13 Trigonometrie

Fast alle Sätze und Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen können von einer **Kreisbewegung** auf dem **Einheitskreis** (mit Geschwindigkeit 1) abgeleitet werden.

Definition 23 Einheitskreis

Der **Einheitskreis** ist der Kreis im 2-dimensionalen Koordinatensystem mit Zentrum $(0,0)$ und Radius 1.

Definition 24 Winkel und Drehsinn

Winkel im Einheitskreis werden von der positiven x-Achse in Richtung der positiven y-Achse gemessen. D.h. der **positive Drehsinn** im gebräuchlichen Koordinatensystem entspricht dem **Gegenuhrzeigersinn**.

Definition 25 P_α

Für einen gegebenen Winkel α ist P_α der Punkt auf dem Einheitskreis, so dass der orientierte Winkel $\sphericalangle XOP_\alpha = \alpha$, wobei $X = (1,0)$.

Definition 26 Cosinus und Sinus

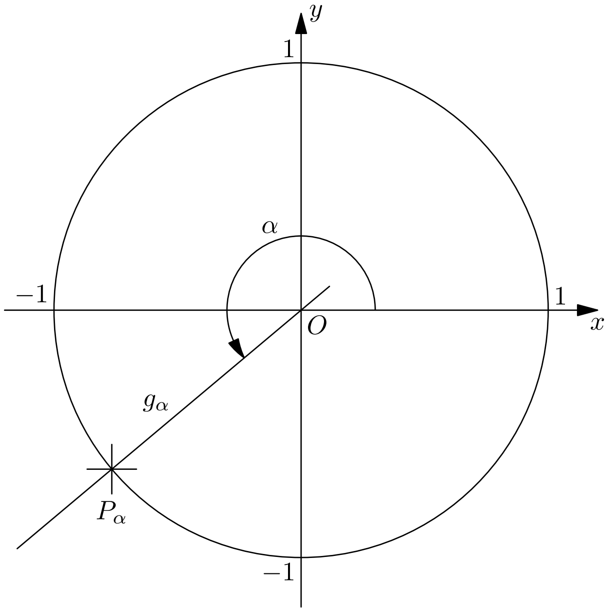
$$P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

Die Funktionen $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ liefern für einen Winkel α die x- bzw. y-Koordinate vom Punkt P_α.

Definition 27 g_α und Tangens

$\tan(\alpha)$ ist gleich der **Steigung** von $g_\alpha = OP_\alpha$.

Aufgabe 219 Ergänzen Sie folgende Skizze mit Bemerkungen und Elementen der obigen Definitionen:



Aufgabe 220 Zeichnen Sie einen Einheitskreis mit 8 cm Durchmesser. Schalten Sie Ihren Taschenrechner ins Gradmass um. Drücken Sie Home,5,2 und stellen dann die Option «Winkel» auf Grad um. Speichern Sie die Einstellungen als Standard.

a) Zeichnen Sie die Punkte P_{55°, P_{290°, P_{-190° und P_{380° ein. Bestimmen Sie dann durch Messen die Cosinus- und Sinuswerte dieser Winkel. *Achtung: Es muss in Einheiten, nicht in cm gemessen werden!*

b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Cosinus- und Sinuswerte aus Aufgabe a). *Achtung: Der Taschenrechner muss im Gradmass (DEG) rechnen, und nicht im Bogenmass (RAD).*

c) Bestimmen Sie, ebenfalls durch Messen, die Tangenswerte der Winkel von Aufgabe a) und überprüfen Sie Ihre Messungen mit dem Taschenrechner.

d) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\sin(\alpha) = 0.8$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

e) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -0.2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

f) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\tan(\alpha) = -2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

g) Für welche Winkel α gilt $\sin(\alpha) = 4.2$?

h) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -2$?

Aufgabe 221 Für die Herleitung folgender trigonometrischer Identitäten ist eine gute Skizze nötig. Zeigen Sie, dass für beliebige Winkel α gilt:

a) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$,

b) $\big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1$,

c) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$,

d) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Aufgabe 222 Bestimmen Sie die **exakten** Cosinus-, Sinus- und Tangenswerte der Winkel 30° und 45°. Machen Sie dazu eine Skizze im Einheitskreis und suchen Sie spezielle rechtwinklige Dreiecke.

Erstellen Sie dann eine Tabelle mit allen trigonometrischen Funktionswerten aller Vielfachen von 30° und 45° zwischen 0° und 360°.

13.1 Bogenmass

Es stellt sich heraus, dass die mathematisch «zweckmässigste» Art einen Winkel zu messen, die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis ist.

Definition 28 Bogenmass

Ein Winkel α im Bogenmass entspricht der Länge des Einheitskreisbogens von $(1,0)$ bis P_α. Die Einheit ist **rad**, gelesen «Radiant».

Der Name Radiant kommt daher, dass die Länge des Kreisbogens in Vielfachen des Radius angegeben wird. Daher ist die Masseinheit von rad $\frac{\text{Länge}}{\text{Länge}}$, d.h. einfach eine Zahl. Die Masseinheit rad kann also auch einfach weggelassen werden.

Aufgabe 223 Vervollständigen Sie folgende Tabelle mit exakten Werten und bestimmen Sie die beiden Funktionen $g(r)$, die von Radiant in Grad umrechnet und $r(g)$, die von Grad in Radiant umrechnet:

Grad	0°	360°	−90°			225°
Radiant	0			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	

$g(r) =$

$r(g) =$

13.2 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe 224 In dieser Aufgabe sind zwei Skizzen nebeneinander zu erstellen, ein Dreieck und ein Einheitskreis.

- Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\alpha \approx 25°$ und beschriften Sie den Winkel α und die Seitenlängen a, b, und c.
- Zeichnen Sie daneben einen Einheitskreis mit dem Punkt P_α (gleicher Winkel α wie in Ihrem Dreieck).
- Zeichnen Sie das Stützdreieck unter der Strecke OP_α.
- Begründen Sie, warum das Stützdreieck und Ihr Dreieck $\triangle ABC$ ähnlich sind.
- Beschriften Sie die Längen der Stützdreiecksseiten.
- Mit Hilfe des Stützdreiecks berechnen Sie die Seitenverhältnisse $a : c$, $b : c$ und $a : b$

Merke Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck

Sei δ ein Winkel ($\neq 90°$) im rechtwinkligen Dreieck. Die dem Winkel anliegende Kathete heisst **Ankathete**, die dem Winkel gegenüberliegende Kathete heisst **Gegenkathete**. Es gilt:

$\sin(\delta) =$ $\qquad$ $\cos(\delta) =$ $\qquad$ $\tan(\delta) =$

Dazu gibt es folgenden Merksatz: **«GAGA HühnerHof AG»**, der in folgender Tabelle zusammengefasst wird:

sin	cos	tan	cot
G	A	G	A
H	H	A	G

Zum Beispiel ist der Cosinus der Quotient von **A**nkathete über **H**ypotenuse. Hinweis: cot steht für Cotangens und ist für fast alle Winkel einfach der Kehrwert des Tangens.

