

## Suites et séries arithmétiques, matF 2GB, 27 mai 2008

**Exercice 1** Pour les suites suivantes, donner les trois éléments suivants :

- a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...      b) 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...      c) 11, 15, 19, 23, 27, ...  
 d) 40, 33, 26, 19, 12, ...      e) -8, -5, -2, 1, 4, ...      f) 5, 3, 1, -1, -3, ...

Trouver des points communs des suites ci-dessus.

Pour chaque suite, trouver une formule qui permet de calculer directement le  $n$ -ième élément.

**Exercice 2** Chaque ligne du tableau suivant contient des informations sur une suite arithmétique. Compléter le tableau.

$a_1$	$d$	$a_4$	$a_9$
17	-2		
	3	33	
2		3	
		5	4

**Exercice 3** Écrire les trois premiers et les deux derniers termes des sommes suivantes.

Exemple :  $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ .

- a)  $\sum_{i=1}^{51} (2i - 1)$       b)  $\sum_{l=3}^{12} l^2$       c)  $\sum_{l=0}^{200} (l(200 - l) + 1)$       d)  $\sum_{a=0}^{51} x^a$       e)  $\sum_{n=0}^{12} \frac{1}{n!}$       f)  $\sum_{l=7}^{77} \sin(l\alpha)$

**Exercice 4** Soient les sommes suivantes :

- a)  $1+2+3+4+5+6+7+8+9$       b)  $1+2+3+4+\dots+98+99$   
 c)  $2+4+6+8+10+\dots+96+98+100$       d)  $100+101+102+\dots+998+999+1000$   
 e)  $20+17+14+11+\dots+(-7)+(-10)$       f)  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

(où  $(a_n)$  est une suite arithmétique de différence  $d$ ).

– Écrire chaque somme à l'aide du signe de sommation  $\sum$ .

– Calculer ces sommes.

– Trouver une bonne explication comment calculer ces sommes facilement.

**Exercice 5** Soit une suite arithmétique  $(a_n)$  de différence  $d$ . Soit  $s_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i$ . Compléter :

$a_1$	$d$	$a_{10}$	$s_{10}$
10	3		
2		20	
-5			85
		43	250
	-2		-30

**Exercice 6** Une poutre de bois (Holzbalken) de 4m de long est sciée en 10 parts de sorte que chaque part mesure 6cm de plus que le précédent.

a) Quelle est la longueur du plus petit part ?

b) Est-ce que c'est possible d'avoir chaque fois une différence de 10cm ?

c\*) Calculer la différence limite pour que ce soit encore possible.

**Exercice 7** Si l'on fait la somme de tous les numéros de page d'un livre, on obtient 53'956. Combien de pages a ce livre ?

## Suites et séries arithmétiques, matF 2GB, 6 juin 2008

**Exercice 8** Écrire les deux premiers et les deux derniers facteurs des sommes suivantes. Indiquer le nombre d'éléments et calculer la somme, si possible.  $(a_n)$  est une suite arithmétique de différence  $d$ .

a)  $\sum_{i=1}^{31} (12i - 30)$    b)  $\sum_{l=2}^{31} (14 - 2l)$    c)  $\sum_{j=0}^{10} (j(j+1) - j^2)$    d)  $\sum_{a=77}^{777} \frac{1}{7}a$    e)  $\sum_{n=6}^{12} n^2$   
f)  $\sum_{o=-6}^6 (10o + 10)$    g)  $\sum_{i=1}^{10} a_{2n}$    h)  $\sum_{i=3}^9 a_{3n-1}$    i)  $\sum_{i=1}^n 1$    j)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1$

**Exercice 9** Déterminer  $a_1$  et  $d$  de la suite arithmétique  $(a_n)$  avec les propriétés suivantes :

a)  $a_3 = 3$  et  $a_1 + a_2 = a_3$    b)  $\sum_{i=10}^{20} a_i = 319$  et  $\sum_{j=10}^{14} a_j = 115$    c)  $a_4 = 16$  et  $a_2 = 2a_1$ .

**Exercice 10** Les frais d'entretien d'un bâtiment sont de 8000.- la première année. Puis chaque année les frais d'entretien augmentent de 1200.-. a) Donner une formule pour calculer les frais lors de l'année  $n$ . b) Calculer la somme des frais des premiers 20 années.

**Exercice 11** Calculer  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$  et trouver une explication géométrique pour ce résultat.

