17 Textaufgaben und Umgang mit dem TI-*n*spire

In diesem Kapitel werden verschiedene Textaufgaben geübt und dabei der TI-*n*spire eingesetzt. Der Fokus liegt auf dem Umsetzen von Text in Formeln und Gleichungen und der effizienten Verwendung des TI-*n*spire. Es können auch Gleichungen und z.T. Funktionen vorkommen, die wir noch nicht behandelt haben.

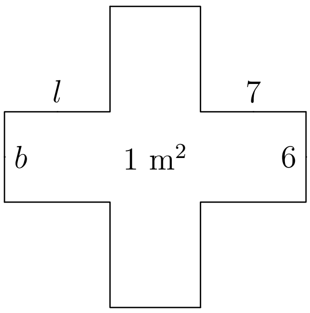
17.1 Darstellung

Der wichtigste Teil der Lösung einer Textaufgabe ist die Umsetzung des Textes in Formeln und Gleichungen. Dabei ist es absolut notwendig, auch die Masseinheiten festzulegen und diese insbesondere in den Gleichungen zu überprüfen, nicht dass z.B. km und km/h gleichgesetzt werden.

Aufgabe 316 Die Balken des offiziellen Schweizerkreuzes sind etwas länger als breit, nämlich im Verhältnis 7 : 6. Berechnen Sie Länge und Breite eines Balkens, wenn das Kreuz einen Flächeninhalt von 1 m^2 hat.

Lösungsschema

- Informative Schaufigur/Skizze
- Unbekannte
  mit Masseinheit und Kommentar
- Gleichung(en)
  mit Masseinheit und Kommentar
- Lösung(en) der Gleichung(en)
- Antwort, evtl. Reflexion



Aufgabe 317 Wie lange, breit und tief sind die Balken eines «3-dimensionalen Schweizer Kreuzes» (mit 6 Balken), das ein Volumen von 1 m^3 hat?

Aufgabe 318 Würde ein irdisches Raumschiff auf eine Geschwindigkeit v nahe der Lichtgeschwindigkeit c beschleunigt, verlangsamt sich die Zeit an Bord (für einen Betrachter auf der Erde) um den Faktor γ, der gleich dem Kehrwert der Wurzel aus der Differenz von 1 und dem Quadrat des Verhältnisses von v und der Lichtgeschwindigkeit c ist.

Der nächste Stern (Proxima Centauri) ist gut 4.2 Lichtjahre entfernt. Das Raumschiff ist mit der Geschwindigkeit $v = \lambda c$, für $\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.9$ oder $\lambda = 0.99$ unterwegs.

Wie lange dauert die Reise jeweils zu Proxima Centauri hin und zurück für einen Betrachter auf der Erde und für einen Passagier auf dem Raumschiff? Wie gross ist die Altersdifferenz zwischen Zwillingen, von denen einer mitflog und der andere auf der Erde geblieben ist?

Wie schnell (Angabe in Prozent der Lichtgeschwindigkeit) muss das Raumschiff fliegen, damit der Altersunterschied der Zwillinge 5 Jahre beträgt?

Wie gross kann der Altersunterschied bei dieser Reise werden?

Hinweis: Speichern Sie die Geschwindigkeiten als Liste in einer Variablen, den Gammafaktor als Funktion der Geschwindigkeit.

17.2 Cheat-Sheet für den TI-*n*spire

- **Vor dem Lösen einer Aufgabe**: Entweder Variablen a-z löschen (menu 1 4), oder ein neues Dokument (home 1), bzw. in einem bestehenden Dokument ein neues Problem (doc 4 1) anlegen.
- Gegebenes in geeigneten Variablen speichern (ctrl var), **Variablennamen auf Papier notieren!**. Beispiele:
  - $3 \cdot 10^8 \to c$ (Zahl speichern). *Alternative:* $c := 3 \cdot 10^8$.
  - $2 \cdot x^2 - \sqrt{x} \to f(c)$ (Funktion speichern). *Alternative:* $f(x) := \ldots$.
  - $\{3, \frac{1}{2}, -\sqrt{5}\} \to w$ (Liste von Zahlen speichern).
- Zwischenresultate ebenfalls in geeigneten Variablen speichern, **Variablennamen auf Papier notieren!**
- **Immer** mit **exakten Werten** weiterrechnen, **nie mit gerundeten**!
- Mit ctrl enter eventuell gerundete Werte ausgeben.

17.3 Arbeiten mit Listen

Listen werden zwischen geschweiften Klammern {} geschrieben, Werte werden durch Kommas getrennt. Mit Listen kann gerechnet werden. Der **Vorteil**: Eine ganze Menge Rechnungen kann auf einmal ausgeführt werden.

Werden Zahlen, Ausdrücke oder eine Funktion mit einer Liste verrechnet, bzw. ausgewertet, erhält man eine Liste mit den Resultaten für jeden Eintrag der Liste. Beispiele:

$\{1, 2, 4, 8\} + 2$ liefert $\{3, 4, 6, 10\}$, $\{1, 2, 3\}^2$ liefert $\{1, 4, 9\}$.

