiche Frage mit allgemeinem Streckungsfaktor $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

e) Ein allgemeines Viereck wird mit Faktor λ gestreckt. Wie verändert sich sein Flächeninhalt?

f) Ein Würfel wird mit Faktor λ gestreckt. Wie verändert sich sein Volumen? Wie seine Oberfläche?

Merke

Wird mit Faktor λ gestreckt, werden Streckenlängen mit λ, Flächeninhalte mit λ^2 und Volumen mit λ^3 multipliziert.

Aufgabe 208 Zwei A5 Papierbogen decken genau einen A4 Papierbogen ab. Die entsprechenden Rechtecke sind ähnlich.

a) Mit welchem Faktor wird ein A5 gestreckt, um ein A4 zu erhalten?

b) Was sind also die Seitenverhältnisse eines Papierbogens mit «A-Format»?

c) Ein A0 Papierbogen hat die Fläche von einem Quadratmeter und die gleichen Seitenverhältnisse wie ein A4 Bogen. Berechnen Sie Länge und Breite eines A0 Bogens.

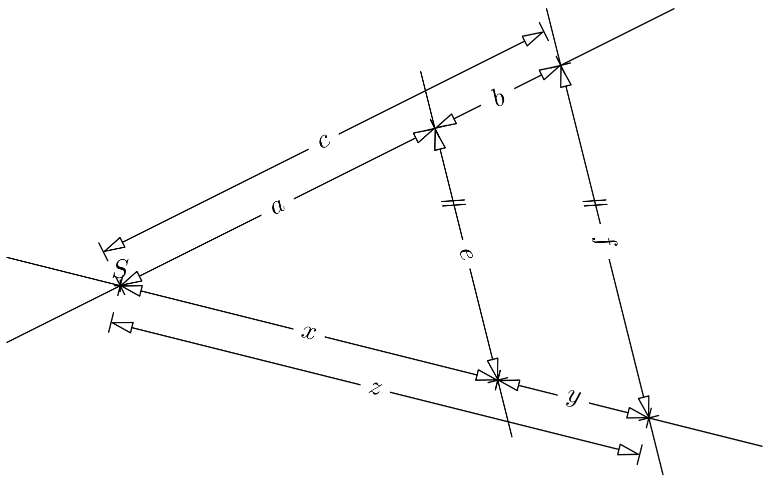
Aufgabe 209 Der Erddurchmesser ist etwa 3.67 mal grösser als der Monddurchmesser. Wieviel mal grösser ist die Erdoberfläche als die Mondoberfläche? Gleiche Frage für das Volumen?

Aufgabe 210 Ein kegelförmiges Cocktailglas soll zur Hälfte gefüllt werden. Bis auf welche Höhe muss das Glas gefüllt werden? Geben Sie das Resultat als Prozentsatz der Höhe an (100% = volles Glas). *Hinweis: Lösen Sie die Gleichung mit dem TR, wenn Sie die Gleichung nicht lösen können.*

Aufgabe 211 Eine Firma stellt Gartenzwerge her. Das Modell «Schlafmütze» wird in 3 Grössen hergestellt: Mit Höhen 10 cm, 15 cm und 20 cm. Die Zwerge sind aus massivem Gips. Das kleinste Modell wiegt 600 g. Das grösste Modell benötigt 50ml Farbe für den Anstrich.
Wie schwer sind die anderen Modelle und wieviel Farbe wird dafür benötigt (Annahme: Die benötigte Farbe ist proportional zur Oberfläche)?

12.1 Strahlensätze

Gegeben sind zwei Geraden, die sich im **Scheitel** S schneiden. Des Weiteren sind zwei Parallelen gegeben, die nicht parallel zu den ersten zwei Geraden sind und nicht durch den Punkt S gehen. Es entstehen zwei ähnliche Dreiecke:



Satz 6 2. Strahlensatz

Es gilt der 2. Strahlensatz: ✎

Aufgabe 212 Zeigen Sie, durch Umformen des 2. Strahlensatzes, dass auch der **1. Strahlensatz gilt**: $a : b = x : y$

✎

Aufgabe 213 Für die Figur in Abschnitt 12.1 auf Seite 69 schreiben Sie systematisch alle möglichen Verhältnisse auf, die a, b oder c als erste Strecke enthalten und schreiben Sie jeweils alle weiteren gleichen Streckenverhältnisse auf (wenn es diese gibt). Beispiel: $a : b = x : y$

Aufgabe 214 Sie haben ein Massband (maximal 2 m) und stehen in Schaffhausen am Rheinufer. Genau auf der gegenüberliegenden Uferseite ist ein Weidling (10m langes Ruderboot) angebunden. Wie können Sie die Flussbreite an dieser Stelle möglichst genau bestimmen? Als weitere Hilfsmittel stehen kleine Äste zur Verfügung. Machen Sie eine saubere Skizze!