**Exercice 12** Soit la suite  $(b_n)$  avec  $b_n = n^2 - 4n$ . Écrire les 10 premiers éléments de la suite  $(b_n)$ . Soit  $(c_n)$  la suite définie comme  $c_n = b_{n+1} - b_n$ . Est-ce que  $(c_n)$  est arithmétique? Si oui, donner la différence  $d$ . Prouver que c'est vrai pour tous les éléments de la suite!

## Solutions

Ex8 a)  $-18 + (-6) + \dots + 330 + 342$  avec  $n = 31$  et alors  $s_{31} = 31 \cdot (-18 + 342)/2 = 5022$ .

Ex8 b)  $10 + 8 + \dots + (-46) + (-48)$  avec  $n = 30$  et alors  $s_{30} = 30 \cdot (10 + (-48))/2 = 570$ .

Ex8 c)  $0 + 1 + \dots + 9 + 10$  avec  $n = 11$  et alors  $s_{11} = 11 \cdot (0 + 10)/5 = 55$ .

Ex8 d)  $11 + \frac{78}{7} + \dots + \frac{776}{7} + 111$  avec  $n = 701$  et alors  $s_{701} = 701 \cdot (11 + 111)/2 = 42761$ .

Ex8 e)  $36 + 49 + \dots + 121 + 144$  avec  $n = 7$  mais cette suite n'est pas arithmétique et alors on ne peut pas appliquer la formule.

Ex8 f)  $-50 + (-40) + \dots + 60 + 70$  avec  $n = 13$  et alors  $s_{13} = 13 \cdot (-50 + 70)/2 = 130$ .

Ex8 g)  $a_2 + a_4 + \dots + a_{18} + a_{20}$  avec  $n = 10$  et alors  $s_{10} = 10 \cdot (a_2 + a_{20})/2 = 5(a_2 + a_{20}) = 5(a_1 + d + a_1 + 19d) = 5(2a_1 + 20d) = 10(a_1 + 10d)$ .

Ex8 h)  $a_8 + a_{11} + \dots + a_{23} + a_{26}$  avec  $n = 7$  et alors  $s_7 = 7 \cdot (a_8 + a_{26})/2 = 7(a_1 + 7d + a_1 + 25d)/2 = 7(2a_1 + 32d)/2 = 7(a_1 + 16d)$ .

Ex8 i)  $1 + 1 + \dots + 1 + 1$  avec " $n = n$ " et alors (de manière compliquée)  $s_n = n \cdot (1 + 1)/2 = n$ .

Ex8 j)  $(1) + (1 + 1) + \dots + (1 + 1 + \dots + 1 + 1) = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$  avec " $n = n$ " et alors  $s_n = n(n + 1)/2$ .

Ex9 a)  $a_1 = d = 1$  Ex9 b)  $a_1 = 1, d = 2$  Ex9 c)  $a_1 = d = 4$

Ex10 a)  $f_n = 8000 + (n - 1) \cdot 1200$  Ex10 b) 308000

Ex11  $n^2$  Considerer un carré et l'augmenter de deux bords.

Ex12  $c_n = b_{n+1} - b_n = (n + 1)^2 - 4(n + 1) - (n^2 - 4n) = 2n - 3$  et alors  $d = c_{n+1} - c_n = 2(n + 1) - 3 - (2n - 3) = 2$  et ceci est valable pour tout  $n$ .

## Suites et séries géométriques, matF 2GB, 10 juin 2008

**Exercice 14** Pour les suites suivantes, donner les trois éléments suivants :

- a) 1,2,4,8,16,32,...      b) 1,10,100,1000,10000,...      c) 16,8,4,2,1,0.5,...  
 d)  $\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9, -27, \dots$       e)  $\frac{2}{3}, -1, 1.5, -2.25, \dots$       f)  $1, x, x^2, x^3, \dots$

Trouver des points communs des suites ci-dessus.

Pour chaque suite, trouver une formule qui permet de calculer directement le  $n$ -ième élément.

**Exercice 15** Chaque ligne du tableau suivant contient des informations sur une suite géométrique. Compléter le tableau.

$g_1$	$q$	$g_4$	$g_9$
$\frac{1}{4}$	-2		
	2	32	
$\frac{1}{3}$		9	
		$\frac{1}{5}$	-625

**Exercice 16** Soit  $(g_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ . Trouver une formule pour calculer la  $n$ -ième somme partielle  $s_n = \sum_{k=1}^n g_k$ .