Werden zwei gleich lange Listen miteinander verrechnet, wird die Operation elementweise ausgeführt und das Resultat ist eine gleich lange Liste mit den Resultaten. Beispiele:

$\{1, 2, 4\} \cdot \{5, 6, 0\}$ liefert $\{5, 12, 0\}$, $\{1, 2, 3\}^{\{1,2,3\}}$ liefert $\{1, 4, 27\}$.

17.4 Gleichungen lösen

17.4.1 solve (menu 3 1)

Die Funktion `solve` (menu 3 1) liefert als Resultate wieder Gleichungen, mit denen nicht ohne Weiteres gerechnet werden kann. Man kann die Lösungen wie folgt extrahieren:

`exp▶list(solve(...,x),x)` (aus dem Katalog).

Einfacher aber geht es mit `zeros`.

17.4.2 zeros (menu 3 4)

Mit `zeros` werden Nullstellen einer Funktion gesucht. Dies kann zum Lösen einer Gleichung $L(x) = R(x)$ verwendet werden, indem diese zu $L(x) - R(x) = 0$ umgeformt wird und dann jene x gesucht werden, für die $L(x) - R(x)$ Null ist. Man erhält eine Liste mit den Lösungen. Beispiel:

`zeros(x`^{2}`+1/2*x-1,x)` $\to$ `a` liefert in der Variablen a gespeichert $\left\{-\frac{\sqrt{17}+1}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right\}$, die Lösungen der Gleichung $x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$.

Damit kann dann weiter gerechnet werden.

17.4.3 Notizen

17.5 Aufgaben

Aufgabe 319 Diese Aufgabe wurde genau so aus der Praxis an mich herangetragen. Es geht um die Saldierung eines Kontos (d.h. alles Geld abheben und Konto auflösen).

Es wird angenommen, dass die Rückzugslimite bereits aufgebraucht ist, d.h. für jeden weiteren Bezug fallen 2% Gebühren auf den abgehobenen Betrag an. Es verbleiben noch CHF 10'000.- auf dem Konto. Die Saldierungsgebühren betragen CHF 15.-, auf welche aber keine Rückzugsgebühren erhoben werden. Wie viel Geld bekommt der Kunde bei der Saldierung ausbezahlt?

Aufgabe 320 In einem Arduino Starter-Kit sind normalerweise 3 Arten von Widerständen dabei: 220 Ω, 1 kΩ und 10 kΩ.

Werden 2 Widerstände in Serie (d.h. hintereinander) geschaltet, addieren sich deren Widerstände. Werden 2 Widerstände parallel (d.h. nebeneinander) geschaltet, ist der resultierende Widerstand der Kehrwert der Summe der Kehrwerte der Widerstände.

Welche Widerstandswerte können mit 2 der obigen Widerständen erreicht werden?

Hinweis: Definieren Sie erst zwei geeignete Listen.

⋆ Ohne die Berechnungen auszuführen, beschreiben Sie, wie die Listen für alle Kombinationen von 3 Widerständen aussehen würden und welche Berechnungen man damit durchführen würde.

Aufgabe 321 Leonardo will Invar machen. Invar ist eine Verbindung mit einem extrem niedrigen Ausdehnungskoeffizienten, die aus 36% Nickel und 64% Eisen besteht. Er hat 20 kg einer Verbindung mit 20% Nickel und 80% Eisen. Und er hat 180 kg einer Verbindung mit 50% Nickel und 50% Eisen. Wie viel Kilo Invar kann er maximal machen?

Quelle: https://www.fibonicci.com/de/rechnen-mathematik/textaufgaben/textaufgaben-test-schwierig/.

Aufgabe 322 Leonardo macht bei einem Radrennen mit. Er startet entschlossen mit einer Geschwindigkeit von 35 km/h. Als Leonardo die Hälfte des Rennens hinter sich hat (in der Entfernung) realisiert er, dass er zu schnell gestartet ist, und er mindert seine Geschwindigkeit auf 25 km/h. Mit dieser Geschwindigkeit fährt er bis zum Ende des Rennens. Er braucht dafür insgesamt 3 Stunden und 36 Minuten. Welche Entfernung ist Leonardo gefahren?

Online werden als mögliche Lösungen 52.5 km, 50 km, 55 km und 47.5 km angegeben. Warum kann man sofort sagen, dass alle 4 Lösungen sowieso komplett falsch sind?

Quelle: https://www.fibonicci.com/de/rechnen-mathematik/textaufgaben/textaufgaben-test-schwierig/.

Aufgabe 323 Leonardo muss für sein Rechenexamen 4 Prüfungen machen. Für die ersten 2 erzielt er eine 9.4 und eine 9.8. Was muss er im Durchschnitt für die nächsten 2 Prüfungen erzielen, wenn er eine 9.5 im Durchschnitt erreichen will? Die zwei Prüfungen, die er noch machen muss, zählen zusammen zu 25% für die Endnote mit.

Quelle: https://www.fibonicci.com/de/rechnen-mathematik/textaufgaben/textaufgaben-test-schwierig/.