Aufgabe 215 Sie stehen in Paris und haben Sicht auf den Eiffelturm. Wenn Sie Ihren Arm ausstrecken, verdeckt Ihre Faust mit aufgestelltem Daumen 👍 genau den Eiffelturm. Wie weit vom Eiffelturm sind Sie entfernt?

Aufgabe 216 Sie haben eine Dachlatte der Länge 2 m, ein Massstab der Länge 30 cm, eine kleine Schraubzwinge und einen Bleistift. Erklären Sie mit einer sauberen Skizze, wie damit die Höhe eines 15 m bis 40 m hohen Baumes bestimmt werden kann.

12.2 Konstruktionen

Aufgabe 217 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$. Ohne zu messen, mit Hilfe der Strahlensätze, teilen Sie die Strecke $[AB]$ konstruktiv in drei exakt gleich grosse Teile.

Aufgabe 218 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$. Teilen Sie diese Strecke konstruktiv im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$. Achtung: Es darf nichts gemessen werden!

12.3 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 207 ex-dreiecksflaechen-strecken

a)-d) : Die Dreiecksfläche ist $F = \frac{g \cdot h}{2}$, wobei g eine Grundlinie und h die entsprechende Höhe ist.

Es gilt $g' = \lambda g$ und $h' = \lambda h$, also $F' = \frac{g' \cdot h'}{2} = \frac{\lambda g \cdot \lambda h}{2} = \lambda^2 \frac{g \cdot h}{2} = \lambda^2 F$.

Damit sind die Antworten: a) 9, b) 16, c) $\frac{1}{100}$ und d) λ^2.

e): Jedes Viereck lässt sich in zwei Dreiecke zerlegen. Damit ist auch die Antwort ebenfalls λ^2.

f): Sei s die Seitenlänge. Es gilt $s' = \lambda s$. Damit ist $V' = s'^3 = (\lambda s)^3 = \lambda^3 s^3 = \lambda^3 V$. Das Volumen wird also mit dem Faktor λ^3 multipliziert.

Für die Oberfläche gilt $O' = 6 \cdot (\lambda s)^2 = \lambda^2 6 s^2 = \lambda^2 \cdot O$. Die Oberfläche wird also mit dem Faktor λ^2 multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 208 ex-dina-papier

a) Fläche wird verdoppelt, also $\lambda^2 = 2$ und damit ist $\lambda = \sqrt{2}$. Die negative Lösung der Gleichung kann ignoriert werden.

b) Sei μ das Seitenverhältnis eines A5 oder A4 Bogens. Sei x die kurze Seite eines A4 Bogens, also ist die lange Seite $\mu \cdot x$. Des Weiteren ist x ebenfalls die lange Seite eines A5 Bogens und $\frac{1}{\mu}x$ die kurze A5-Seite. Die kurze A5 Seite ist halb so lang, wie die lange A4 Seite. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu x &= 2\frac{1}{\mu}x && \mid : x \\ \mu &= 2\frac{1}{\mu} && \mid \cdot \mu \\ \mu^2 &= 2 \\ \mu &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die negative Lösung kann ignoriert werden. Das Seitenverhältnis ist also $1 : \sqrt{2}$.

c) Sei x die kurze A0-Seite in m. Die lange ist damit $\sqrt{2}x$. Es gilt für die Fläche in m^2:

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{2}x &= 1 && \mid : \sqrt{2} \\ x^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0.8409[m] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die lange Seite mit 1.1892 m.

Lösung zu Aufgabe 209 ex-erde-mond-volumen

Streckungsfaktor $\lambda = 3.67$. Die Oberfläche ist damit $\lambda^2 \approx 13.47$ mal grösser, das Volumen $\lambda^3 \approx 49.43$ mal grösser.

Lösung zu Aufgabe 210 ex-sektglas

Die verschiedenen Füllstände des Glases entsprechen verschiedenen Kegeln, die durch Streckung ineinander übergeführt werden können. Das volle Glas muss so gestreckt werden, dass sich das Volumen halbiert. Für den Streckungsfaktor gilt also:

$$\lambda^3 = \frac{1}{2} \qquad |\sqrt[3]{\cdot}$$
$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937$$

Das Glas muss also bis knapp 80% der Höhe gefüllt werden!

Lösung zu Aufgabe 211 ex-gartenzwerge

Durch Streckung mit Faktor $\lambda = \frac{3}{2}$, bzw. $\lambda = 2$ erhält man aus dem kleinen Model das mittlere, bzw. das grosse. Die Volumen und damit das Gewicht wird also mit λ^3 multipliziert.

Gewicht 15 cm Modell: $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 0.6$ kg $= \frac{27}{8} \cdot 0.6$ kg $= 2.025$ kg.

Gewicht 20cm Modell: $2^3 \cdot 0.6$ kg $= 4.8$ kg.

Vom grossen Modell zu den anderen sind die Streckfaktoren $\lambda = \frac{2}{3}$ bzw. $\lambda = \frac{1}{2}$. Die Oberflächen werden also mit λ^2 multipliziert.