Exemples :

- a)  $1+2+4+8+16+32+64+128$       b)  $1+3+9+27+81+243$   
 c)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$       d)  $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}$

**Exercice 17** Soit une suite géométrique  $(g_n)$  de raison  $q$ . Soit  $s_{10} = \sum_{i=1}^{10} g_i$ . Compléter :

$g_1$	$q$	$g_4$	$s_{10}$
$\sqrt{3} - 1$	$\sqrt{3}$		
2		54	
	-2		-26257
6		$-\frac{2}{9}$	

**Exercice 18** Lesquelles des suites suivantes sont des suites géométriques? Lesquelles sont arithmétiques? Donner le quotient  $q$  ou la différence  $d$  le cas échéant.

- a)  $\ln(2), \ln(4), \ln(8), \ln(16), \ln(32), \dots$       b)  $2^7, 2^9, 2^{11}, 2^{13}, \dots$   
 c)  $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{32}, \sqrt{128}, \dots$       d)  $\sin(1^\circ), \sin(2^\circ), \sin(4^\circ), \sin(8^\circ), \dots$

**Exercice 19** D'une suite géométrique  $(g_n)$  on connaît  $g_1 = 1000$  et  $g_2 = 999$ . Combien d'éléments de cette suite sont plus grand que 1?

**Exercice 20** D'une suite géométrique  $(g_n)$  on connaît  $g_1 = 1$  et  $g_2 = \frac{11}{10}$ . Combien d'éléments de  $(g_n)$  se trouvent entre 1000 et 1100?

**Exercice 21** Soit  $(g_n)$  une suite géométrique avec tous les éléments positifs. On en construit une nouvelle suite  $b_n = \log(g_n)$ . Quelle est la nature de la suite  $(b_n)$ ?

**Exercice 22** On cherche trois nombres  $a, b$  et  $c$  tel que  $a, b, c$  forment une suite arithmétique de somme 3 et que  $b, c, a$  forment une suite géométrique.

**Exercice 23**  $a, b, c$  forment une suite géométrique. Calculer les solutions de l'équation  $ax^2 + 2bx + c = 0$ .

# Suites arithmétiques et géométriques

Nom : \_\_\_\_\_

Jeudi 31 mai 2007, matF 2C

Prénom : \_\_\_\_\_

La calculatrice et "Formeln und Tafeln" sont admis. Écrire les formules et équations nécessaires. Des solutions purement CAS ne seront pas acceptées. Le résultats numériques peuvent être données sous forme approchée (marquer un  $\approx$  dans ce cas!).

Bonne chance!

## Exercice 1

4 points

D'une suite arithmétique  $(a_n)$  on connaît les éléments  $a_3 = 7$  et  $a_6 = 13$ .

- Quelle est la différence  $d$  entre deux éléments de la suite?
- Quelle est le premier élément  $a_1$  de cette suite?
- Calculer la somme des 120 premiers éléments.

d) Calculer  $\sum_{k=40}^{80} a_k$ .

## Exercice 2

4 points

D'une suite géométrique  $(g_n)$  on connaît les éléments  $g_3 = 8$  et  $g_6 = 27$ .

- Quelle est la raison  $q$  de la suite?
- Quelle est le premier élément  $g_1$  de cette suite?
- Calculer la somme des 20 premiers éléments.

d) Calculer  $\sum_{k=10}^{30} g_k$ .

## Exercice 3

2 points

Calculer les sommes suivantes :

a)  $\sum_{i=4}^{44} (55 - i)$       b)  $\sum_{w=4}^{14} \left( 64 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^w \right)$

## Exercice 4

3 points

Pour les suites suivantes, trouver une définition explicite et implicite :

a)  $(x_n) : 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$       b)  $(y_n) : 53, 44, 35, 26, 17, 8, \dots$

## Exercice 5

4 points

D'un carton quadratique (longueur 1m) on découpe 4 carrés pour former une boîte cubique (voir l'image ci-dessous). Avec les 4 carrés restants, on refait la même chose et ainsi de suite.

- Combien de petits carrés aura-t-on après avoir répété le processus 5 fois? Combien a-t-on après  $n$  fois?
- Quelle est la longueur de côté d'un petit carré après avoir répété le processus 5 fois? Quelle sera la longueur de côté après  $n$  fois?
- Quelle sera le volume totale de toutes les boîtes après avoir répété le processus 5 fois? Quel sera le volume totale après  $n$  fois?