Aufgabe 324 Nennen Sie eine 3-stellige Zahl, so dass, wenn Sie die Zahlen des Zehners und des Hunderters umdrehen, die resultierende Zahl 20% größer ist als die ursprüngliche Zahl.

Quelle: https://www.fibonicci.com/de/rechnen-mathematik/textaufgaben/textaufgaben-test-schwierig/.

17.5.1 Leistungsaufgaben und Verwandte

In der Physik wird Leistung als Arbeit pro Zeit definiert, wobei die Arbeit als Energie gemessen wird. Der Begriff der Arbeit kann aber auch verallgemeinert werden, wie z.B. eine Pumpleistung (Arbeit ist ein Volumen), Schreibleistung (Arbeit ist die Anzahl A4-Seiten) etc. Auch eine Geschwindigkeit kann als Leistung aufgefasst werden, wobei die Arbeit hier der Strecke entspricht. Im physikalischen Jargon ist das aber dringenst zu vermeiden, da der Begriff der Leistung als Energie pro Zeit definiert ist.

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Zeit} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Leistung}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Arbeit} = \text{Leistung} \cdot \text{Zeit}$$

Aufgabe 325 Leonardo hat in seiner Badewanne 3 Wasserhähne. Wenn er nur Wasserhahn 1 ganz aufdreht, dauert es 10 Minuten, bevor seine Wanne voll ist. Wenn er nur Wasserhahn 2 ganz aufdreht, dauert es 15 Minuten, bevor seine Wanne voll ist und wenn er nur Wasserhahn 3 ganz aufdreht, dauert es 30 Minuten. Wenn Leonardo alle Wasserhähne ganz aufdreht, wie lange dauert es dann, bevor seine Wanne voll ist?

Quelle: https://www.fibonicci.com/de/rechnen-mathematik/textaufgaben/textaufgaben-test-schwierig/.

Aufgabe 326 Hans kann Brennholz für einen Monat in 4 Stunden spalten. Max braucht dafür nur 3 Stunden. Wie lange brauchen sie, wenn sie zu zweit Holz spalten?

Begründen Sie erst einleuchtend, warum folgende Lösungen alle falsch sein müssen: 7 Stunden, 3.5 Stunden, 1.5 Stunden.

Aufgabe 327 Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr als ein grosser, um allein den Schutt wegzuführen. Beide gemeinsam könnten den Schutt in je 20 Fahrten wegführen. Wie viele Fahrten benötigt jeder allein?

Begründen Sie zuerst einleuchtend, warum folgende Lösungen falsch sein müssen: 11 und 20 Fahrten, 40 und 49 Fahrten, 20 und 29 Fahrten.

Quelle: https://www.macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele.shtml

17.5.2 Offenere Aufgaben

Aufgabe 328 Ein Kapital soll nach 20 Jahren verdoppelt werden. Wie muss der jährliche Zinssatz sein?

Aufgabe 329 Ein Elektronikfachgeschäft bietet den Kauf auf Raten an. Der jährliche Zinssatz, der in der Schweiz für Kredite erhoben werden darf, beträgt im Jahr 2017 10%.

Wie gross ist der monatliche Zinssatz, damit mit Zinseszins der effektive Jahrezins 10% beträgt?

Ein Kunde «kauft» ein Gerät für CHF 1000.- und vereinbart 24 gleich grosse monatliche Zahlungen. Wie gross sind diese und wieviel hat der Kunde am Ende effektiv für das Gerät bezahlt?

Hinweis: Definieren Sie eine Funktion, die aus einer Restschuld und der monatlichen Zahlung die nächste Restschuld berechnet. Definieren Sie dann damit weitere Funktionen, die dasselbe für 3, 6, 12 und 24 Monate berechnen.

Aufgabe 330 Ein Schrittmotor bewegt sich pro Schritt um einen konstanten Winkel. (Für gängige 3D-Drucker-Motoren sind das oft 1.8°, wobei die Schritte dann meist noch in Achtel- oder Sechzehntelschritte unterteilt werden.)

Ein Mikrokontroller generiert einen Puls, um jeweils einen Schritt auszulösen. Das Ziel ist es, eine konstante Beschleunigung zu erhalten. Wie müssen dafür die Zeitabstände zwischen den Pulsen gewählt werden?

Aufgabe 331 Schätzen Sie die Anzahl Bügelperlen «Pyssla» in einer Büchse ab. Finden Sie Vorschläge, wie man vorgehen könnte.

Aufgabe 332 Beim Fallschirmspringen wird die sogenannte Grenz- oder Endgeschwindigkeit erreicht, d.h. die Geschwindigkeit, wo sich die Gravitation und die Luftreibung aufheben. Die Formel dafür lautet

$$v_e = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_w}},$$

wobei m die Masse der Person, g die Fallbeschleunigung, ρ die Dichte der Luft, A die Querschnitssfläche der Person und C_w der Strömungswiderstandskoeffizient ist.

a) Schätzen Sie A und m für eine typische Person ab. Berechnen Sie daraus C_w, wenn man weiss, dass v_e typischerweise 195 km/h beträgt.

b) Wenn man gleiche Proportionen voraussetzt, wie hängen A und m zusammen?