Aufgabe 225 Von einem rechtwinkligen Dreieck sind ein Winkel und eine Seite bekannt. Berechnen Sie die fehlenden Seiten. Geben Sie die Resultate auf 4 signifikante Stellen gerundet an (d.h. egal, wo das Komma ist, es stehen vier Stellen da (führende Nullen nicht mitgezählt)). Überprüfen Sie Ihre Resultate mit einer kleinen Handskizze auf ihre Plausibilität.

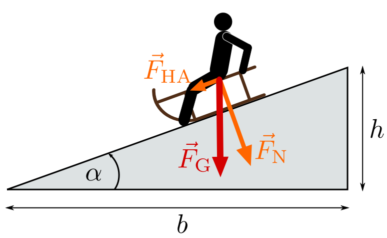
a) $\alpha = 20°$, $a = 4$ $\qquad$ b) $\beta = 50°$, $c = 3$ $\qquad$ c) $\alpha = 35°$, $b = 5$ $\qquad$ d) $\beta = 55°$, $a = 2$

Aufgabe 226

a) Aktuelle Gleitschirme haben einen Gleitwinkel von etwa 7°(Winkel zwischen Flugrichtung und der Horizontalen). Normalerweise wird aber die Gleitzahl angegeben, das ist die horizontale Distanz in m, die pro Höhenmeter zurückgelegt wird. Berechnen Sie die Gleitzahl. Welcher trigonometrischen Funktion des Gleitwinkels entspricht die Gleitzahl?

b) Sie stehen in der Wüste von Dubai und der 830 m hohe Burj Khalifa erscheint unter einem Winkel von 20°. Wie weit vom Turm sind Sie entfernt?

c) In der Skizze rechts ist $\vec{F}_\text{G}$ die Gewichtskraft, die auf die Person mit Schlitten wirkt. Mit den beiden anderen Kräften $\vec{F}_\text{N}$ (Normalkraft, verhindert, dass die Person im Boden versinkt) und $\vec{F}_\text{HA}$ (Hangabtriebskraft, bewirkt, dass sich die Person mit Schlitten beschleunigt) kann ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden.
Für $\alpha = 10°$, mit wie vielen Prozent der Gewichtskraft wird die Person mit Schlitten den Hang hinunter gezogen?

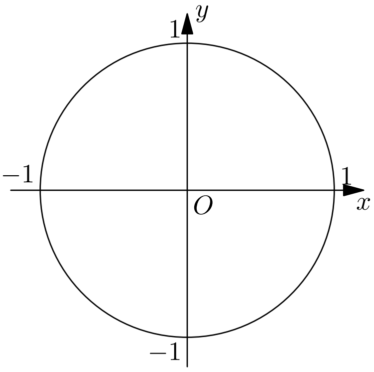


13.3 Arcus-Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen besitzen sogenannte **Umkehrfunktionen**, die z.B. aus Sinuswerten wieder Winkel berechnen. Der Name *Arcus-Funktionen* leitet sich davon ab, dass diese Funktionen (in Radiant gemessen) *Bogen*längen liefern.

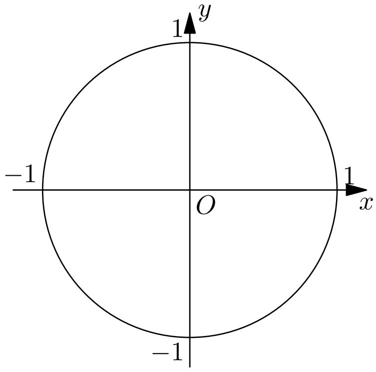
Sie wissen, dass es unendlich viele Winkel gibt, die z.B. den gleichen Sinuswert haben. Sie wissen auch, dass es normalerweise für z.B. den gleichen Sinuswert 2 Punkte auf dem Einheitskreis gibt. Da eine Funktion nur genau einen Wert liefert, muss festgelegt werden, auf welcher Kreishälfte die Punkte liegen und wie die Winkel für diese Punkte angegeben werden:

Arcus-Sinus
Mathe: $\arcsin(y) = \sin^{-1}(y)$
Computer: `asin(y)`



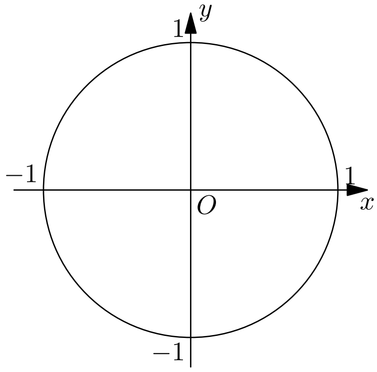
Liefert Winkel im Intervall:

Arcus-Cosinus
Mathe: $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$
Computer: `acos(x)`



Liefert Winkel im Intervall:

Arcus-Tangens
Mathe: $\arctan(m) = \tan^{-1}(m)$
Computer: `atan(m)`



Liefert Winkel im Intervall:

Hinweis: Sind Winkel gesucht, die stumpf sein können, empfiehlt es sich, falls möglich, arccos anstatt arcsin zu benutzen. So muss der Winkel am Schluss nicht noch umgerechnet werden.

Aufgabe 227 Berechnen Sie von Hand und mit Hilfe einer Skizze im Einheitskreis:

a) $\arcsin(0)$
b) $\arccos(0)$
c) $\arctan(0)$
d) $\arcsin(1)$
e) $\arccos(1)$
f) $\arctan(1)$
g) $\arcsin(-1)$
h) $\arccos(-1)$
i) $\arctan(-1)$
j) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
k) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
l) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

Aufgabe 228 Zeichnen Sie (auf Papier) die Funktionsgraphen der Arcusfunktionen $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(x)$. Wählen Sie jeweils sinnvolle Skalierungen für die Achsen.

Aufgabe 229

a) Moderne Segelflieger haben eine Gleitzahl (siehe Aufgabe 226 a)) von ca. 50. Berechnen Sie den entsprechenden Gleitwinkel. *Zusatzaufgabe: Wenn so ein Segelflieger das Matterhorn überhöht, könnte dieser ohne weitere Auf- und Abwinde im Aargau in Birrfeld landen?*

b) Ein 8 m hoher senkrechter Strommast wirft einen 4 m langen Schatten. Wie gross ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen? *Zusatzaufgabe: Zu welcher Jahres- und Tageszeit steht die Sonne in St. Gallen so hoch?*

c) Am Anfang einer Passstrasse steht ein Schild «20% Steigung». Was ist also der maximale Winkel dieser Strasse gegenüber der Horizontalen?

d) Eine Downhill Mountainbikerin zeichnet ihre Talfahrt vom Maschgenkamm nach Quarten am Walensee sowohl mit ihrem Tachometer als auch mit ihrem GPS auf. Nach 8.271 km auf dem Tachometer zeigt das GPS nur 8.115 km an. Sie setzt beide Geräte wieder auf Null und radelt nach Sargans. Dort zeigen beide Geräte bis auf 2 m die gleiche Distanz (19.2 km) an.
Was hat das GPS gemessen und wie steil (Angabe als Winkel und in %) war die Abfahrt im Durchschnitt?

