Aufgabe 432 Leiten Sie $\tan(x)$ ab. (x im Bogenmass).

Aufgabe 433 Sei $P(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$, indem Sie $\vec{OP}(t)$ zwei mal ableiten. Wie gross ist der Betrag der Beschleunigung? Was ist die Richtung von $\vec{a}(t)$ bezüglich $\vec{OP}(t)$?

22.1.2 Koordinatensysteme

Ein kartesisches Koordinatensystem wird wie folgt definiert:

- Festlegen des Ursprungs O (alle Koordinaten Null).
- Festlegen von n paarweise rechtwinkligen Einheitsvektoren (Länge 1) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, etc.

Für uns ist n jeweils 2 oder 3, gilt aber genauso für höhere Dimensionen.
Wird ein Vektor mit Kompententen geschrieben $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$, bedeutet das $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2$, also eine Summe von Vielfachen der Einheitsvektoren.
Wird ein Punkt mit Koordinaten $P = (x, y)$ geschrieben, heisst das für den Ortsvektor $\vec{OP} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$.
Werden die Einheitsvektoren verändert, ändert sich das ganze Koordinatensystem mit. Damit können z.B. Drehungen oder Streckungen beschrieben werden. Wird der Ursprung verschoben, entspricht das einer Translation.
Ein schöne Anwendung dafür ist die Herleitung der Additionstheoreme.

Aufgabe 434 Gesucht sind Formeln für $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$, die nur α oder β alleine in den trigonometrischen Funktionen enthalten. Vorgehen:

- Zeichnen Sie den Einheitskreisviertel für positive x- und y-Koordinaten mit der Einheit 8 cm.
- Zeichnen Sie die Punkte P_α und $P_{\alpha+\beta}$ auf dem Einheitskreis ein, für $\alpha \approx 20°$ und $\beta \approx 40°$.
- Notieren Sie die allgemeinen Koordinaten von P_α in der Skizze (nicht spezifisch für 20°).
- Geben Sie die Komponenten von $\vec{f}_1 = \vec{OP}_\alpha$ an.
- Zeichnen Sie $\vec{f}_2$ mit Länge 1 rechtwinklig zu $\vec{f}_1$ ein, so dass der Drehsinn von $\vec{f}_1$ zu $\vec{f}_2$ positiv ist.
- Geben Sie die Komponenten von $\vec{f}_2$ an.
- Seien $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ neue Einheitsvektoren. Was sind die Koordinaten von $P_{\alpha+\beta}$ in diesem neuen Koordinatensystem?
- Schreiben Sie $\vec{OP}_{\alpha+\beta}$ als Summe von Vielfachen von $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$.
- Drücken Sie damit die Koordinaten von $P_{\alpha+\beta}$ im alten Koordinatensystem aus, indem Sie die Komponenten von $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ einsetzen. Fassen Sie zusammen und und lesen Sie die Additionsformeln ab.

Merke Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) =$$
$$\cos(\alpha + \beta) =$$

Aufgabe 435 Mit Hilfe der Definition im Einheitskreis, drücken Sie erst $\sin(-\alpha)$ und $\cos(-\alpha)$ mit $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ aus. Leiten Sie dann damit die Additionstheoreme für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ her, indem Sie $(\alpha - \beta)$ als $(\alpha + (-\beta))$ schreiben.

Aufgabe 436 Mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, leiten Sie das Additionstheorem für den Tangens her.