Oder anders überlegt: Wie verändern sich A und m, wenn mit einem Faktor λ gestreckt wird? Eliminieren Sie dann λ aus den beiden Gleichungen.

c) Wenn man annimmt, dass für eine 70 kg schwere Person die Endgeschwindigkeit 195 km/h beträgt, wie gross ist dann v_e für eine 50 kg bzw. 100 kg schwere Person?

17.6 Prüfungsvorbereitung

Aufgaben, wie sie an der Prüfung kommen könnten: 325, 326, 327, 321, 323, 319, 322, 328.

Aufgabe 333 Dokumentieren Sie die Ein- und Ausgaben auf dem TR, um die Aufgabe zu lösen.
Von 6 Personen kennt man Grösse l (in m) und Gewicht m (in kg):

Grösse in m	1.6	1.65	1.7	1.75	1.8	1.85
Gewicht in kg	50	65	60	72	68	90

a) Berechnen Sie den BMI (in kg/m^2) dieser Personen. Dieser wird mit der Formel $\frac{m}{l^2}$ berechnet, wobei m die Körpermasse und l die Körpergrösse ist.

b) Bei gleichbleibenden Proportionen sollte die Masse (Volumen) mit der dritten Potenz der Grösse (Strecke) anwachsen, d.h. $m \approx c \cdot l^3$, wobei c eine Konstante ist. Für jede der gegebenen Personen, berechnen Sie c und bestimmen Sie den Median aller Werte c. *Hinweis: Die TR-Funktion* `median` *berechnet den Median einer Liste, zu finden mit* «menu 6 3 4». Der Median ist der Wert in der Mitte, wenn man die Liste sortieren würde.

c*) Wenn man (fälschlicherweise) gleiche Proportionen annimmt, wie schwer müsste dann nach Aufgabe b) ein 1.2 m grosses Kind sein?

Aufgabe 334 Lösen Sie folgende Gleichungen und Gleichungssysteme mit dem TR. Dokumentieren Sie dabei die Ein- und Ausgabe des TR.

a) $x^3 + 24 = x(3x + 10)$

b) $\sqrt[3]{x+2} = x^2$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = \frac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Aufgabe 335 Machen Sie eine brauchbare Skizze und beschreiben Sie Ihre Unbekannten und Gleichungen stichwortartig.

a) Bestimmen Sie die angenäherten Koordinaten der Punkte P, die vom Ursprung den Abstand 3 haben und vom Punkt $A = (2, 1)$ den Abstand 2.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ deren Graphen durch den Ursprung, den Punkt $(1, 1)$ und den Punkt $(-2, -1)$ geht. *Hinweis: Ein Punkt liegt auf dem Graphen einer Funktion, wenn «beim Einsetzen der x-Koordinate die y-Koordinate heraus kommt».*

c) Bestimmen Sie die Seitenlängen eines Quaders mit Volumen 1 l so, dass sich die Seitenlängen wie 2:3:5 verhalten.

Aufgabe 336 Hansli und Vreneli basteln Tischkärtchen für ihre Hochzeit. Alleine bräuchte Vreneli 2 Stunden, zusammen brauchen sie 1 Stunde und 20 Minuten. Wie lange bräuchte Hansli alleine?

17.7 Lösungen

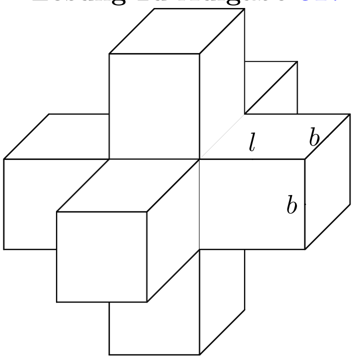
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you'll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 317 ex-ch-kreuz-3d



Unbekannte: l, b in m. Länge und (quadratische Breite) der 6 Balken.

Verhältnis	$l : b = 7 : 6$	
Volumen	$6lb^2 + b^3 = 1$	in m^3

TR: `solve(l/b=7/6 and 6*l*b^2+b^3=1, l,b)`
Lösungen: $b = \frac{1}{2}$ und $l = \frac{7}{12}$.
TR: `ctrl enter` für $\approx$.
Die Balkenseiten messen ungefähr 50 cm und 58.3 cm.
Das 1 m^3 Kreuz ist gut 1.66 m breit.