13.4 Harmonische Schwingungen

Eine harmonische Schwingung kann durch eine gestreckte und verschobene Sinusfunktion beschrieben werden. Am einfachsten stellt man sich dabei einen Punkt vor, der eine gleichmässige Kreisbewegung (d.h. mit konstanter Drehgeschwindigkeit) ausführt. Dann beschreibt die y-Koordinate des Punktes eine harmonische Schwingung.
Eine Schwingung wird durch 3 Parameter charakterisiert:

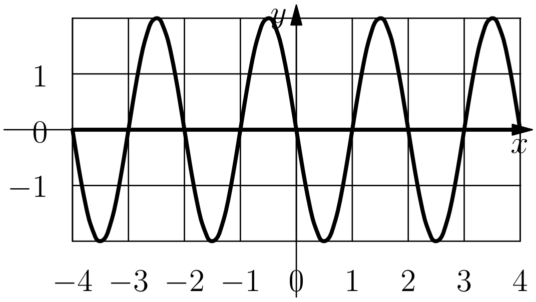
Frequenz Wie viele Schwingungen pro Zeiteinheit stattfinden (d.h. Umdrehungen des Punktes pro Zeiteinheit).

Amplitude Wie hoch die Ausschläge sind (d.h. Radius des Kreises).

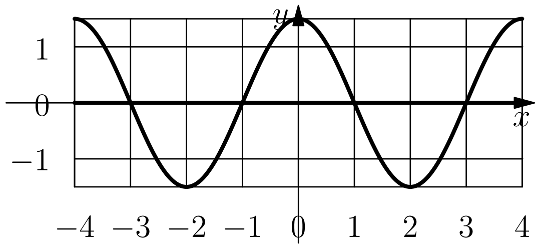
Phase Wie gross die Verschiebung in der Zeit ist (d.h. Startposition als Winkel zur Zeit 0).

Aufgabe 230 Lesen Sie von folgenden Sinus-Schwingungen die Frequenz, Amplitude und Phase ab:

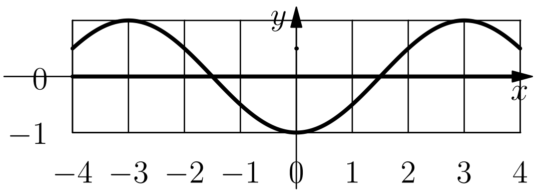
a)



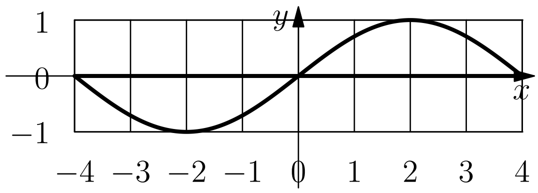
b)



c)



d)



Merke Harmonische Schwingung (FMP S. 88)

Eine harmonische Schwingung mit **Frequenz** f, **Amplitude** $\hat{y}$ und **Phase** φ_0 wird durch die Funktion

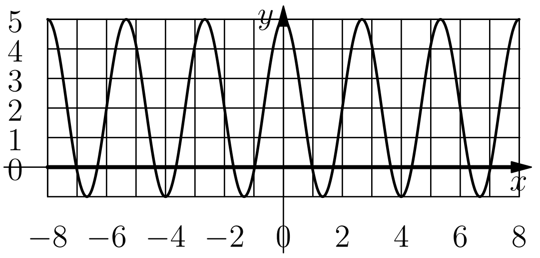
$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(t \cdot f \cdot 360° + \varphi_0)$$

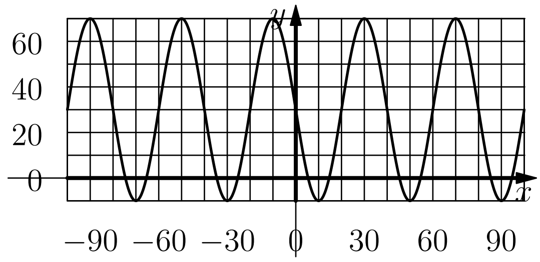
beschrieben, wobei t die Zeit darstellt.
Diese Beschreibung umfasst nur Schwingungen um den Nullpunkt. Oft betrachtet man aber Schwingungen, die um einen anderen Wert schwingen (z.B. die Tageslänge im Jahr, Wasserstände bei Gezeiten, etc.). Der Mittelwert (quasi der Nullpunkt) ist dann noch zur Funktionsgleichung zu addieren.

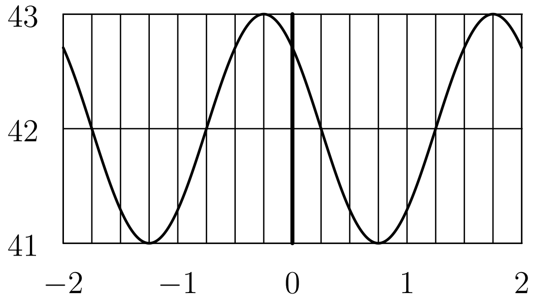
Aufgabe 231 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Graphen in Aufgabe 230.

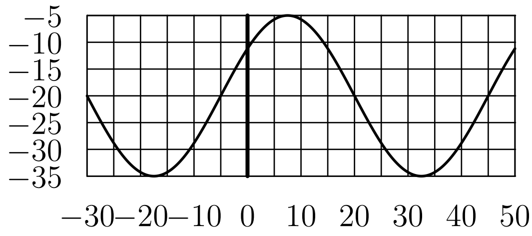
Aufgabe 232 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen folgender Schwingungen und überprüfen Sie ihre Funktion auf dem Taschenrechner (oder mit GeoGebra).
Graphen zeichnen auf dem TR:

- HOME, B (Graph-Modus)
- Überprüfen Sie, dass der Rechner im Grad (GRAD oder engl. DEG) eingestellt ist. Wenn nicht: Menu, 8 und Grafik-Winkel auf Grad (degrees) festlegen und als Standard speichern.
- Funktionen eingeben: Menu, 3, 1 (dann eventuell mit Pfeiltasten Funktion auswählen), Funktion mit x als Variable eingeben.
- Eventuell den Zoom anpassen mit Menu, 4, A (oder manuell).

a)


b)


c)


d)


