



22 Vektoranalysis

Der Begriff «Vektoranalysis» ist etwas hoch gegriffen. Es geht in diesem Kapitel darum, Vergnügungsbahnen, wie sie z.B. an der OLMA zu finden sind, zu modellieren, auf dem Computer in POV-Ray zu animieren und zu analysieren. Dabei geht es insbesondere um die erfahrene Beschleunigung und die Änderungsrate der Beschleunigung, was man als «Wackeln» oder «Schütteln» wahrnehmen würde.

Die mathematischen Grundlagen, die hier vermittelt werden, umfassen die trigonometrischen Funktionen und ihre Ableitungen, Kurvenparametrisierung in der Ebene und im Raum, Begriff der Ableitung einer Position, Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor. Daneben werden das Skalar- und Vektorprodukt eingeführt.

22.1 Ableitung der trigonometrischen Funktionen

In der Analysis werden wir fortan die **Winkel** immer im **Bogenmass** angeben. Das hat praktische Vorteile, wie gleich ersichtlich sein wird.

Repetition Bogenmass: Das Bogenmass eines Winkels ist die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis. D.h. 0° bis 360° entspricht dann dem Bogenmass von 0 bis 2π .

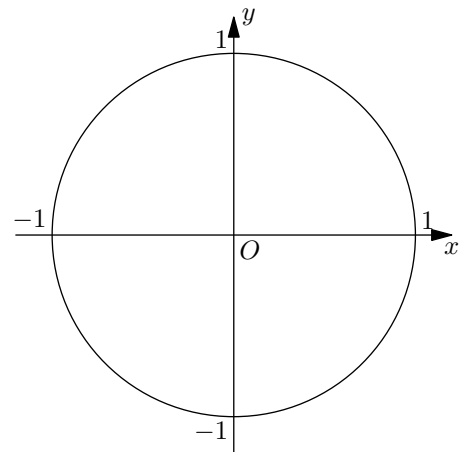
Gradmass	0°	30°		60°			270°	360°
Bogenmass	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	π		2π

22.1.1 Gleichmässige Kreisbewegung

Wir betrachten einen Punkt P , der eine gleichförmige Kreisbewegung im positivem Umlaufsinn auf dem Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1 und Startpunkt $(1, 0)$ (zur Zeit $t = 0$) ausführt.

Aufgabe 430

- Tragen Sie die Zeitpunkte im Einheitskreis (z.B. mit $t = 0$) ein, zu denen sich der Punkt P auf den Achsen befindet.
- Zur Veranschaulichung in der Skizze tragen Sie den Punkt P zur Zeit $t \approx \frac{1}{2}$ ein.
- Zum Zeitpunkt t hat P die Koordinaten $P(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t)$ und $y(t)$ zwei Funktionen sind. Welche genau? Tragen Sie diese ebenfalls in der Skizze ein.
- Wie lange ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$?
- Was ist die Beziehung zwischen $\vec{OP}(t)$ und $\vec{v}(t)$?
- Zeichnen Sie $\vec{v}(t)$ ein.
- Tragen Sie die Komponenten von $\vec{v}(t)$ ein.
- In welche Richtung wirkt die Beschleunigung $\vec{a}(t)$?



Die Komponenten von $\vec{v}(t)$ entsprechen den Ableitungen der Koordinaten von $P(t)$.

Merke Ableitung von Cosinus und Sinus

Für x im Bogenmass gilt:

$$(\sin(x))' = \quad (\cos(x))' =$$

✘ **Aufgabe 431** Wie gross ist die Geschwindigkeit der Kreisbewegung, wenn man den Winkel im Gradmass misst, d.h. eine Umdrehung erst nach $t = 360$ vollendet ist? Was bedeutet das für die Ableitungen von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ wenn α im Gradmass gemessen wird?