Lösung zu Aufgabe 318 ex-impuls-antrieb

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda c}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

TR: `1/(`$\sqrt{1-x^2}$`)` $\rightarrow$ `g(x)`
TR: `{1/2,9/10, 99/100}` $\rightarrow$ `v` damit sind die Geschwindigkeiten gespeichert.
TR: `g(v)` liefert $\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{10\sqrt{19}}{19}, \frac{100\sqrt{199}}{199}\right\}$.
TR: ctrl-enter liefert ungefähr $\{1.155, 2.294, 7.089\}$.
Das sind die Faktoren, um die sich die Zeit an Bord verlangsamt.
Für einen Betrachter errechnet sich die Dauer einfach durch die Strecke geteilt durch Geschwindigkeit: $t = s/v$.
TR: `2*4.2/v` $\rightarrow$ `e` 'e' wie Erdzeit.
Es dauert also 16.8 a, 9.33 a, bzw. 8.48 a für einen Betrachter auf der Erde.
Für die Passagiere werden diese Zeiten durch den entprechenden *gamma*-Faktor dividiert:
TR: `e/g(v)` $\rightarrow$ `p` 'p' wie Passagierzeit.
Für die Passagiere vergehen also 14.55 a, 4.068 a bzw. 1.197 a.
Der Altersunterschied beträgt
TR: `e-p`

2.251 a, 5.265 a, bzw. 7.288 a.

Der Alterunterschied Δt ist die Differenz der Zeiten:

$$\Delta t = \frac{s}{v} - \frac{s}{v} \cdot \frac{1}{\gamma(v)} = \frac{s}{v} \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma(v)}\right).$$

Wir wollen dass $\Delta t = 5$ und erhalten damit eine Gleichung für v, oder besser für λ mit $v = \lambda c$:

$$5 = \frac{2 \cdot 4.2c}{\lambda c}\left(1 - \frac{1}{g(\lambda)}\right).$$

TR: `solve(8.4/x*(1-1/g(x))=5,x)`
Der Taschenrechner liefert $\lambda \approx 0.879$. D.h. wenn das Raumschiff mit ca. 88% der Lichtgeschwindigkeit reist, beträgt der Altersunterschied nach der Rückkehr 5 Jahre.

Im Extremfall (praktisch Lichtgeschwindigkeit) vergehen auf der Erde 8.4 Jahre, für den Passagier so gut wie keine Zeit. Der maximale Altersunterschied ist also 8.4 Jahre für diese Reise.

Lösung zu Aufgabe 319 ex-saldierung
Unbekannte: x in CHF: Betrag, der effektiv ausbezahlt wird.

Gleichung: $x + 0.02x + 15 = 10000$ (Ausbezahlter Betrag, Gebühren darauf, plus CHF 15.- für Saldierung.

Lösung: $x \approx 9789.216$.

Dem Kunden werden CHF 9789.20 ausbezahlt (es wird mathematisch auf die nächsten 5 Rappen gerundet).

Lösung zu Aufgabe 320 ex-widerstands-kombinationen
Um alle Kombinationen von Widerständen zu erhalten, kann wie folgt vorgegangen werden:

```
{220, 220, 220, 1000, 1000, 10000} → r1
{220, 1000, 10000, 1000, 10000, 10000} → r2
```

Die möglichen Kombinationen sind entsprechende Elemente der beiden Listen. Beachten Sie, dass die Kombinationen hier «alphabetisch» geordnet sind.

Serie-Schaltung: `r1+r2` liefert `{440, 1220, 10220, 2000,11000,20000}`

Parallel-Schaltung: `1/(1/r1+1/r2)` liefert $\left\{110, \frac{11000}{61}, \frac{110000}{511}, 500, \frac{10000}{11}, 50000\right\} \approx \{110, 180, 215, 500, 909, 5000\}$

Für 3 Widerstände hätte man 3 Listen, wobei die n-ten Element der n-ten Kombination entsprechen (alphabetisch geordnet). Man erhält die indem man 6 Einträge 220 in der ersten Liste hat und die obigen Listen `r1` und `r2` für die 2. und 3. Liste. Dann 3 Einträge 1000 und die letzten drei Einträge von `r1` und `r2` und dann noch ein Eintrag 10000 in allen Listen.

Die möglichen Schaltungen sind: alle in Serie, 2 Parallel der dritte in Serie dazu, alle Parallel:
$r_1 + r_2 + r_3$, $\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}} + r_3$ und $\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}}$.

Lösung zu Aufgabe 321 ex-legierung
Es wird angenommen, dass er die Metalle nicht trennen kann, sondern nur die beiden Legierung zusammen aufschmelzen kann.

Es wird erst das Mischverhältnis der beiden Verbindungen bestimmt. Damit wird danach die knappere Resource ermittelt.

Unbekannte: λ als Zahl. Anteil der Verbindung 1. Damit ist $(1 - \lambda)$ der Anteil an Verbindung 2.

Berechnet wird nun der Nickel-Anteil der Mischung, der 0.36 betragen muss:

$$\frac{20}{100}\lambda + \frac{50}{100}(1-\lambda) = \frac{36}{100}$$

Der TR liefert $\lambda = \frac{7}{15} \approx 0.467$. Es braucht also ungefähr gleich viel beider Verbindungen, damit ist die erste Verbindung die limitierende. D.h. man kann 20 kg / λ Invar herstellen, also $\frac{20}{\frac{7}{15}} = \frac{300}{7} \approx 42.86$ kg.

Lösung zu Aufgabe 322 ex-velorennen

Unbekannte: Gesamtdistanz d in km.