Farbe für das 15cm Modell: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 50$ ml ≈ 22.2 ml

Farbe für das 10cm Modell: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 50$ ml $= 12.5$ ml.

Lösung zu Aufgabe 213 ex-allestrahlenverhaeltnisse

$a : b = x : y$
$a : c = x : z = e : f$
$a : x = b : y = c : z$
$a : y$ (kein spezielles Verhältnis)
$a : z$ (kein spezielles Verhältnis)
$a : e = c : f$
$a : q$ (kein spezielles Verhältnis)

$b : c = y : z$
$b : x$ (kein spezielles Verhältnis)
$b : y = a : x = c : z$
$b : z$ (kein spezielles Verhältnis)
$b : e$ (kein spezielles Verhältnis)
$b : f$ (kein spezielles Verhältnis)

$c : x$ (kein spezielles Verhältnis)
$c : y$ (kein spezielles Verhältnis)
$c : z = a : x = b : y$
$c : e$ (kein spezielles Verhältnis)
$c : f = a : e$

Lösung zu Aufgabe 214 ex-flussbreite

Seien die Punkte A und B die Bootsenden. Man bestimmt den Punkt P am diesseitigen Flussufer, der dem Punkt A genau gegenüber liegt. Man bestimmt den Punkt Q so, dass $\overline{PQ} = 2$ m und Q,P und A auf einer Linie liegen. Dann bestimmt man den Punkt R am Flussufer so, dass Q, R und B auf einer Linie liegen. Man misst die Strecke $\overline{PR} = d$.

Q ist der Scheitel, QA und QB die beiden Geraden und die beiden Flussufer sind die Parallelen. Damit gilt der 2. Strahlensatz und man erhält eine Gleichung für $\overline{PA}$:

$$\overline{QP} : d = \overline{QA} : \overline{AB}$$
$$\overline{QP} \cdot \overline{AB} = d \cdot \overline{QA}$$
$$2 \cdot 10 = d \cdot (2 + \overline{PA}) \qquad | -2d$$
$$20 - 2d = d\overline{PA} \qquad | : d$$
$$\frac{20 - 2d}{d} = \overline{PA}$$

Bsp. Wenn $d = 0.4$ m, dann ist der Fluss an dieser Stelle ca. 48 m breit.

Lösung zu Aufgabe 215 ex-eiffelturm
Sei A der Augpunkt, l die Distanz vom Auge zum Daumen, d die Höhe der Faust mit Daumen und h die Höhe des Eiffelturms und x die Entfernung vom Eiffelturm. Wenn man annimmt, dass d und h parallel sind, gilt der zweite Strahlensatz:

$$\begin{aligned} l : d &= x : h \\ lh &= dx && \mid : d \\ \frac{lh}{d} &= x \end{aligned}$$

Ungefähre Werte (in m): $l = 0.5$, $d = 0.15$ und $h = 300$. Damit ergibt sich die Distanz von 1000 m.

Lösung zu Aufgabe 216 ex-baumhoehe
Mit der 2m-Latte wird eine Distanz d von z.B. 12 m vom Baum abgemessen (oder etwas mehr oder weniger, je nach Baumhöhe). In etwa der Mitte der Latte wird der Massstab rechtwinklig zur Latte fixiert. Man stellt die Latte senkrecht auf den Boden und positioniert sein Auge am Ende des Massstabs, Blick in Richtung Baum. Sei der Abstand zwischen Auge und Latte a (z.B. 0.3 m). Mit dem Bleistift makiert man auf der Latte jene Stellen, wo man die Wurzel und die Spitze des Baumes sieht. Die Distanz dieser Stellen sei b. Es gilt der zweite Strahlensatz, wobei h die Baumhöhe ist:

$$a : (a + d) = b : h \qquad \Leftrightarrow \qquad h = \frac{b(a + d)}{a}.$$

Genau genommen wird der Strahlensatz zwei Mal angewendet, wobei man 3 Geraden durch einen Scheitel hat (2 Sichtlinien und eine Horizontale). Das Verhältnis der Horizontalen Strecke überträgt sich auf das Verhältnis der Sichtlinen und damit jenes auf die Parallelen (Baum und Dachlatte).

Beispiel: $d = 12$ m, $a = 0.3$ m, $b = 1$ m. Also $h \approx 41$ m.

Lösung zu Aufgabe 217 ex-streckendreiteilung
Man lege eine Gerade durch A und trage darauf 3 mal die gleiche beliebige Strecke ab. Man verbinde den letzten Punkt mit B und ziehe Parallelen durch die anderen beiden abgetragenen Punkte. Durch diese Paralleln wird $[AB]$ jetzt dreigeteilt.

Lösung zu Aufgabe 218 ex-eins-zu-wurzel2
Man konstruiert ein beliebiges 45° rechtwinkliges Dreieck. Das Verhältnis von Kathete zu Hypotenuse ist $1 : \sqrt{2}$. Dieses Verhältnis kann nun mit Hilfe des Strahlensatzes übertragen werden.