Aufgabe 233

a) In der Schweiz und Italien wird der Kammerton (a[1]) normalerweise auf 442 Hz (442 Schwingungen pro Sekunde) gestimmt. Um mit dem Computer so ein Ton als harmonische Schwingung zu erzeugen, wird die Auslenkung eines Lautsprechers mit Werten (Sampling-Werte oder Abtast-Werte) zwischen $-30'000$ und $30'000$ gesteuert. Diese Werte werden 44100 mal pro Sekunde erzeugt (CD-Sampling Rate). Bestimmen Sie erstens die Funktionsgleichung, um aus der Zeit in Sekunden den Abtastwert zu ermitteln. Bestimmen Sie zweitens die Funktionsgleichung, die aus der Nummer des Abtastwerts den Abtastwert berechnet (Abtastwert 0 entspricht Zeit 0 s, Abtastwert 44100 entspricht 1 s, etc.).

b) Eine Puppe wird an einer Stahlfeder aufgehängt und in Schwingung versetzt, indem sie nach unten gezogen und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen wird. Die Puppe pendelt in 2 s auf einer Höhe von insgesamt 20 cm auf und ab. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die die Position (Höhe) der Puppe beschreibt. Finden Sie zusätzlich heraus, wie schnell sich die Puppe im obersten und untersten Punkt und im Mittelpunkt dazwischen bewegt (in m/s).

c) St. Gallen befindet sich auf 47.42° nördlicher Breite. Die Erdachse ist um 23.44° gegenüber der Ekliptik (Umlaufebene der Erde um die Sonne) geneigt. Berechnen Sie den höchsten und tiefsten Sonnenstand wenn die Sonne im Zenit steht (höchste Position am Tag). In guter Näherung kann angenommen werden, dass der Sonnenhöchststandswinkel über das Jahr durch eine harmonische Schwingung beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und ermitteln Sie, zu welchen Daten die Sonne einen Höchststand von 60° hat.

d) In guter Näherung kann angenommen werden, dass die Tageslänge (bzw. deren Abweichung vom Mittelwert) über das Jahr mit einer harmonischen Schwingung beschrieben werden kann. Die Tageslänge variiert in St. Gallen zwischen ca. 08 h 25 min am 21. Dezember und 15 h 55 min am 21. Juni. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die aus der Nummer des Tages (1. Januar = Tag 1) die Tageslänge berechnet. Berechnen Sie dann damit die Tageslänge an ihrem Geburtstag und vergleichen Sie Ihr Resultat mit anderen Quellen.

13.5 Überlagerung zweier Schwingungen

Bei vielen Phänomenen, die mit harmonischen Schwingungen beschrieben (bzw. angenähert) werden, können diese Schwingungen auch in Überlagerung vorkommen (z.B. zwei Töne gleichzeitig, Wasserwellen, die sich überlagern). Den Spezialfall zweier Schwingungen mit gleicher Frequenz möchten wir hier untersuchen.

Aufgabe 234

a) In 2er- bis 3er-Gruppen untersuchen Sie die Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(\varphi + x)$ wobei φ je nach Gruppe ein anderes Vielfaches von $45°$ sein soll.

b) Fassen Sie die beiden Schwingungen als y-Koordinaten von Punkten P_f und P_g auf, die sich auf einem Kreis bewegen. Wie hängen die beiden Kreisbewegungen zusammen?

c) Anstatt nur die Summe der y-Koordinaten zu betrachten, betrachten Sie den Punkt P_h, der als Koordinaten die Summe der Koordinaten von P_g und P_h hat. Was für eine Bewegung führt der Punkt P_h aus?

d) Berechnen Sie aus φ (Phase von g) die Phase von h.

e) Berechnen Sie aus φ (Phase von g) die Amplitude von h.

f) Für welche Winkel φ ist die Amplitude von h gleich gross wie die von f und g?

Aufgabe 235

a) Die Stromversorgung in Europa basiert auf Wechselstrom mit einer Frequenz von 50 Hz und einer Amplitude von ca. 310 V (daraus resultiert ein «Gleichstromäquivalent» von 220 V, das normalerweise angegeben wird). Dieser wird in 3 sogenannten Phasen geliefert, deren Namen von der Phasenverschiebung um je $120°$ herrührt. Normalerweise wird eine Phase und ein Nullleiter (letztlich mit der Erde verbunden) verwendet, um 220 V Geräte zu betreiben. Grössere Geräte wie z.B. Kochherde werden an zwei Phasen angeschlossen. Relevant ist dann die Differenz der Spannungen dieser zwei Phasen.
Bestimmen Sie als erstes die Funktion, die die Spannung in der Zeit (in Sekunden) für eine Phase beschreibt.
Wie viel mal grösser ist die Amplitude wenn man zwei Phasen kombiniert (d.h. die Differenz bildet)? Auf welches «Gleichstromäquivalent» kommt man dann?

13.6 Schwebungen

Überlagert (d.h. addiert) man zwei Schwingungen mit fast gleicher Frequenz und Amplitude, entstehen Schwebungen. Im Falle von Tönen nimmt man diese als Lautstärkenschwankungen wahr. Die Frequenz dieser Schwankungen ist normalerweise einige Hz. Dieser Effekt tritt auch ein, wenn das Verhältnis der Frequenzen fast eine Bruchzahl mit kleinem Nenner ist, was zum Stimmen von Saiteninstrumenten genutzt wird.

Aufgabe 236 Erklären Sie den Effekt der Schwebung mit Hilfe zweier Kreisbewegungen mit annähernd gleicher Geschwindigkeit.

Aufgabe 237 Hören Sie sich die Audiodateien auf dem Wiki an (Überlagerungen zweier Sinusschwingungen). Beachten Sie, dass man die Schwebungen auch hört, wenn man Kopfhörer trägt. D.h. die Schwebung wird erst im Hirn erzeugt, ohne dass diese physikalisch stattgefunden hat!

Aufgabe 238 Zwei Lautsprecher befinden sich an den Punkten $P = (0,0)$ und $Q = (5,0)$ (Einheit 1 m). Auf diesen wird der exakt gleiche Sinuston von 440 Hz gespielt. Am Ort (x, y) steht ein Mikrophon, das die Überlagerung der beiden Töne aufzeichnet. Die beiden ankommenden Töne haben eine Phasenverschiebung. Erklären Sie zuerst warum und berechnen Sie diese dann. Worauf liegen die Orte, wo (theoretisch) nichts zu hören ist?