Zeit erster Abschnitt: $s/v_1 = \frac{d/2}{35}$ in h.
Zeit zweiter Abschnitt: $s/v_2 = \frac{d/2}{25}$ in h.

Gesamte Zeit ist 3.6 h:

$$\frac{d/2}{35} + \frac{d/2}{25} = \frac{18}{5}$$

Der TR liefert $d = 105$ in km.

Das Rennen ging also über 105 km. (Und ja, die Lösungen online sind offensichtlich falsch, weil überschlagsmässig mindestens $3\text{h} \cdot 25\text{km/h} = 75\text{km}$ gefahren wurden).

Lösung zu Aufgabe 323 ex-notenrechnen

Wir gehen davon aus, dass die ersten beiden Prüfungen gleich gewichtet werden, nämlich mit $75/2\%$.

Die Unbekannte ist x, der Notenschnitt der letzten beiden Prüfungen.

Damit wird der Gesamtschnitt wie folgt berechnet:

$$9.4 \cdot \frac{0.75}{2} + 9.8 \cdot \frac{0.75}{2} + x \cdot 0.25 = 9.5$$

Der TR liefert: $x = 9.2$.

Der Schnitt der beiden letzten Prüfungen muss also 9.2 betragen.

Lösung zu Aufgabe 324 ex-dreistellige-zahl

Unbekannte: x, y, z, Hunderter-, Zehner- und Einer-Ziffer als Zahlen in $\{0, 1, 2, \ldots, 8.9\}$.

Erste Zahl: $100x + 10y + z$
Zweite Zahl: $100y + 10x + z$

Gleichung:

$$1.2 \cdot (100x + 10y + z) = 100y + 10x + z$$

Wir haben drei Unbekannte aber nur eine Gleichung. Wir können nach einer Variablen auflösen und dann die Bedingung verwenden, dass die Lösungen Ziffern sein müssen.

TR: `solve(6/5*(100*x+10*y+z)=100*y+10*x+z,z)`

Man erhält $z = 440y - 550x = 110 \cdot (4y - 5x)$. Damit das Resultat eine natürliche Zahl kleiner als 10 wird, muss die Klammer Null sein, also $z = 0$ und $4y - 5x = 0$. D.h. $y = \frac{5}{4}x$, diese letzte Gleichung hat nur eine Lösung kleiner als 10, nämlich für $x = 4$.

Die gesuchte Zahl ist also 450, woraus nach dem Vertauschen 540 wird.

Lösung zu Aufgabe 325 ex-badewanne

Die Arbeit wird hier in Badewannenvolumen gemessen, die Leistung in Badewannenvolumen/Stunde (Bdv/h).

Leistung Hahn 1: 6 (in Bdv/h)
Leistung Hahn 2: 4 (in Bdv/h)
Leistung Hahn 3: 2 (in Bdv/h)

Die kombinierte Leistung ist also 12 Bdv/h. Damit ist die Zeit
$\frac{1\text{ Bdv}}{12\text{ Bdv/h}} = \frac{1}{12}\text{ h} = 5\text{ min}$.

Lösung zu Aufgabe 326 ex-holz-spalten

Zusammen brauchen Sie sicher nicht länger als 3 Stunden, was Max schon alleine schafft. Hans arbeitet langsamer als Max, Sie können also zusammen nicht doppelt so schnell wie Max sein.

Die Leistung wird in Monatsverbrauch Holz pro Stunde (mvh/h) gemessen.

Leistung Hans: $\frac{1}{4}$ mvh/h.
Leistung Max: $\frac{1}{3}$ mvh/h.
Kombinierte Leistung: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.
Benötigte Zeit: $\frac{1\text{ mvh}}{\frac{7}{12}\text{ mvh/h}} = \frac{12}{7}\text{ h} \approx 1\text{ h }43\text{ min}$.

Lösung zu Aufgabe 327 ex-lastwagen

Alleine braucht jeder Lastwagen sicher mehr als 20 Fahrten, womit die erste und dritte Lösung ausscheidet. Wenn der grössere 40 Fahrten braucht, dann muss der kleinere ebenfalls 40 Fahrten brauchen, damit es mit je 20 erledigt sein kann.

Lösung

Die Leistung wird in Schutt/Fahrt gemessen.

Unbekannte: x, y in Schutt/Fahrt für Lastwagen klein und gross

Anzahl Fahrten alleine: $\frac{1}{x}$, bzw. $\frac{1}{y}$.

Kombinierte Leistung $x+y$ (wobei hier die Fahrten kombiniert werden, d.h. wenn der grosse und der kleine 1 Fahrt gemacht haben, zählt das als eine kombinierte Fahrt).

Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Fahrten zusammen:} \quad & \frac{1}{x+y} = 20 \\ \text{Differenz der Fahrten :} \quad & \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 9 \end{aligned}$$

TR: `solve(1/(x+y)=20 and 1/x-1/y=9)`

liefert $x = \frac{1}{45}$ und $y = \frac{1}{36}$. Bei der zweiten Lösung mit $y = -\frac{1}{5}$ bringt der zweite Lastwagen Schutt, anstatt diesen abzuführen. Diese Lösung kann verworfen werden.