13.7 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 239 Alle berechneten Resultate sind auf 4 signifikante Stellen zu runden.

a) Mit Hilfe einer Handskizze, ohne Taschenrechner, schätzen Sie die Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte vom Winkel 290° ab.

b) Mit Hilfe einer Handskizze, ohne Taschenrechner, schätzen Sie $\arccos(-0.2)$, $\arcsin(-0.2)$ und $\arctan(-2)$ ab.

c) Mit Hilfe einer Handskizze und einigen Stichwörtern, zeigen Sie, welche der folgenden Gleichungen richtig und welche falsch sind:

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha + 90^\circ) \qquad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha) \qquad \tan(-\alpha) = \tan(\alpha) \qquad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

d) Eine Rampe für Rollstuhlfahrer sollte nicht mehr als 3.5° geneigt sein. Wie lange wird eine solche Rampe, um einen Höhenunterschied von 50 cm zu überwinden?

e) Wie gross ist der Diagonalenschnittwinkel in einem Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist?

f) Von einem unbekannten Winkel α wissen wir, dass $\tan(\alpha) = 2$. Welche Werte kommen für $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in Frage?

g) Von einem Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm) kennt man die Seitenlänge $s = 10$ und die Diagonalenlänge $e = 15$. Berechnen Sie die Länge der anderen Diagonalen sowie die Grössen der Innenwinkel.

h) Wie gross ist der Winkel zwischen einer Würfelfläche und einer Körperdiagonalen?

i) METEOSAT-9, ein geostationärer Satellit, steht knapp 36'000 km über dem Äquator. Dieser Satellit hat fast die gleiche Länge wie St. Gallen, nämlich 9.4° Ost. Wie hoch (als Winkel angegeben) über dem Horizont steht der Satellit, wenn man weiss, dass St. Gallen auf 47.5° nördlicher Breite liegt und der Erdradius ca. 6370 km beträgt?

Aufgabe 240

a) Bestimmen Sie Amplitude, Frequenz und Phase folgender Funktion: $f(x) = 2\sin(45^\circ + x \cdot 180^\circ)$. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

b) Was passiert mit dem Graphen einer harmonischen Schwingung, wenn man entweder (1) die Phase um 90° erhöht, oder (2) die Amplitude halbiert, oder (3) die Frequenz verdoppelt?

c) Die Sonnenstandshöhe (d.h. der Winkel zwischen Horizont und Sonne) über 24 Stunden kann angenähert durch eine harmonische Schwingung beschrieben werden. Am Sonntag, 11. Juni 2017 geht die Sonne in St. Gallen um 5:26 auf und um 21:17 unter und erreicht einen Höchststand von ca. 65° und einen Tiefststand von ca. -20°. Bestimmen Sie die Funktiongleichung der harmonischen Schwingung, die den Sonnenstand beschreibt. Berechnen Sie dann wie hoch die Sonne um 9:55 steht.

d) Die Position eines Uhrenpendels kann in guter Näherung mit einer harmonischen Schwingung beschrieben werden. Wie schnell bewegt sich die Spitze eines 1 m langen Pendels, das mit einer Frequenz von 1 Hz schwingt und einen Ausschlag von 5cm hat?

13.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 220 ex-trigo-werte-messen

a) und b): $\cos(55°) \approx 0.58$, $\sin(55°) \approx 0.82$. $\cos(290°) \approx 0.32$, $\sin(290°) \approx -0.95$. $\cos(-190°) \approx -0.99$, $\sin(-190°) \approx 0.16$ $\cos(380°) \approx 0.95$, $\sin(380°) \approx 0.31$

c) $\tan(55°) \approx 1.42$ $\tan(290°) \approx -2.95$ $\tan(-190°) \approx -0.16$ $\tan(380°) \approx 0.33$

d) Es gibt zwei Punkte auf dem Einheitskreis mit y-Koordinate 0.8. Die entsprechenden Winkel sind ungefähr 53° und 127°. Zu diesen Winkeln kann beliebig vielmal 360° addiert oder davon subrahiert werden. Sei $k \in \mathbb{Z}$ die Anzahl Vielfache von 360°. Die Lösungen sind also

$$53° + k \cdot 360° \qquad \text{oder} \qquad 127° + k \cdot 360° \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Auf dem Taschenrechner löst man `solve(sin(x)=0.8,x)` und erhält $x = 360 \cdot (n_1 + 0.147581)$ or $x = 360 \cdot (n_1 + 0.352416)$. Ausmultipliziert erhält man das obige Resultat.

e) $\alpha \approx 101.5 + k \cdot 360°$ oder $\alpha \approx 258.5 + k \cdot 360°$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

f) $\alpha \approx 116.6° + k \cdot 180°$. (Alle Winkel «mit Steigung» -2).

g) und h) Gar keine. Die Cosinus- und Sinusfunktion liefern nur Werte zwischen -1 und $+1$ (inklusive).

Lösung zu Aufgabe 221 ex-identitaeten

a) Man zeichnet das Steigungsdreieck für $g_\alpha = OP_\alpha$ durch O und P_α. Damit ist $\Delta y = \sin(\alpha)$ und $\Delta x = \cos(\alpha)$. Die Steigung von g_α ist damit
$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

b) Zeichnet man das Steigungsdreieck unter P_α und dem Ursprung O, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ und Hypotenuse 1. Damit gilt der Satz von Pythagoras

$$\big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1^2$$

c) Vorzeichenwechsel des Winkels bewirkt Spiegelung von P_α an der x-Achse. Damit wechselt das Vorzeichen der y-Koordinate, d.h. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

d) Vorzeichenwechsel des Winkels bewirkt Spiegelung von P_α an der x-Achse. Die x-Koordinate ändert sich dabei nicht, d.h. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Lösung zu Aufgabe 222 ex-spezielle-winkel

Für 30° ist das Stützdreieck ein 30°-60°-90° Dreieck und damit $\sin(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Für 45° ist das Stützdreieck ein 45°-45°-90° Dreieck und damit $\sin(45°) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\tan(45°) = 1$.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

In der obigen Tabelle steht «n.d.» für «nicht definiert» (vertikale Geraden!).

Lösung zu Aufgabe 225 ex-trig-im-dreieck-vorwaerts

a) a ist die Gegenkathete bezüglich dem Winkel α. Also $\frac{a}{c} = \sin(\alpha)$ also $c = \frac{a}{\sin(\alpha)} \approx 11.69521760 \approx 11.70$.

Die Seite b kann nun entweder mit dem Satz von Pythagoras oder mit dem Tangens berechnet werden: $\frac{a}{b} = \tan(\alpha)$ also $b = \frac{a}{\tan(\alpha)} \approx 10.989909 \approx 10.99$.

b) a ist die Ankathete von β, also $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ und damit $a = c \cdot \cos(\beta) \approx 1.92836282 \approx 1.928$.

b ist die Gegenkathete von β, also $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$ und damit $b = c \cdot \sin(\beta) \approx 2.298133329 \approx 2.298$.

c) b ist die Ankathete zum Winkel α, also $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ und damit $c = \frac{b}{\cos(\alpha)} \approx 6.10387294 \approx 6.104$

Achtung: Wird c weiter gerechnet, ist unbedingt das **ungerundete** Resultat zu verwenden! Ansonsten können Rundungsfehler auftreten!