Der kleine Lastwagen benötigt 45 Fahrten, der grosse 36.

Lösung zu Aufgabe 328 ex-zinseszins

Sei p der unbekannte Zinssatz (als Zahl in [0,1]) und K_{20} das Kapital nach 20 Jahren, K_0 das Startkapital.

Das Kapital nach 20 Jahren zum Zinssatz p ist $K_{20} = K_0 \cdot (1+p)^{20}$. K_{20} ist doppelt so gross wie K_0, also

$$2 = (1+p)^{20}$$

Der TR liefert $p \approx 0.0353$, also knapp 3.5%.

Zum Vegleich: Die Schweizer Pensionskassen erwirtschafteten im ersten Halbjahr 2017 ungefährt 2.75% Rendite.

Lösung zu Aufgabe 329 ex-ratenzahlung

Monatszins p:

$$(1+p)^{12} = 1 + 0.1$$

Daraus folgt $p \approx 0.7974\%$

TR: `zeros((1+x)`^{12}`-1.1,x)[2]` $\rightarrow$ `p`

Die Gleichung hat zwei Lösungen, wobei uns nur die positive Lösung interessiert. `zeros` liefert eine Liste, wovon wir das zweite Element mit der eckigen Klammer danach extrahieren.

Sei S_n die Restschuld nach n Monaten und z die monatliche Zahlung. Die Restschuld nach S_{n+1} Monaten ist die Schuld davor, plus monatliche Zinsen, minus die Abzahlung. Es gilt also

$$S_{n+1} = S_n \cdot (1+p) - z = f(S_n)$$

Damit ist $f(x) = (1+p)x - z$. Für 3 Monate: $f_3(x) = f(f(f(x)))$, für 6 Monate: $f_6(x) = f_3(f_3(x))$, $f_{12} = f_6(f_6(x))$ und $f_{24} = f_{12}(f_{12}(x))$.

Die Restschuld nach 24 Monaten ist genau 0. Also

$$f_{24}(1000) = 0$$

TR: `(1+p)·x-z` $\rightarrow$ `f(x)`
`f(f(f(x)))` $\rightarrow$ `f3(x)`
`f3(f3(x))` $\rightarrow$ `f6(x)`
`f6(f6(f6(f6(x))))` $\rightarrow$ `f24(x)`
`solve(f24(1000)=0,z)`
liefert $z \approx 45.946$.

Die monatlichen Raten belaufen sich auf CHF 45.95. Gesamthaft bezahlt der Kunde das 24-fache davon, also CHF 1102.80.

Lösung zu Aufgabe 330 ex-schrittmotor

Wir nehmen an, der Motor steht still und dass der erste Zeitabstand d ist (in Sekunden).

Wir nehmen weiter an, dass der Motor während dieser Zeitspanne gleichmässig beschleunigt (was unrealistisch ist, bzw. nur für ein gut gewähltes d in etwa zutrifft).

Die Distanz (bzw. der Winkel) wird in Schritten gemessen, beträgt also 1.

Es gilt für die Strecke s, Beschleunigung a und Zeit t:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{mit } s = 1,\ t = d \text{ und } a \text{ noch unbekannt.}$$

daraus folgt

$$a = \frac{2}{d^2}$$

Für die Zeitpunkte t_n, zu welchen der Motor an der Stelle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt:

$$n = \frac{1}{2}at_n^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{d^2} \cdot t_n^2 = \frac{t_n^2}{d^2}.$$

Daraus folgt

$$t_n = \sqrt{nd^2} = d\sqrt{n}$$

Die Pulslängen p_n ergeben sich jetzt aus der Differenz der Zeitpunkte $t_{n+1} - t_n$. Damit

$$p_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot d$$

Das geeignete d muss experimentell bestimmt werden (je nach Stärke des Motors, der bewegten Mechanik und gewünschten Beschleunigung).

Lösung zu Aufgabe 331 ex-buegelperlen

Online habe ich die Anzahl nicht gefunden. Angegeben ist das Gewicht der Perlen: 700 g. Wenn man eine, oder besser 10 oder 100 Perlen wägt, kann man daraus die Anzahl abschätzen. Ich habe 20 Perlen gewogen und 740 mg gemessen. Draus ergibt sich eine Anzahl von 700 g / 0.840 g $\cdot 20 \approx 16'600$.

Eine andere Variante besteht darin, die Grösse der Perlen zu messen. Die Perlen sind zylindrisch mit Durchmesser und Höhe 5 mm. Die Büchse misst 125 x 125 x 100 mm^3 = 1'562'500 mm^3. Das Volumen, das eine Perle einnimmt, ist schwierig zu schätzen, dürfte aber etwas grösser als 5 x 5 x 5 mm^3 = 125 mm^3 sein. Das ergibt eine Anzahl von 1'562'500 / 125 = 12'500.

Aufgrund der beiden Schätzungen liegt die Anzahl wohl zwischen 10'000 und 20'000.