$a = \sqrt{c^2 - b^2} \approx 3.501037 \approx 3.501$.

d) a ist die Ankathete zum Winkel β, also $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ und damit $c = \frac{a}{\cos(\beta)} \approx 3.48689359 \approx 3.487$.

$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ also $b = a \cdot \tan(\beta) \approx 2.8562960 \approx 2.856$.

Lösung zu Aufgabe 226 ex-trig-im-dreieck-textaufgaben-vorwaerts

a) Man betrachtet das rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse parallel zur Flugrichtung und vertikaler (Gegen-)Kathete $a = 1$ m und den Gegenüberliegenden Winkel 7°. Gesucht ist die horizontale (An-)Kathete b. Also $\frac{a}{b} = \tan(7°)$ und damit $b = \frac{a}{\tan(7°)} \approx 8.144346 \approx 8.144$.

Die Gleitzahl ist also der Quotient von Ankathete über Gegenkathete, also die Cotangens-Funktion.

b) Die Höhe h des Turm ist die Gegenkathete vom Blickwinkel. Gesucht ist die horizontale Distanz, also die Ankathete d. Damit gilt $\tan(20°) = \frac{h}{d}$ d.h. $d = \frac{h}{\tan(20°)} \approx 2280.40625 \approx 2280$ m.

c) Es gilt $\sin(\alpha) = \frac{F_{\mathrm{HA}}}{F_{\mathrm{G}}}$, was genau dem gesuchten Verhältnis entspricht:

$\sin(10°) \approx 0.1736481776 \approx 17.36\%$.

Lösung zu Aufgabe 227 ex-arcusfunktionen-von-hand

a) $0°$
b) $90°$
c) $0°$
d) $90°$
e) $0°$
f) $45°$
g) $-90°$
h) $180°$
i) $-45°$
j) $45°$
k) $120°$
l) $60°$

Lösung zu Aufgabe 228 ex-arcusfunktionen-zeichnen

Siehe S. 51 im Formelbuch «Fundamentum in Mathematik und Physik». Beachten Sie, dass dort die Winkel im **Bogenmass** angegeben sind.

Lösung zu Aufgabe 229 ex-trig-im-dreieck-textaufgaben-rueckwaerts

a) Die Gleitzahl ist der Cotangens (bzw. der Kehrwert vom Tangens) vom Gleitwinkel. Damit gilt $\tan(\alpha) = \frac{1}{50}$ und damit $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{50}\right) \approx 1.146°$.

b) Machen Sie eine Skizze der Situation und beschriften Sie das entstehende rechtwinklige Dreieck. Daraus folgt $\tan(\alpha) = \frac{8}{4}$ und somit $\alpha = \arctan(2) \approx 63.43°$

c) Die Steigung ist 0.2, also $\tan(\alpha) = 0.2$. Somit ist $\alpha = \arctan(0.2) \approx 11.31°$.

d) Das GPS hat offenbar nur die horizontale Distanz gemessen (das, was man auf der flachen Karte messen würde). Der Tachometer aber misst die schräge Distanz. Wenn man als Näherung annimmt, dass die Strecke ein konstantes Gefälle hatte und man ein Distanz/Höhen-Diagramm zeichnet, erhält man als Näherung ein rechtwinkliges Dreieck, mit Hypotenuse 8.271 km und Kathete 8.115 km. Für den Steigungswinkel gilt: $\cos(\alpha) = \frac{8.115}{8.271}$ und damit $\alpha \approx \arccos(0.981) \approx 11.15°$. Die Steigung ist also $\tan(\alpha) \approx 19.7\%$.

Lösung zu Aufgabe 230 ex-frequenz-amplitude-phase-ablesen

a) Frequenz $\frac{1}{2}$, Amplitude 2, Phase 180°.

b) Frequenz $\frac{1}{4}$, Amplitude $\frac{3}{2}$, Phase 90°.

c) Frequenz $\frac{1}{6}$, Amplitude 1, Phase −90°, bzw. 270°.

d) Frequenz $\frac{1}{8}$, Amplitude 1, Phase 0°.

Lösung zu Aufgabe 231 ex-frequenz-amplitude-phase-funktionen-bestimmen

a) $y(t) = 2\sin(t \cdot 180° + 180°)$

b) $y(t) = \frac{3}{2}\sin(t \cdot 90° + 90°)$

c) $y(t) = \sin(t \cdot 60° + 270°)$

d) $y(t) = \sin(t \cdot 45°)$

Lösung zu Aufgabe 232 ex-frequenz-amplitude-phase-offset-funktionen-bestimmen

a) Mittelwert: 2, Amplitude 3, Frequenz $\frac{3}{8}$, Phase 90°. Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = 2 + 3 \cdot \sin\left(90^\circ + t \cdot 360^\circ \cdot \frac{3}{8}\right)$$

b) Mittelwert: 30, Amplitude 40, Frequenz $\frac{1}{40}$, Phase 180°. Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = 30 + 40 \cdot \sin\left(180^\circ + t \cdot 360^\circ \cdot \frac{1}{40}\right)$$

c) Mittelwert: 42, Amplitude 1, Frequenz $\frac{1}{2}$, Phase 135°. Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = 42 + 1 \cdot \sin\left(135^\circ + t \cdot 360^\circ \cdot \frac{1}{2}\right)$$

d) Mittelwert: -20, Amplitude 15, Frequenz $\frac{1}{50}$, Phase 36° (1/10 der Schwingungsdauer). Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = -20 + 15 \cdot \sin\left(36^\circ + t \cdot 360^\circ \cdot \frac{1}{50}\right)$$

Lösung zu Aufgabe 233 ex-harmonische-schwingungen-textaufgaben

a) Frequenz 442 Hz, Amplitude 30'000, Phase 0, Mittelwert 0. Also

$$y_1(t) = 30000 \cdot \sin(t \cdot 360^\circ \cdot 442)$$

Für die zweite Funktion rechnen wir erst die Samplenummer n in die Zeit um, nämlich $t = n/44100$. Damit können wir mit y_1 die Funktion

$$y_2(n) = y_1(n/44100) = 30000 \cdot \sin\left(n \cdot 360^\circ \cdot \frac{442}{44100}\right)$$

definieren.

b) Wenn man die Höhe von unten (0 cm) bis oben (20 cm) misst, dann ist der Mittelwert 10 cm. Die Amplitude ist damit 10 [cm], die Frequenz 0.5 Hz und die Phase (abhängig von der Wahl der positiven Höhe) -90°(weil zum Zeitpunkt 0 die Auslenkung voll negativ ist, bzw. die entsprechende Kreisbewegung sich am Tiefpunkt befindet). Damit die die Funktionsgleichung

$$y(t) = 10 + 10 \sin\left(t \cdot 360^\circ \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Die Geschwindigkeit auf dem tiefsten und höchsten Punkt sind 0 (dort kehrt die Bewegung um).