Lösung zu Aufgabe 332 ex-terminal-velocity

a) Z.B. Rechteck mit Höhe $h = 1.7$ unb $b = 0.4$ ergibt 0.68 m^2. Oder laut Wikipedia beträgt die Körperoberfläche etwa 1.7 m^2. Der Durchmesser eines 1.7 m hohen Zylinders mit gleicher Oberfläche beträgt $1/\pi$ m und damit die Querschnitssfläche von $1.7 \cdot 1/\pi$ m$^2 \approx 0.54$ m^2. Die beiden Deckel des Zylinders wurden hier vernachlässigt. Schätzung der Querschnitssfläche 0.6 m^2.

Für m nehmen wir 70 kg an. $v_e = 195$ km/h ≈ 54m/s. $\rho \approx 1.2$ kg/m^3.

$$54 = \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot 9.81}{1.2 \cdot 0.6 \cdot C_w}}$$

Man erhält $C_w \approx 0.65$. Im Vergleich dazu beträgt der C_w-Wert einer Kugel 0.47.

b) Seien A_0 und m_0 die «Standard-Werte». Wird mit λ gestreckt beträgt $A = \lambda^2 A_0$ (Fläche) und $m = \lambda^3 m_0$ (proportional zum Volumen). Aus der ersten Gleichung erhält man $\lambda = \sqrt{\frac{A}{A_0}}$, eingesetzt in die zweite:

$$m = m_0 \left(\frac{A}{A_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder nach A aufgelöst (nützlicher für die nächste Aufgabe):

$$A = A_0 \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

c) Man speichert die beiden Massen in einer Liste, berechnet daraus die Liste der Querschnitssflächen und setzt dann ein.

$\{50, 100\} \to m$

$0.6 \cdot (m/70)^{(2/3)} \to a$

$\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot 9.81}{1.2 \cdot a \cdot 0.65}}$ liefert

$\{51.2, 57.5\}$ m/s d.h. 184 km/h und 207 km/h

Lösung zu Aufgabe 333 ex-listen-manip

TR:

{1.6, 1.65, 1.7, 1.75, 1.8, 1.85} → l

{50, 65, 60, 72, 68, 90} → m

a) TR: m/l^2 liefert {19.53, 23.88, 20.76, 23.51, 20.99, 26.30}

b) $c = m/l^3$. TR: `median(m/l`^{3}`)` liefert 12.82.

c) $m = c \cdot l^3$, also TR: 22.16 (in kg). Aus einer aktuellen Wachstumskurve des Kinderspitals hat ein durchschnittliches 7-jähriges Kind die Grösse von 120 cm und knapp 21 kg.

Lösung zu Aufgabe 334 ex-gleichungen-mit-TR-loesen

a) $x \in \{-3, 2, 4\}$

b) $x = -1$ oder $x \approx 1.21486$

c) Hinweis: auf dem TI-nspire kann auch mit «menu 3 7 1» gearbeitet werden. $x = -\frac{\sqrt{31}-1}{8}$ und $y = \frac{\sqrt{31}+1}{8}$, bzw. die vertauschten Werte.

d) $x = 2 - \sqrt{3}$ und $y = 2 + \sqrt{3}$, bzw. die vertauschten Werte.

Lösung zu Aufgabe 335 ex-geometrische-probleme

a) Unbekannte: x, y, Koordinaten von P.

$$\begin{aligned} \text{Abstand zum Ursprung:} \quad & \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \\ \text{Abstand zu } A: \quad & \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)^2} = 2 \end{aligned}$$

Angenährte Lösungen: $P = (2.89, -0.789)$ und $P = (1.11, 2.79)$.

b) Unbekannte: a,b,c

Funktion durch einen Punkt (x, y) heisst, dass $f(x) = y$ sein muss:

$$\begin{aligned} \text{durch } (0,0): \quad & a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \\ \text{durch } (1,1): \quad & a + b + c = 1 \\ \text{durch } (-2,-1): \quad & a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -1 \end{aligned}$$

Lösung: $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{6}$ und $c = 0$.

c) Unbekannte: Kürzeste Seite x (in cm)

Weitere Seiten: $\frac{3}{2}x$ und $\frac{5}{2}x$.

Volumen in ml (bzw. cm^3): $x \cdot \frac{3}{2}x \cdot \frac{5}{2}x = 1000$.

Lösung $x = \frac{2 \cdot 30^{\frac{2}{3}}}{3} \approx 6.437$.

Der Quader misst ungefähr 6.437 x 9.655 x 16.09 (Angaben in cm).

Lösung zu Aufgabe 336 ex-einladungen-verschicken

Unbekannte: x in Stunden, Zeit, die Hansli alleine bräuchte.
Wir bezeichnen die gesamte Arbeit als «Batch».
Leistung Vreneli: $\frac{1}{2}$ in Batch / h
Leistung Zusammen: $\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$ in Batch / h
Leistung Hansli: $\frac{1}{x}$ in Batch / h
Die Leistungen können addiert werden, also

$$\text{Gemeinsame Leistung in Batch / h:} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4}$$

Lösung: $x = 4$.
Hansli bräuchte alleine 4 Stunden.