In der Mitte ist die Geschwindigkeit genau so gross, wie die entsprechenden Geschwindigkeit auf der Kreisbewegung (Radius 10, eine Umdrehung pro 2 Sekunden). Der Umfang U ist $10 \cdot 2 \cdot \pi$ und damit ist die Geschwindigkeit $\frac{U}{2s}$, also ≈ 0.3142 m/s.

c) Zeiteinheit: Tage. Frequenz: $\frac{1}{365}$, Mittelwert $90 - 47.42 = 42.58$ [°]. Amplitude 23.44 [°]. Für die Phase überlegen wir uns erst, wann der steigende Nullpunktsdurchgang ist, nämlich am 21. März (Frühlingsbeginn). D.h. $31+28+21 = 80$ [d]. Wenn man von diesem Datum zurückrechnet, muss die Phase also $-\frac{80}{365} \cdot 360°$ sein. Somit hat man die Funktionsgleichung (t in Tagen, Resultat in Grad):

$$y(t) = 42.58 + 23.44 \cdot \sin\left(-\frac{80}{365} \cdot 360° + t \cdot 360° \cdot \frac{1}{365}\right)$$

Man sucht jetzt t so, dass $y(t) = 60$. Wenn man die Lösung des Taschenrechners ausmultiplizert erhält man:

$$t \approx 129 + k \cdot 360° \quad \text{oder} \quad t \approx 214 + k \cdot 360° \qquad \text{mit } k \in Z$$

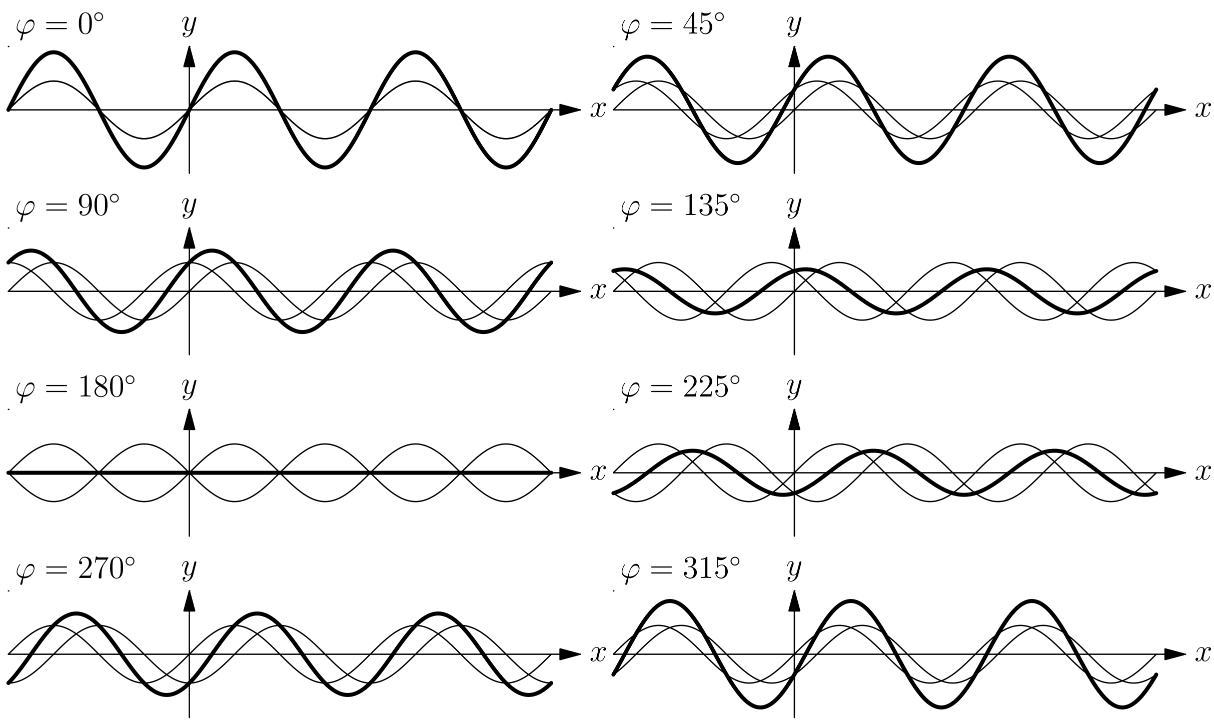
Als Datum umgerechnet erhält man etwa 9. Mai und 2. August.

d) Mittelwert: 12.17 [h], Amplitude: Hälfte der Differenz, also $(15:55 - 8:25)/2 = 3:45 = 3.75$ [h]. Frequenz $\frac{1}{365}$ und Phase (siehe obere Aufgabe): $-\frac{80}{365} \cdot 360°$. Damit ergibt sich die Funktion (Zeit t in Tagen, Resultat in Stunden):

$$y(t) = 12.17 + 3.75 \cdot \sin\left(-\frac{80}{365} \cdot 360° + t \cdot 360° \cdot \frac{1}{365}\right)$$

Lösung zu Aufgabe 234 ex-schwingungen-ueberlagern

a)



b) Gleicher Kreisradius 1, gleiche Geschwindigkeit (Frequenz $1/360°$), konstanter Winkel dazwischen, nämlich φ.

c) Man hängt den Vektor (Pfeil) von O zu P_f bei P_g an. Die Spitze zeigt dann zu P_h. Dieser führt ebenfalls eine Kreisbewegung aus, mit gleicher Frequenz, aber i.A. anderer Amplitude und Phase.

d) Machen Sie eine gute Skizze, um die Beschreibung zu verstehen! Die Punkte O, P_f, P_h und P_g bilden ein Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm). Damit ist die Phase gleich dem Winkel $\angle P_f O P_h = \frac{\varphi}{2}$.

e) Machen Sie eine gute Skizze, um die Beschreibung zu verstehen! Die Punkte O, P_f, P_h und P_g bilden ein Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm). Sei E der Diagonalenschnittpunkt. $\triangle OP_fE$ ist rechtwinklig mit $\angle P_f OE = \frac{\varphi}{2}$. Die Strecke OE ist Ankathete, OP_f die Hypotenuse mit Länge 1. Damit ist $\overline{OE} = \cos(\varphi/2)$ die Hälfte vom gesuchten Radius. Damit ist die Amplitude also $2 \cdot \cos(\varphi/2)$.

f) Das ist für 120° und 240° der Fall, wenn der Rhombus aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht.

Lösung zu Aufgabe 235 ex-schwingungen-ueberlagern-textaufgben

a) Die Funktion, die die Spannung in in Volt zur Zeit t in Sekunden beschreibt ist

$$y(t) = 310 \cdot \sin(t \cdot 50 \cdot 360°).$$

Die Differenz zwischen obiger Funktion und einer Schwingung mit Phase 120° ist wie die Summe mit einer Schwingung mit Phase −60°. Im entsprechenden Rhombus erhält man die neue Amplitude $a \cdot \cos(30°) \cdot 2$, wobei a die ursprüngliche Amplitude ist. Daraus ergibt sich «Gleichstromäquivalent» von $220 \cdot \cdot \cos(30°) \cdot 2 \approx 380$ [V].

Lösung zu Aufgabe 239 ex-trigo-repe

a) Schätzung mit dem TR überprüfen.

b) Siehe a).

c) Erste Gleichung ist falsch (könnte mit einem negativen Vorzeichen auf einer Seite korrigiert werden). Zweite Gleichung ist richtig (die Phase vom cos ist 90°. Die dritte ist falsch, die Steigung ändert das Vorzeichen, wenn man an der x-Achse spiegelt. Die vierte ist somit richtig.

d) Wenn l die Länge ist (Hypotenuse), dann gilt $\sin(3.5°) = \frac{0.5}{l}$ und damit $l = \frac{0.5}{\sin(3.5°)} \approx 8.190$. Die Rampe müsste also knapp 8.2 m lang sein.

e) Der Schnittwinkel ist doppelt so gross, wie der kleine Winkel im Dreieck, das eine Diagonale aus dem Rechteck bildet. Daraus folgt $\alpha = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 53.13°$.

f) Der Winkel α ist entweder $\arctan(2) \approx 63.43°$ oder $\arctan(2) + 180° \approx 243.43°$. Daraus ergeben sich die ungefähren Sinus- und Cosinuswerte von entweder 0.8944 und 0.4472 oder −0.8944 und −0.4472.

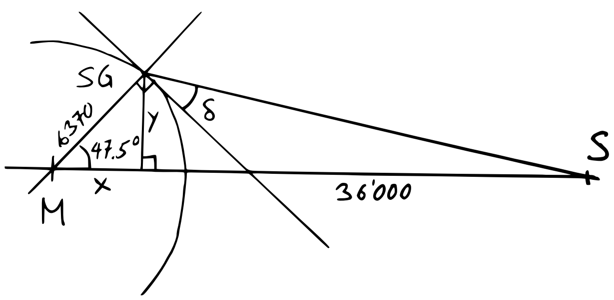
Als alternativen Lösungsweg könnte man auch mit zwei Unbekannten $y = \sin(\alpha)$ und $x = \cos(\alpha)$ folgendes System lösen: $x^2 + y^2 = 1$ und $\frac{y}{x} = 2$ und erhält die exakten Lösungen $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ und $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

g) Machen Sie ein gute Skizze und stellen Sie fest, dass sich die Diagonalen rechtwinklig schneiden. Damit ergibt sich die andere Diagonale mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: $f = 2\sqrt{s^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} \approx 13.23$.

Für den Winkel α gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\frac{e}{2}}{s}$ und damit $\alpha = \arccos\left(\frac{\frac{e}{2}}{s}\right) \approx 41.41°$. Daraus egibt sich $\beta = 180° - \alpha \approx 138.6°$.

h) Im Würfel drin kann ein rechtwinkliges Stützdreieck gezeichnet werden, mit Katheten Seitenlänge s und Flächendiagonalen $\sqrt{2} \cdot s$. Damit ist $\tan(\varepsilon) = \frac{s}{\sqrt{2} \cdot s} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Und somit ist $\varepsilon = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35.26°$.

i) Gesucht ist der Winkel δ. Dazu wird erst der Winkel $\angle M\,SG\,S$ berechnet, für welchen zuerst $\sigma = \angle M\,S\,SG$ (sigma, griechisches «s») berechnet wird. Es gilt $\tan(\sigma) = \frac{y}{36000+3670-x}$. Wobei $y = \sin(47.5°) \cdot 6370$ und $y = \cos(47.5°) \cdot 6370$. Daraus ergibt sich $\sigma = \arctan\left(\frac{y}{36000+3670-x}\right) \approx 7.033°$. Damit ist $\angle M\,SG\,S = 180° - 47.5° - \sigma \approx 125.5°$. Und somit ist $\delta = \angle M\,SG\,S - 90° \approx 35.47°$.



Lösung zu Aufgabe 240 ex-trigo-repe-plus

a) Amplitude: 2, Phase 45°, Frequenz $\frac{1}{2}$. Nulldurchgänge bei $-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$ etc., Maxima bei $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{4}$ etc., Minima bei $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, etc.

b) (1) Verschiebung nach links um «90°», d.h. um eine Viertelperiode (Periode ist die Zeit für eine Schwingung, d.h. der Kehrwert der Frequenz). (2) Der Graph wird mit Faktor $\frac{1}{2}$ zur x-Achse hin gestreckt. (3) Der Graph mit Faktor $\frac{1}{2}$ zur y-Achse hin gestreckt.

c) Die Amplitute ist 42.5°, die Frequenz $\frac{1}{24}$ (Zeit in Stunden gemessen). Die Schwingung schwingt um den Durchschnitt $(65° - 20°)/2 = 22.5°$. Das Miminum wird zwischen den Zeiten $21 : 17 \approx -2.716$ h und $5 : 26 \approx 5.433$ h, also zum Zeitpunkt $\approx 1.358 \approx 1 : 21$ erreicht. D.h. bezüglich der Kreisbewegung der Schwingung wird der Winkel $-90°$ für $t \approx 1.358$ erreicht. Damit erhält man eine Gleichung für die Phase:

$$1.358 \cdot t \cdot \frac{1}{24} \cdot 360° + \varphi = -90° \qquad t \approx -110.4°$$

Damit erhält man die Funktionsgleichung

$$f(t) = 42.5° \cdot \sin\left(-110.4° + t \cdot \frac{1}{24} \cdot 360°\right) + 22.5°$$

Setzt man die Zeiten von Sonnenauf- und Untergang ein, erhält man knapp 2° (anstatt 0°, was zeigt, dass diese Funktion nur eine Näherung ist. Wobei anzumerken ist, dass der Sonnenhöchst- und Tiefststand nur abgeschätzt sind und der grösste Teil des Fehlers wohl daher stammt). Für $t = 9.917$ liefert die Funktion 48.87°.

d) Amplitude 0.05, Frequenz 1, Phase 0°. Angaben in m und s. Daraus:

$$f(t) = 0.05 \cdot \sin(t \cdot 360°)$$

Die entsprechende Kreisbewegung erfolgt auf einem Kreis mit Radius 0.05 m mit einer Umdrehung pro Sekunde. D.h. es wird pro Sekunde eine Strecke gleich dem Umfang von $2 \cdot 0.05 \cdot \pi \approx 0.3142$ zurückgelegt. Diese Geschwindigkeit stimmt der Geschwindigkeit des Pendels im tiefsten Punkt überrein. Also 31.42 cm/s.